Trous noirs: de la théorie à la première image

Éric Gourgoulhon

Laboratoire Univers et Théories Observatoire de Paris, CNRS, Université PSL, Université de Paris 92190 Meudon, France

https://luth.obspm.fr/~luthier/gourgoulhon/

École Polytechnique Fédérale de Lausanne 13 novembre 2019

> Université de Genève 14 novembre 2019

10 avril 2019 : diffusion de la toute première image!

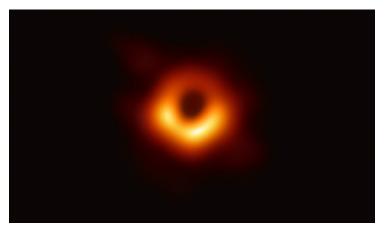


Image du trou noir M87* par la collaboration Event Horizon Telescope

[EHT Collaboration, ApJ 875, L1 (2019)]

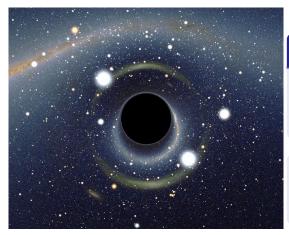
Plan

- 1 Une brève histoire de la physique des trous noirs
- 2 Images des trous noirs (sur l'ordinateur)
- 3 La première image dans le ciel
- 4 Un autre canal d'observation : les ondes gravitationnelles
- 5 Conclusions et perspectives

Plan

- 1 Une brève histoire de la physique des trous noirs
- La première image dans le ciel

Qu'est-ce qu'un trou noir?



Une définition en quelques mots :

Un **trou noir** est une région de l'espace-temps d'où rien, pas même la lumière, ne peut s'échapper.

La frontière (immatérielle) entre l'intérieur du trou noir et le reste de l'Univers est appelée horizon des événements.

[Alain Riazuelo, 2007]

Pourquoi la lumière ne peut s'échapper?

Réponse pour la mécanique newtonienne (J. Michell 1784, Laplace 1796) :

C'est en raison de la gravitation :

la vitesse de libération dépasse la vitesse de la lumière

Pourquoi la lumière ne peut s'échapper?

Réponse pour la mécanique newtonienne (J. Michell 1784, Laplace 1796) :

C'est en raison de la gravitation :

la vitesse de libération dépasse la vitesse de la lumière

Théorie de Newton de la gravitation :

la **vitesse de libération** d'un corps de masse ${\cal M}$ et de

rayon
$$R$$
 est $V_{
m lib} = \sqrt{rac{2GM}{R}}$

avec $G = 6.67 \ 10^{-11} \ \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$ (constante de Newton)

- Terre : $V_{
 m lib} = 11 \ {
 m km/s}$
- Soleil : $V_{
 m lib} = 617 \ {
 m km/s}$

La lumière ne s'échappe pas si $V_{\rm lib} > c \simeq 300\,000~{
m km/s}$



La préhistoire des trous noirs...

$$V_{\text{lib}} > c$$
 \iff $\frac{2GM}{R} > c^2 \iff \frac{2G}{R} \times \frac{4}{3}\pi R^3 \rho > c^2 \iff R > \sqrt{\frac{3c^2}{8\pi G\rho}}$

John Michell (1784)

"If there should really exist in nature any bodies, whose density is not less than that of the sun, and whose diameters are more than 500 times the diameter of the sun, since their light could not arrive at us, ..., we could have no information from sight" [Phil. Trans. R. Soc. Lond. 74, 35 (1784)]

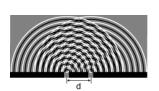
Pierre Simon de Laplace (1796)

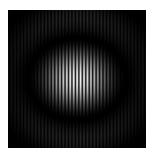
"Un astre lumineux, de la même densité que la Terre, et dont le diamètre serait 250 fois plus grand que le Soleil, ne permettrait, en vertu de son attraction, à aucun de ses rayons de parvenir jusqu'à nous. Il est dès lors possible que les plus grands corps lumineux de l'univers puissent, par cette cause, être invisibles." [Exposition du système du monde (1796)]



Les "corps invisibles" tombent dans l'oubli...

- Mention des "corps invisibles" par Laplace dans les deux premières éditions de son Exposition du système du Monde (1796 et 1799)
- Suppression dans la troisième édition (1808) et les suivantes : prédominance de la théorie ondulatoire de la lumière sur la théorie corpusculaire après les expériences de Thomas Young (1801)





[R. Taillet]

Limites du concept newtonien de trou noir

- Pas de rôle privilégié de la vitesse de la lumière en théorie newtonienne : rien n'interdit $V>c\Longrightarrow$ les corps invisibles de Michell et Laplace restent causallement connecté au reste de l'Univers
- $V_{\rm lib} \sim c \Longrightarrow$ énergie du champ gravitationnel \sim énergie de masse Mc^2 \Longrightarrow théorie *relativiste* de la gravitation nécessaire!
- le traitement correct des trous noirs ne peut se faire qu'en relativité générale (ou dans l'une de ses généralisations)

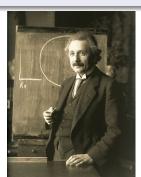
Limites du concept newtonien de trou noir

- Pas de rôle privilégié de la vitesse de la lumière en théorie newtonienne : rien n'interdit $V > c \Longrightarrow$ les corps invisibles de Michell et Laplace restent causallement connecté au reste de l'Univers
- $V_{\rm lib} \sim c \Longrightarrow$ énergie du champ gravitationnel \sim énergie de masse Mc^2 ⇒ théorie relativiste de la gravitation nécessaire!
- le traitement correct des trous noirs ne peut se faire qu'en relativité générale (ou dans l'une de ses généralisations)

$$\boldsymbol{R} - \frac{1}{2}R\,\boldsymbol{g} = \frac{8\pi G}{c^4}\,\boldsymbol{T}$$

(A. Einstein, novembre 1915)

La relativité générale décrit la gravitation comme la courbure de l'espace-temps



Les trous noirs de la relativité générale

Théorème d'unicité (absence de chevelure)

Dorochkevitch, Novikov & Zeldovitch (1965), Israel (1967), Carter (1971), Hawking (1972)

En relativité générale (et en dimension 4), un trou noir stationnaire est entièrement décrit par seulement deux nombres a :

- sa masse M
- son moment cinétique J (mesure l'état de rotation)

La solution correspondante l'équation d'Einstein est la solution de Kerr (1963). Pour J=0, elle se réduit à la solution de Schwarzschild (1916).

a. trois si on considère une charge électrique Q non nulle, mais ce n'est pas pertinent d'un point de vue astrophysique

Les trous noirs de la relativité générale

Théorème d'unicité (absence de chevelure)

Dorochkevitch, Novikov & Zeldovitch (1965), Israel (1967), Carter (1971), Hawking (1972)

En relativité générale (et en dimension 4), un trou noir stationnaire est entièrement décrit par seulement deux nombres a :

- sa masse M
- son moment cinétique J (mesure l'état de rotation)

La solution correspondante l'équation d'Einstein est la solution de Kerr (1963). Pour J=0, elle se réduit à la solution de Schwarzschild (1916).

⇒ Un trou noir est un objet extrêmement régulier : il "n'a pas de cheveux" (John A. Wheeler)

a. trois si on considère une charge électrique Q non nulle, mais ce n'est pas pertinent d'un point de vue astrophysique

• Un trou noir n'est pas un "aspirateur universel" : au delà d'une certaine distance (de l'ordre de grandeur de la taille de l'horizon), la matière peut tout à fait rester en orbite stable autour du trou noir.

- Un trou noir n'est pas un "aspirateur universel": au delà d'une certaine distance (de l'ordre de grandeur de la taille de l'horizon), la matière peut tout à fait rester en orbite stable autour du trou noir.
- Un trou noir n'est pas un "objet extrêmement dense" : au contraire, il est fait de **vide** (l'horizon est une frontière immatérielle), sauf peut-être en son centre (singularité). Si l'on définit une "densité moyenne" par $\bar{\rho} = M/(4/3\pi R^3)$, alors

- Un trou noir n'est pas un "aspirateur universel": au delà d'une certaine distance (de l'ordre de grandeur de la taille de l'horizon), la matière peut tout à fait rester en orbite stable autour du trou noir.
- Un trou noir n'est pas un "objet extrêmement dense" : au contraire, il est fait de **vide** (l'horizon est une frontière immatérielle), sauf peut-être en son centre (singularité). Si l'on définit une "densité moyenne" par $\bar{\rho} = M/(4/3\pi R^3)$, alors
 - pour le trou noir au centre de notre galaxie (Sgr A*) : $\bar{\rho} \sim 10^6 \ {\rm kg \, m^{-3}} = 2 \ 10^{-4} \times$ la densité d'une naine blanche

- Un trou noir n'est pas un "aspirateur universel": au delà d'une certaine distance (de l'ordre de grandeur de la taille de l'horizon), la matière peut tout à fait rester en orbite stable autour du trou noir.
- Un trou noir n'est pas un "objet extrêmement dense" : au contraire, il est fait de **vide** (l'horizon est une frontière immatérielle), sauf peut-être en son centre (singularité). Si l'on définit une "densité moyenne" par $\bar{\rho} = M/(4/3\pi R^3)$, alors
 - pour le trou noir au centre de notre galaxie (Sgr A*) : $\bar{\rho} \sim 10^6~{\rm kg\,m^{-3}} = 2~10^{-4} \times$ la densité d'une naine blanche
 - pour le trou noir au centre de la galaxie M87 (M 87*) : $\bar{\rho}\sim 2~{\rm kg}\,{\rm m}^{-3}=1/500^{\rm e}$ de la densité de l'eau !

- Un trou noir n'est pas un "aspirateur universel": au delà d'une certaine distance (de l'ordre de grandeur de la taille de l'horizon), la matière peut tout à fait rester en orbite stable autour du trou noir.
- Un trou noir n'est pas un "objet extrêmement dense" : au contraire, il est fait de **vide** (l'horizon est une frontière immatérielle), sauf peut-être en son centre (singularité). Si l'on définit une "densité moyenne" par $\bar{\rho} = M/(4/3\pi R^3)$, alors
 - pour le trou noir au centre de notre galaxie (Sgr A*) : $\bar{\rho}\sim 10^6~{\rm kg\,m^{-3}}=2~10^{-4}\times$ la densité d'une naine blanche
 - pour le trou noir au centre de la galaxie M87 (M 87*) : $\bar{\rho}\sim 2~{\rm kg}\,{\rm m}^{-3}=1/500^{\rm e}$ de la densité de l'eau !
- On peut, en théorie, former un trou noir dans un univers vide de toute matière : par effondrement d'un paquet d'ondes d'espace-temps (les ondes gravitationnelles).

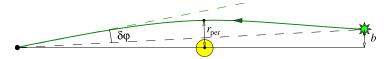
- La masse M n'est pas une mesure de la "quantité de matière" à l'intérieur du trou noir, mais un paramètre qui caractérise son champ de gravitation externe. M est mesurable : période orbitale d'un corps d'épreuve en orbite circulaire autour du trou noir.
- Le moment cinétique J est également une quantité mesurable, par la précession d'un gyroscope en orbite autour du trou noir.
- Le rayon d'un trou noir n'est pas un concept bien défini; en aucun cas, il ne correspond à la distance entre le "centre" du trou noir (la singularité) et l'horizon. Il vaut mieux le définir à partir de l'aire A de l'horizon. Pour un trou noir statique, $R = \sqrt{A/4\pi}$. Le rayon ainsi défini est proportionnel à la masse : $R = \frac{2GM}{c^2} \simeq 3\left(\frac{M}{M_{\odot}}\right) \text{ km}$

masse :
$$R = \frac{2GM}{c^2} \simeq 3\left(\frac{M}{M_{\odot}}\right) \, \, \mathrm{km}$$

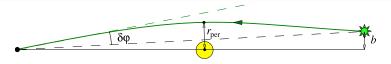
Plan

- Une brève histoire de la physique des trous noirs
- 2 Images des trous noirs (sur l'ordinateur)
- La première image dans le ciel

Courbure des rayons lumineux par le champ gravitationnel



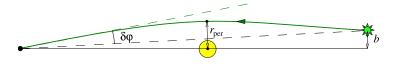
Courbure des rayons lumineux par le champ gravitationnel





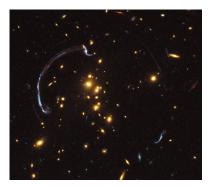
Éclipse de Soleil de 1919 (observée par A. Eddington)

Courbure des rayons lumineux par le champ gravitationnel





Éclipse de Soleil de 1919 (observée par A. Eddington)

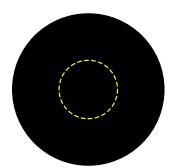


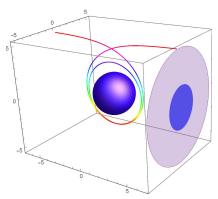
[HST (Nasa/ESA/STSCI)]
Mirage gravitationnel causé par un amas de galaxies

David Hilbert (1917): "ombre" d'un trou noir de Schwarzschild

Light rays with impact parameter $b < 3\sqrt{3}GM/c^2 \simeq 2.6\,GM/c^2$ are absorbed by the black hole [Hilbert, Nachricht. König. Gesel. Wissen. Göttingen,

Mathematisch-Ph 1917, p. 53] ⇒ black hole "shadow"





Trajectory of a photon arising from the edge of the black hole shadow

[Dokuchaev, IJMPD **28**, 1941005 (2019)] 🗸 🤉 🔈

James M. Bardeen (1972): shadow of a Kerr black hole

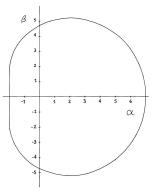
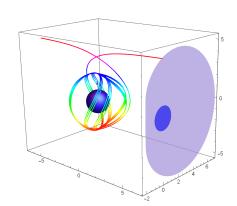


Figure 6. The apparent shape of an extreme (a = m) Kerr black hole as seen by a distant observer in the equatorial plane, if the black hole is in front of a source of illumination with an angular size larger than that of the black hole.

Shadow of a maximally rotating Kerr black hole

[Bardeen, in Black Holes - Les astres occlus, proc. of Les Houches Summer School 1972, ed. C. DeWitt and B. DeWitt, (1973), p. 215.]

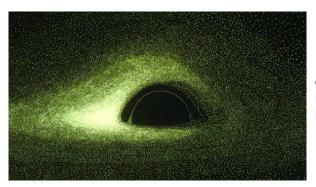


Trajectory of a photon arising from the edge of the black hole shadow

[Dokuchaev, IJMPD 28, 1941005 (2019)]

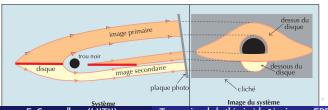
Jean-Pierre Luminet (1979): the first (computed) image

Groupe d'Astrophysique Relativiste, Observatoire de Paris, Meudon



First image of an accretion disk around a Schwarzschild black hole

[Luminet, A&A 75, 228 (1979)]

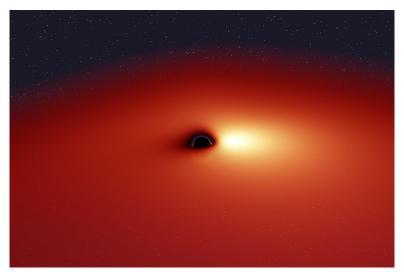


Light ray trajectories https://luth.obspm.fr/~luminet/

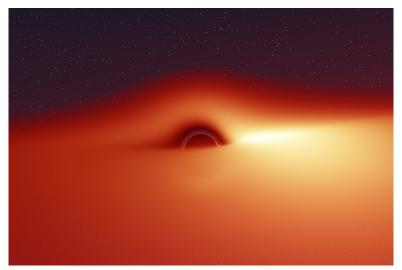
Jean-Alain Marck (1991, 1996) : the first movie <u>Département d'Astrophysique</u> Relativiste et de Cosmologie, Observatoire de Paris, Meudon



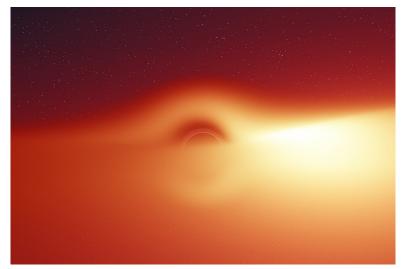
Flight to a black hole, [Marck, CQG 13, 393 (1996)]



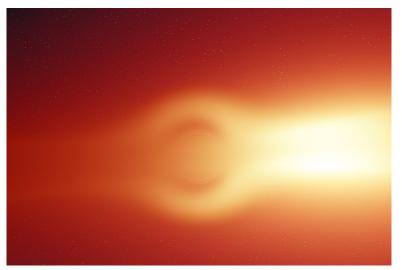
Flight to a black hole, [Marck, CQG 13, 393 (1996)]



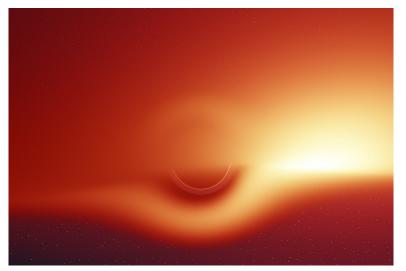
Flight to a black hole, [Marck, CQG 13, 393 (1996)]



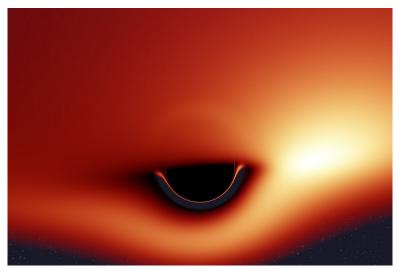
Flight to a black hole, [Marck, CQG 13, 393 (1996)]



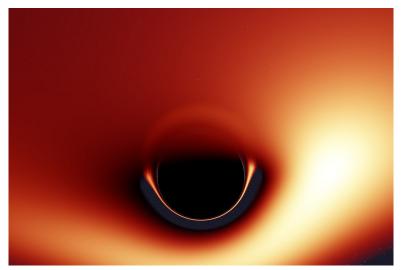
Flight to a black hole, [Marck, CQG 13, 393 (1996)]



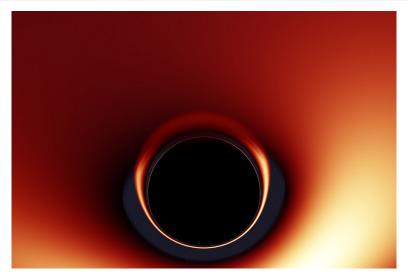
Flight to a black hole, [Marck, CQG 13, 393 (1996)]



Flight to a black hole, [Marck, CQG 13, 393 (1996)]



Flight to a black hole, [Marck, CQG 13, 393 (1996)]



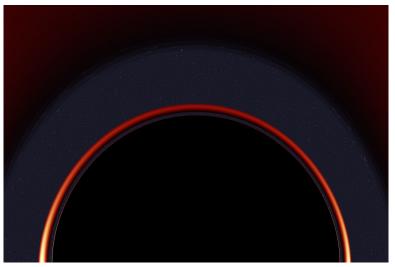
Flight to a black hole, [Marck, CQG 13, 393 (1996)]



Flight to a black hole, [Marck, CQG 13, 393 (1996)]

Jean-Alain Marck (1991, 1996) : the first movie

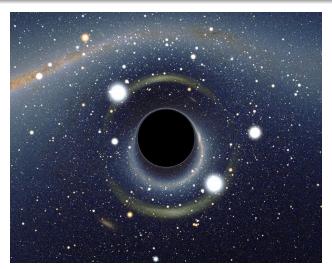
Département d'Astrophysique Relativiste et de Cosmologie, Observatoire de Paris, Meudon



Flight to a black hole, [Marck, CQG 13, 393 (1996)]

Alain Riazuelo (2007): the black hole in the sky

Institut d'Astrophysique de Paris

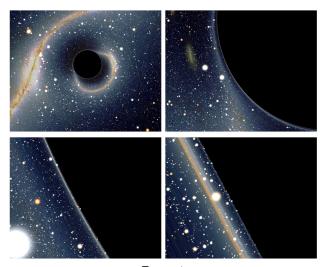


Schwarzschild black hole

[Riazuelo (2007)]; [Riazuelo, IJMPD 28, 1950042 (2019)]

Alain Riazuelo (2007): very high precision computations

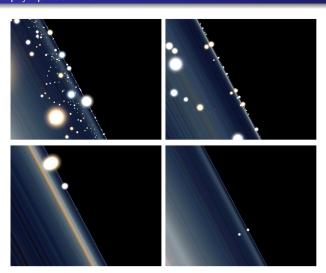
Institut d'Astrophysique de Paris



Zoom 1

[Riazuelo (2007)]; [Riazuelo, IJMPD 28, 1950042 (2019)]

Alain Riazuelo (2007): very high precision computations Institut d'Astrophysique de Paris

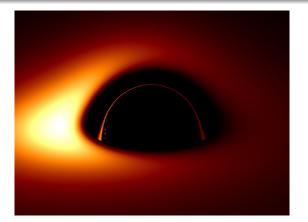


Zoom 2

[Riazuelo (2007)]; [Riazuelo, IJMPD 28, 1950042 (2019)]

GYOTO: Frédéric Vincent, Thibaut Paumard et al. (2011) LESIA & LUTH, Observatoire de Paris, Meudon

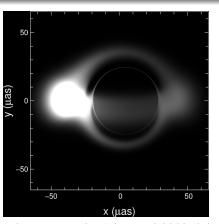
https://gyoto.obspm.fr/



Thin accretion disk around a Schwarzschild black hole [Vincent, Paumard, Gourgoulhon & Perrin, CQG 28, 225011 (2011)]

GYOTO (2012): an open-source and flexible code LESIA & LUTH, Observatoire de Paris, Meudon

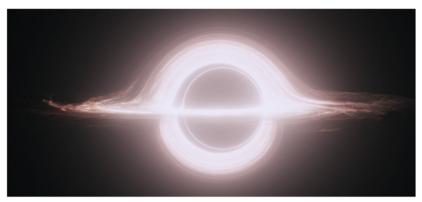
https://gyoto.obspm.fr/



Ionised torus around a Schwarzschild black hole

[Straub, Vincent, Abramowicz, Gourgoulhon & Paumard, A&A 543, A83 (2012)]

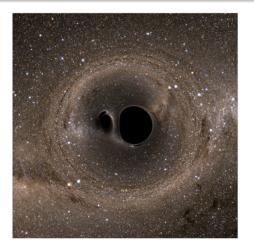
Oliver James, Eugénie von Tunzelmann, Paul Franklin & Kip S Thorne (2015): the *Interstellar* black hole Double Negative Visual Effects, London



Thin accretion disk around a Kerr black hole with a/M=0.6 for the movie *Interstellar* (Christopher Nolan, 2014)

[James, von Tunzelmann, Franklin & Thorne, CQG 32, 065001 (2015)]

Andy Bohn et al. (2015): movie of a binary black hole Cornell University



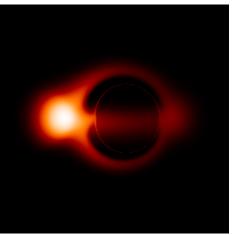
Binary black hole with mass ratio $m_1/m_2=3$ seen along an axis perpendicular to the orbital plane

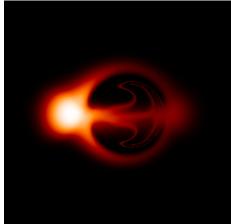
[Bohn et al., CQG 32 065002 (2015)]

GYOTO (2016): alternatives to the Kerr black hole

Kerr black hole a/M = 0.9

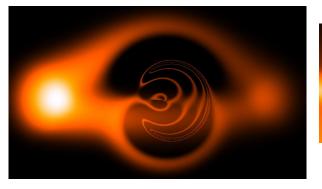
Boson star ~k=1, $\omega=0.70\,m/\hbar$





[Vincent, Meliani, Grandclément, Gourgoulhon & Straub, CQG 33, 105015 (2016)]

GYOTO (2018): alternatives to the Kerr black hole





zoom on the central region

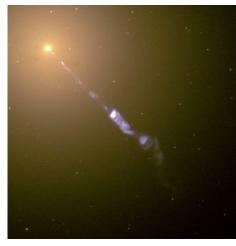
Rotating naked wormhole

[Lamy, Gourgoulhon, Paumard & Vincent, CQG 35, 115009 (2018)]

Plan

- Une brève histoire de la physique des trous noirs
- 1 La première image dans le ciel

M87: a galaxy with an active nucleus



[HST]

M87

Giant elliptical galaxy at the center of Virgo cluster

- M87 = Meissier 87: the 87th object in Charles Meissier's Catalogue des nébuleuses et amas d'étoiles (1774)
- Jet discovered by H. Curtis (1918) $V_{
 m jet} \simeq 0.99\,c$
- Bright radio source (Virgo A) (Bolton et al. 1949)
- distance : d = 16.7 Mpc = 54.5 Mly

[video]

M87*: the supermassive black hole in M87 nucleus

• Mass determined by stellar dynamics (velocity dispersion) :

$$M \simeq 6.2 \times 10^9 M_{\odot}$$

• Spin a = J/M unknown yet



M87*: the supermassive black hole in M87 nucleus

• Mass determined by stellar dynamics (velocity dispersion) :

$$M \simeq 6.2 \times 10^9 M_{\odot}$$

- Spin a = J/M unknown yet
- \implies black hole areal radius $(a=0): R \simeq 120 \; \mathrm{AU} \; (\sim 4 \times \; \mathrm{Neptune's \; orbit})$
- \implies orbital period at the innermost stable circular orbit :

$$T = 33 d (a = 0)$$
 down to $T = 4.4 d (a = M)$

 \implies angular diameter of the shadow (a=0) :

$$\Theta = 6\sqrt{3} \frac{GM}{c^2 d} \simeq 1.8 \times 10^{-10} \text{ rad} = 38 \,\mu\text{as}!$$

For comparison : angular resolution of Hubble Space Telescope : $0.1 \text{ as} = 10^5 \ \mu \text{as}$



Reaching μ as resolution : VLBI interferometry

Angular resolution of an interferometer of baseline D observing at wavelength λ :

$$\theta \sim \frac{\lambda}{D}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda = 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m} \\ D = 10,000 \text{ km} = 10^7 \text{ m} \end{array} \right\} \Longrightarrow \theta \sim 10^{-10} \text{ rad} \sim 21 \; \mu \text{as} \label{eq:tau_loss}$$



Reaching μ as resolution : VLBI interferometry

Angular resolution of an interferometer of baseline D observing at wavelength λ :

$$\theta \sim \frac{\lambda}{D}$$

$$\lambda = 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$$

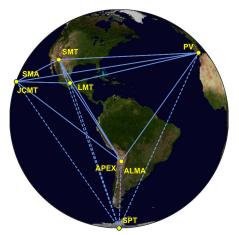
$$D = 10,000 \text{ km} = 10^7 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \theta \sim 10^{-10} \text{ rad} \sim 21 \text{ } \mu \text{as}$$

We need an Earth-size interferometer!



Reaching μas resolution : the Event Horizon Telescope



https://eventhorizontelescope.org/



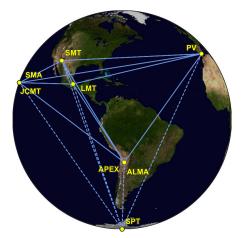
IRAM 30 m (Pico Veleta, Spain)



ALMA (Atacama, Chile)

Very Large Baseline Interferometry (VLBI) at $\lambda=1.3$ mm (f=230 GHz)

Reaching μas resolution : the Event Horizon Telescope







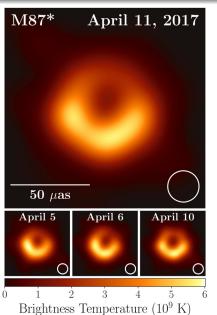
IRAM 30 m (Pico Veleta, Spain)



ALMA (Atacama, Chile)

Very Large Baseline Interferometry (VLBI) at $\lambda=1.3$ mm (f=230 GHz) Two observation campaigns : April 2017 and April 2018

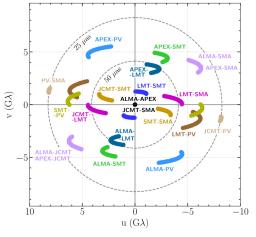
The image of M87* from the EHT 2017 data



EHT observations of M87* black hole in April 2017

[EHT Collaboration, ApJ **875**, L1 (2019)]

M87*: the true data

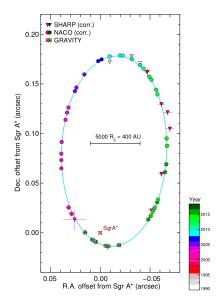


Coverage of the Fourier plane

[EHT Collaboration, ApJ 875, L1 (2019)]

Unsufficient coverage to get a unique image by inverse Fourier transform ⇒ image reconstruction by statistical algorithms

The next image : the Galactic center black hole (Sgr A^*)?



- distance : d = 8.12 kpc
- mass :

$$M = 4.10 \times 10^{6} M_{\odot}$$

$$= 20.2 \text{ s} \qquad (c = G = 1)$$

$$= 6.06 \times 10^{9} \text{ m}$$

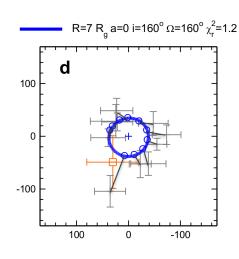
$$= 4.05 \times 10^{-2} \text{ au}$$

$$= 1.96 \times 10^{-7} \text{ pc}$$

$$\iff 1 \text{ pc} = 5.10 \times 10^{6} M$$

- spin J = aM unknown yet...
- \implies shadow size $\Theta \sim 53 \ \mu as$
 - \leftarrow Orbit of star S2 around Sgr A* S2: main-sequence B star orbital period: P=16.05 yr periastron (May 2018):
 - $r_{\rm per} = 120 \text{ au} = 3 \times 10^3 M$
 - $v_{\text{per}} = 7650 \text{ km s}^{-1} = 0.025 c$

GRAVITY instrument at VLT has observed orbital motion very close to the black hole



Orbital motion of a flare in the accretion flow at $r\sim 7M$

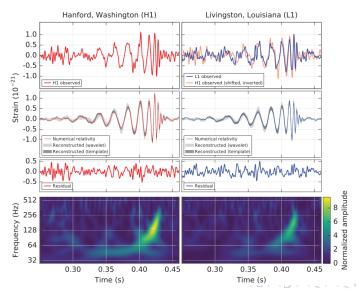
[GRAVITY team, A&A 618, L10 (2018)]

Plan

- 1 Une brève histoire de la physique des trous noirs
- Images des trous noirs (sur l'ordinateur)
- 3 La première image dans le ciel
- 4 Un autre canal d'observation : les ondes gravitationnelles
- 5 Conclusions et perspectives

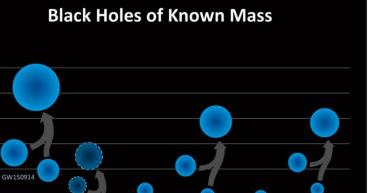
Observer les trous noirs en ondes gravitationnelles

Le 14 septembre 2015, à 09 h 50 min 45 s UTC :



Trous noirs détectés en ondes gravitationnelles

LVT151012



LIGO/VIRGO

GW170814

60 50

Solar Masses

GW170608

GW170104

Plan

- 1 Une brève histoire de la physique des trous noirs
- Images des trous noirs (sur l'ordinateur)
- 3 La première image dans le ciel
- 4 Un autre canal d'observation : les ondes gravitationnelles
- 5 Conclusions et perspectives

Conclusions and perspectives

- The image of M87* is the very first image showing a black hole shadow
- \bullet The black hole mass M estimated from the size of the ring is consistent with the mass determined from stellar dynamics in M87 nucleus
 - ⇒ (broad) confirmation of general relativity in the strong field regime
- Future images should be sharper :
 - spring 2020: EHT observations with augmented array: NOEMA (IRAM, Plateau de Bures) and Greenland Telescope
 - near future : VLBI with antennas in space
 - ⇒ measure the spin of the black hole and test the black hole hypothesis and/or general relativity

Bibliographie

- P. Binétruy, 2016, À la poursuite des ondes gravitationnelles (2e éd.), Dunod
- T. Damour, 2005, Si Einstein m'était conté, Le Cherche Midi
- S. Collion, 2019, Voyage dans les mathématiques de l'espace-temps, EDP Sciences
- N. Deruelle, 2015, De Pythagore à Einstein, tout est nombre, Belin
- N. Deruelle & J.-P. Lasota, 2018, Les Ondes gravitationnelles, Odile Jacob
- J.-P. Lasota, 2010, La science des trous noirs, Odile Jacob
- J.-P. Luminet, 2002, *Les trous noirs*, Points Sciences
- A. Riazuelo, 2016, *Les trous noirs : à la poursuite de l'invisible*, Vuibert video : http://www2.iap.fr/users/riazuelo/bh/vuibert
- M. Smerlak, 2016, Les trous noirs, Que sais-je?, PUF
- P. Spagnou, 2017, Les mystères du temps, CNRS Éditions
- K.S. Thorne, 1997, Trous noirs et distorsions du temps, Flammarion



À propos de ce document

Cette présentation a été réalisée entièrement à l'aide de logiciels libres :



Linux système d'exploitation (Ubuntu)



traitement de texte



dessin vectoriel

April: https://www.april.org/ Promouvoir et défendre le logiciel libre