
Analyse en relativité d'échelle du bassin versant du Gardon (Gard, France)

Étude de la variation de la dimension fractale en fonction de l'altitude et de l'échelle

Laurent Nottale* — Philippe Martin** — Maxime Forriez**

* LUTH, UMR 8102 CNRS, Observatoire de Paris-Meudon et Université Paris 7
5 place Janssen 92190 Meudon

laurent.nottale@obspm.fr

** Université d'Avignon

UMR ESPACE 6012 du CNRS, 74 rue L. Pasteur, Case 17, 84029 Avignon cedex

philippe.martin@univ-avignon.fr; maxime.forriez@etd.univ-avignon.fr

RÉSUMÉ. Un ensemble de données quantitatives concernant les courbes de niveau supérieures à 100 m du bassin du Gardon est analysé à l'aide des outils de description issus de la théorie de la relativité d'échelle. On y considère que la grandeur analysée, ici les nombres de points donnés par une méthode de comptage de boîtes, dépend explicitement de l'échelle (ici la taille de la boîte) et de la variable spatiale (ici l'altitude), et que cette dépendance est obtenue comme solution d'une équation aux dérivées partielles (en échelle et en position). Un tel cadre permet de généraliser naturellement les descriptions simples en termes d'invariance d'échelle (dimension fractale constante) à des descriptions plus élaborées relevant d'une « covariance d'échelle », incluant des dimensions fractales effectives variables et des transitions entre régimes fractal (dépendant de l'échelle) et non-fractal (indépendant de l'échelle). En ce qui concerne la dépendance en fonction de l'altitude, cette méthode permet de rendre compte simplement de la variation parabolique observée pour les dimensions fractales. De plus, deux des trois paramètres de cette loi parabolique peuvent être déterminés par des contraintes et des données géographiques indépendantes (celles qui fixent les altitudes où la fractalité disparaît, c'est-à-dire où la dimension fractale des courbes de niveau atteint $D_F = 1$, en particulier le niveau de la mer Méditerranée au Wurm ≈ -120 m). En ce qui concerne la dépendance en fonction de l'échelle, celle-ci semble être caractérisée essentiellement par un régime de transition entre un comportement asymptotique fractal de dimension constante (aux petites échelles géographiques, c'est-à-dire aux grandes tailles de boîte) et un comportement non-fractal (aux grandes échelles géographiques, petites tailles de boîte).

Premières Rencontres d'Avignon (2007-2009) autour de la Relativité d'Échelle

Sous la direction de L. Nottale et Ph. Martin – ISBN : 2-910545-07-5, pages 267 à 295

ABSTRACT. A set of quantitative data concerning the level curves higher than 100 m of the Gardon basin is analysed using description tools issued from the scale relativity theory. One considers that the quantity analysed – here the number of points obtained from a box counting method – is explicitly dependent on the scale – here the box size – and of a space variable – here the altitude. This dependence is then assumed to be solution of partial derivative equations (in terms of scale and position). Such a framework allows one to naturally generalize the simple scale invariant descriptions (constant fractal dimensions) to more complex “scale-covariant” ones, including variable fractal dimensions and transitions between a fractal (scale dependent) regime and a non-fractal regime (independent of scale). Concerning the dependence in function of altitude, this method allows to account in a simple way for the observed parabolic variation of the fractal dimensions. Moreover, two of the three parameters of this parabolic law can be determined through independent geographic constraints and data (those which fix the altitude where the fractality vanishes, i.e. where the fractal dimension of level contours reaches $D_F = 1$, in particular the Wurm plain level at -120 m). Concerning the dependence in functions of scale, it seems to be mainly characterized here by a transition regime between an asymptotic fractal regime of constant fractal dimension (for small geographic scales, i.e. large box sizes) and a non-fractal behavior (for large geographic scales, i.e. small box sizes).

MOTS-CLÉS : échelles, relativité, géographie, fractals, bassin versant

KEYWORDS: scales, relativity, geography, fractals, catchment basin

1. Introduction

À la suite de travaux exploratoires de géomorphologie théorique réalisés sur le massif karstique de la Sainte Baume (Martin, 2000.a et b), sur le mont Aigoual (Martin, 2004), sur le Lodévois (Martin, 2007.a) et sur les Grands Causses (Martin, 2008) il est apparu que l'étude de l'organisation fractale des reliefs devait être envisagée aussi, et peut-être surtout, dans le cadre d'unités hydrogéomorphologiques qui ont un sens au regard des questions de dégradation de l'énergie.

Ces unités correspondent évidemment aux bassins versants superficiels (sauf en domaine karstique) constitués d'une part de surfaces qui « versent » vers un exutoire (quel qu'il soit : confluence, mer) et d'autre part d'un réseau de drainage arborescent dont la fonction est d'acheminer l'eau précipitée, hors du bassin (Forriez et al. à paraître), c'est-à-dire au niveau de la borne inférieure du potentiel de glyptogénèse matérialisée, au mieux, par l'océan mondial. Ce réseau dendritique, traduction directe de l'érosion linéaire, est à l'origine de l'irrégularité perceptible du relief et cela sur une large gamme d'échelles.

Dans ces conditions, il convenait de trouver un bassin versant où l'imperméabilité du substrat soit forte et où l'érosion linéaire ait pu s'exercer avec vigueur, ce qui nécessite tant une hauteur de chute notable qu'un apport d'eau non négligeable et une distance à la mer, faible.

Appuyé sur le rebord sud-est du massif métamorphique des Cévennes, entre l'Aigoual plus au sud et le mont Lozère plus au nord, le bassin versant du Gardon (Gard) est apparu comme le bon objet d'étude pour cette investigation, d'autant qu'il reçoit d'importantes précipitations, en particulier à l'automne et au printemps, et qu'il a, comme la Cèze ou l'Hérault, des sources qui sont peu éloignées de son niveau de base représenté par la Méditerranée, via une confluence très basse avec le Rhône, peu en amont de la Camargue (Fig. 1).

Cela étant, si sa partie située en amont du fossé oligocène d'Alès n'est quasiment développée que sur des roches de socle et est en pente forte, la partie aval se déploie, elle, au niveau des plateaux des garrigues de Nîmes essentiellement composés de calcaires urgoniens fortement karstifiés, et selon des pentes de talwegs infiniment plus faibles.

Ne souhaitant pas, dans ce travail, aborder la question des logiques morphologiques spécifiques des karsts, nous avons choisi de limiter notre investigation à la partie du bassin versant dont l'altitude est supérieure à 100 m ce qui correspond géographiquement au sous bassin situé en amont du fossé d'Alès.

Traditionnellement, la géomorphologie a pour projet de comprendre les reliefs déployés à la surface de la Terre. Pour ce faire, elle utilise principalement une approche chronologique fondée sur des pas de temps qui sont soit ceux de la géologie (géomorphologie structurale), soit ceux des changements climatiques (géomorphologie climatique) soit ceux de la cinétique des réactions chimiques et/ou physiques (géomorphologie dynamique) voire ceux de l'histoire (dynamique anthropique, géo-archéologie).

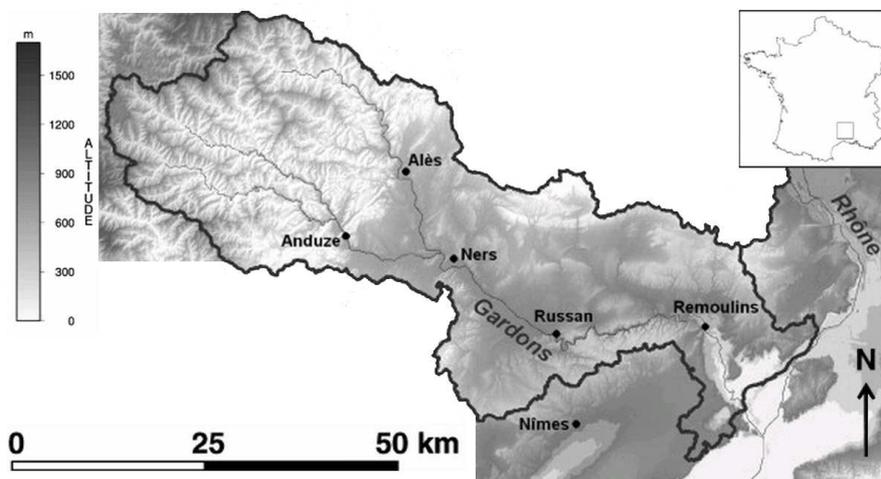


Figure 1. *Modèle numérique du bassin versant du Gardon. L'étude concerne la portée du bassin versant située en amont du fossé d'Alès (entre les villes de Ners, Anduze et Alès et orienté NE-SW).*

Sans être totalement absente, l'approche spatiale (morphométrie, analyse spatiale) est secondaire du simple fait que les causalités explicatives des reliefs ne sont pas pensées comme, explicitement, spatiales, et encore moins comme étant scalaires et géométriques, mais comme étant liées aux forces analysées en géodynamique interne (mouvement tectonique) et à celles mesurables dans le cadre de la géodynamique externe (érosion).

Par conséquent, la difficulté principale qui reste à résoudre est de rendre compte formellement, dans le cadre d'une épistémologie positiviste et réaliste, de l'irrégularité fort variable des reliefs, c'est-à-dire de leur logique géométrique. Or cela passe par une compréhension profonde des rapports scalaires constitutifs de ces reliefs. Celle-ci doit donc être géométrique et s'inscrire dans un cadre conceptuel adapté qui est d'une part celui de la géométrie fractale et d'autre part celui de la relativité d'échelle (Nottale, 1993, 2011).

Cette façon de voir les choses postule donc, qu'à côté des causes matérielles et efficientes explicatives des reliefs nous devons aussi penser une causalité structurale de nature formelle, ce qui nécessite d'une part d'explorer les rapports scalaires puis, d'autre part de ressaisir ces situations expérimentales dans le cadre d'une théorie déductive principielle.

L'exploration de notre objet d'étude ne pouvant encore se faire directement sur la totalité de l'information altitudinale collectée sur ce relief, nous serons amenés à

travailler sur des coupes calculées à partir du modèle numérique de terrain de l'Institut Géographique National (IGN) disponible au pas de 50 m (Fig. 2).

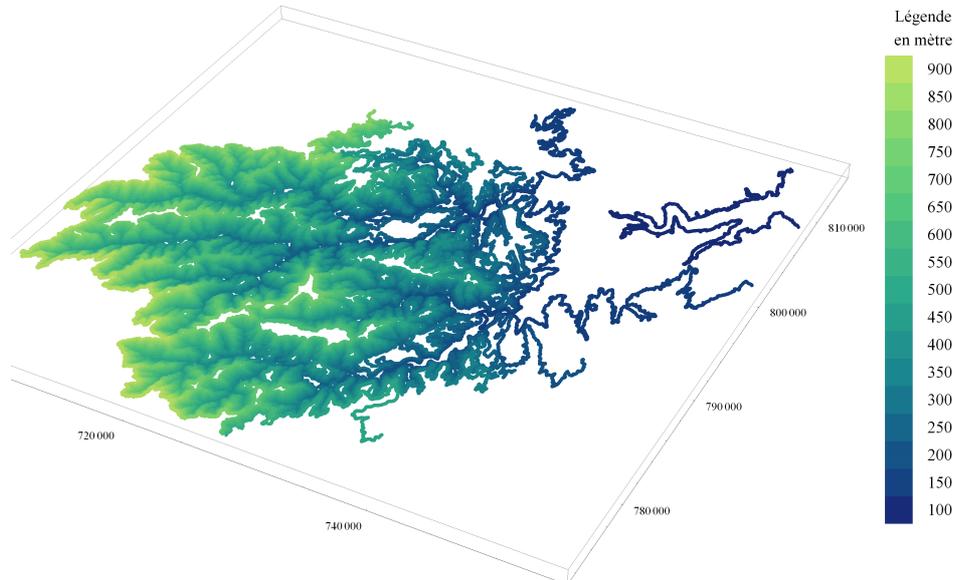


Figure 2. Haut bassin versant du Gardon : variation, en fonction de l'altitude, des courbes de niveau calculées à partir d'un modèle numérique de terrain avec un pas de 50 m.

Ce bassin a donc été, comme tout relief peut l'être, découpé selon des plans horizontaux, espacés de 50 m, dont l'intersection avec le relief constituera les ensembles étudiés que l'on appelle couramment des courbes de niveau. Celles-ci, limitées à chaque extrémité par la ligne de partage des eaux (crête topographique formant interfluve entre deux unités hydrologiques) et donc de longueurs, à vol d'oiseau, variables suivant l'altitude (distances plus courtes dans les parties hautes et basses que dans les parties médianes) peuvent être analysées dans le cadre d'une approche fractale simple (comptage de boîtes).

Dans des travaux antérieurs (Martin 2006, 2007.b, Martin et al. 2008), une telle analyse géométrique a mis en évidence une double variation de la dimension fractale, en fonction de l'altitude d'une part et de l'échelle elle-même d'autre part.

Dans cet article nous poursuivons l'analyse de ces données d'observation dans le cadre de l'approche relative d'échelle (Nottale 1993, 1998). Dans celle-ci, des variables caractérisant l'échelle d'observation sont introduites de manière explicite. La dépendance, en fonction de ces variables d'échelle, des différentes quantités étudiées est alors décrite par des équations aux dérivées partielles. Dans le cas considéré de

double dépendance, en fonction de la position x et de l'échelle $\ln \varepsilon$, on a donc affaire à un double calcul différentiel en $\partial/\partial x$ et $\partial/\partial \ln \varepsilon$ (Nottale 2002).¹

Les solutions de telles équations différentielles d'échelle permettent, pour les plus simples d'entre elles, de retrouver un comportement fractal standard auto-similaire à dimension fractale constante (en loi de puissance). Considérons en effet une variable fractale, comme le nombre N compté dans un comptage de boîte (ou la longueur L mesurée sur une courbe fractale, pour laquelle tout ce qui suit s'applique aussi), la plus simple équation différentielle possible consiste précisément à expliciter le caractère constant de la dimension fractale, sous la forme :

$$\frac{\partial \ln N}{\partial \ln \varepsilon} = -D_F, \quad [1]$$

c'est-à-dire,

$$\frac{\partial N}{\partial \ln \varepsilon} = -D_F N, \quad [2]$$

dont la solution s'écrit :

$$N = N_0 \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right)^{D_F}. \quad [3]$$

Dans le cas d'un comptage de boîtes, la variable d'échelle est la taille de la boîte, $\varepsilon = r$.

Une première généralisation naturelle d'une telle équation consiste à prendre en compte une translation possible sur la longueur $L(x, \ln \varepsilon)$ ou un changement d'origine pour le compte du nombre de boîtes. Ceci revient à remplacer dans les équations ci-dessus N par $N - N_0$, c'est-à-dire à y rajouter un terme constant :

$$\frac{\partial N}{\partial \ln \varepsilon} = a - D_F N, \quad [4]$$

avec $a = D_F N_0$. La solution s'écrit :

$$N = N_0 \left\{ 1 + \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right)^{D_F} \right\}. \quad [5]$$

Elle décrit un comportement fractal (dépendant d'échelle) à certaines échelles et non-fractal (indépendant d'échelle) à d'autres, avec une transition de l'un à l'autre régime autour de l'échelle de transition λ . On peut aussi pousser plus loin le développement limité du membre de droite, sous la forme $a + bN + cN^2 + \dots$. Les solutions décrivent alors des régimes fractals et non-fractals multiples séparés par des échelles de transition différentes.

1. Nous adoptons ici une notation simplifiée. Strictement, il faudrait introduire une échelle de référence λ et toujours écrire la variable d'échelle comme $\ln(\varepsilon/\lambda)$ (ce qui est précisément une manifestation de la relativité des échelles). Mais, quand λ est une échelle constante, celle-ci n'intervient pas dans l'élément différentiel d'échelle $d \ln(\varepsilon/\lambda)$ qui peut donc être écrit $d \ln \varepsilon$.

Une autre généralisation, particulièrement appropriée aux applications en géographie, consiste à prendre en compte des équations différentielles du second ordre. Dans le cas le plus simple, on considère que l'invariant, au lieu d'être la dimension fractale D_F , définie comme dérivée du premier ordre, est la dérivée du deuxième ordre, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial^2 \ln N}{(\partial \ln \varepsilon)^2} = A. \quad [6]$$

La solution de cette équation s'écrit, par un choix adéquat des constantes d'intégration,

$$\ln \frac{N}{N_0} = \frac{1}{2} A \left(\ln \frac{\lambda}{\varepsilon} \right)^2. \quad [7]$$

L'échelle λ est ici définie comme celle de l'extremum de la parabole obtenue, et N_0 comme la valeur de N pour cet extremum. La dimension fractale effective, pour cette loi d'échelle généralisée, devient alors variable de manière linéaire en fonction du logarithme de l'échelle :

$$D_F = -\frac{\partial \ln N}{\partial \ln \varepsilon} = A \ln \frac{\lambda}{\varepsilon}. \quad [8]$$

Du fait de cette dépendance monotone entre la dimension fractale et la variable d'échelle logarithmique $\ln(\lambda/\varepsilon)$, il est dans ce cas possible de prendre comme variable principale la dimension fractale elle-même, que nous appellerons $D_F = \tau$ dans ce nouveau rôle. L'intérêt d'un tel renversement est qu'en analogie avec les lois du mouvement, τ est alors comme un « temps d'échelle » et $\ln(\lambda/\varepsilon)$ comme une « vitesse d'échelle ». On peut alors écrire une équation du deuxième ordre analogue à l'équation de la dynamique du mouvement :

$$\frac{\partial^2 \ln N}{\partial \tau^2} = \gamma. \quad [9]$$

La quantité γ est, par analogie, une sorte d'« accélération d'échelle ». La solution est parabolique,

$$\ln \frac{N}{N_0} = \frac{1}{2} \gamma \tau^2, \quad [10]$$

et sachant que $\tau = A \ln(\lambda/\varepsilon)$, on constate que les deux formes de cette équation du deuxième ordre et leurs solutions sont équivalentes, via la relation $A \times \gamma = 1$.

Cette contribution a pour but de comparer les données d'observation concernant le bassin versant du Gardon, dont une première analyse a déjà montré la variabilité de la dimension fractale, à ces modèles simples de dimension fractale variable : transition fractal / non-fractal et/ou accélération d'échelle.

2. Variation de la dimension fractale en fonction de l'altitude

Avant de passer à l'analyse de la variation en fonction de l'échelle des dimensions fractales des courbes de niveau mesurées sur le bassin versant du Gardon, puis à une

analyse couplée en échelle et position (altitude), nous allons tout d'abord reprendre l'analyse de leur simple dépendance en altitude et en tirer quelques conséquences.

2.1. Méthode de comptage de boîtes

La méthode d'analyse fractale utilisée est un comptage de boîtes. On compte le nombre de boîtes qui couvrent un ensemble de points (de dimension topologique $D_T = 0$) et l'on obtient, dans le cas d'une dimension fractale constante D_B , un nombre de points

$$N(r) = N_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^{D_B} \quad [11]$$

pour des boîtes de taille r que l'on fait varier.

Cette méthode ne distingue pas une poussière de points (de dimension topologique $D_T = 0$) d'une courbe (dimension topologique $D_T = 1$). Cependant, pour une courbe située dans un plan comme c'est le cas des courbes de niveau analysées ici, on s'attend à ce que $1 < D_B < 2$.

Néanmoins, la dimension fractale obtenue est en fait variable en fonction de l'échelle (cette variation a été appelée « courbure » par Ph. Martin (2004)). Cette définition devient alors insuffisante, et doit être redéfinie de manière locale.

La dimension fractale $D_B = 1$ correspond à une absence de structuration en échelles (non-fractalité) que l'on retrouve géomorphologiquement sur de vastes étendues dans la forme idéalisée de la plaine et bien plus localement dans les lambeaux de surface d'aplanissement (témoins d'un ancien état pénéplané, ici la surface anti-triasique) portés en altitude, et donc aux deux extrémités orographiques des reliefs (toutefois, ce dispositif géomorphologique n'est pas le seul possible).

2.2. Dimension fractale moyenne en fonction de l'altitude

Les analyses précédentes ont donné les résultats suivants (Martin 2006, 2007.b Fig. 3) :

$$D_B = -(9.26 \pm 0.74) \times 10^{-7} h^2 + (7.94 \pm 0.76) \times 10^{-4} h + (1.128 \pm 0.017), \quad [12]$$

et

$$D_{BA} = -(1.74 \pm 0.13) \times 10^{-6} h^2 + (1.59 \pm 0.13) \times 10^{-3} h + (1.166 \pm 0.029), \quad [13]$$

où h est l'altitude en m, D_B la dimension fractale « moyenne » définie sur la gamme d'échelles médiane, et D_{BA} la dimension fractale asymptotique aux petites échelles (géographiques). On a rajouté ici les barres d'erreur statistiques (correspondant à un écart-type 1σ) sur les paramètres de l'ajustement.²

2. Nous adoptons ici et dans tout l'article la notation en usage en physique où le séparateur des décimales est un point (9.26) et non une virgule (9,26).

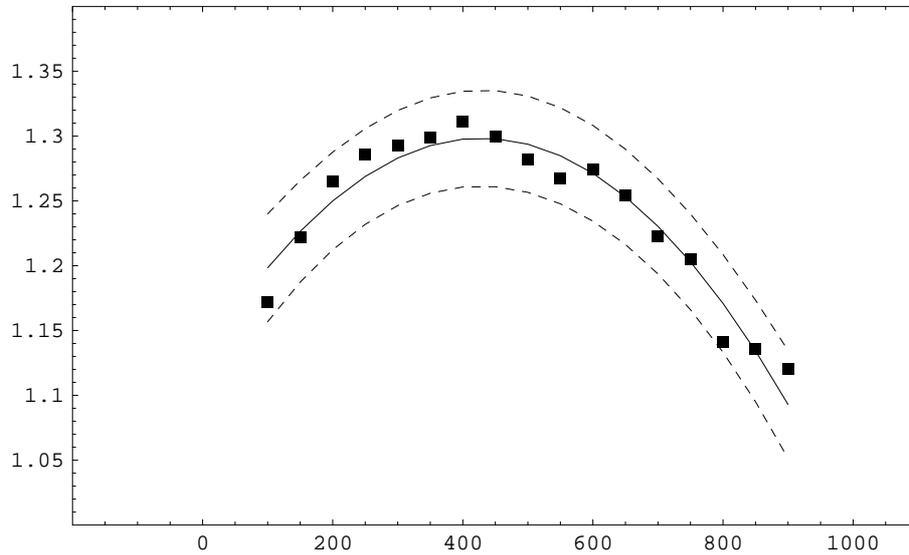


Figure 3. Comparaison des valeurs de D_B , mesurées sur des courbes de niveaux successives, à leur ajustement par une fonction parabolique $D_B(h)$. Les pointillés donnent l'intervalle de confiance à 95 % de l'ajustement.

2.3. Altitudes critiques

Avec ces valeurs, on trouve que

$$*D_B = 1 \text{ pour } h_1 = -(139 \pm 45) \text{ m et } h_2 = (996 \pm 41) \text{ m, et}$$

$$*D_{BA} = 1 \text{ pour } h_1 = -(94 \pm 42) \text{ m et } h_2 = (1008 \pm 39) \text{ m,}$$

où les barres d'erreur sont déterminées à partir de l'intervalle de confiance à 95 % (voir Fig. 3 et 4). Les valeurs de h_1 et h_2 sont donc égales pour D_B et D_{BA} aux barres d'erreur près.

On trouve finalement

$$h_1 = -(117 \pm 30) \text{ m, } h_2 = (1002 \pm 28) \text{ m.} \quad [14]$$

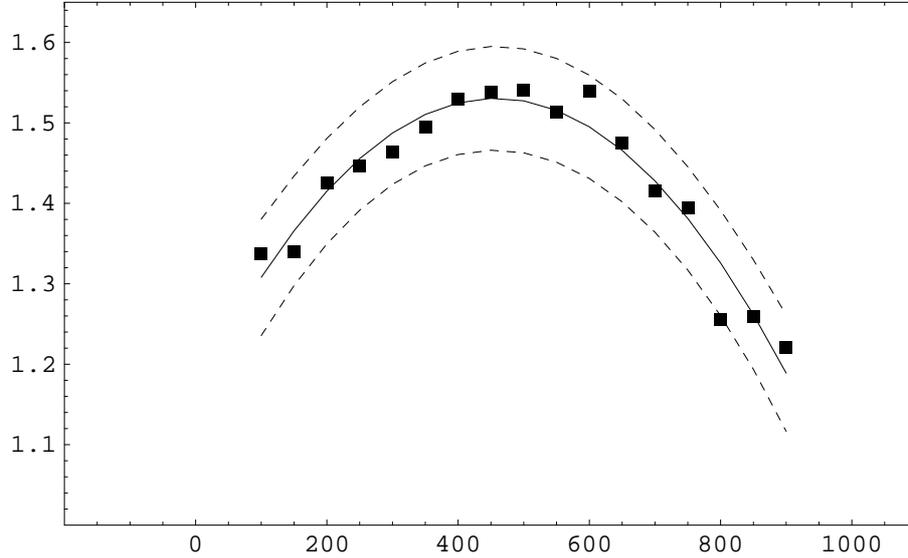


Figure 4. Comparaison des valeurs de D_{BA} , mesurées sur des courbes de niveau successives, à leur ajustement par une fonction parabolique $D_{BA}(h)$. Les pointillés donnent l'intervalle de confiance à 95 % de l'ajustement.

2.4. Compréhension théorique de la loi parabolique en h

À partir de ce fait, on peut « prévoir » deux des trois coefficients des courbes paraboliques ci-dessus et comprendre les relations entre leurs coefficients (ceux en h et h^2 sont dans un rapport 2 entre D_B et D_{BA}).

En effet, l'hypothèse de continuité, sous-jacente à l'hypothèse que la variation de $D(h)$ peut être décrite par une équation différentielle en fonction de h , et les deux contraintes $D = 1$ pour $h = h_1$ et $h = h_2$ conduisent à écrire

$$\tau(h) = D(h) - 1 = F(h)(h - h_1)(h - h_2). \quad [15]$$

Dans le cas le plus simple, $F(h) = -g/2 = \text{cste}$. On a alors un modèle du type « gravité », où

$$D(h) = -\frac{1}{2} g h^2 + g \left(\frac{h_1 + h_2}{2} \right) h + \left(1 - g \frac{h_1 h_2}{2} \right), \quad [16]$$

$$\frac{dD}{dh} = g \left(\frac{h_1 + h_2}{2} - h \right), \quad [17]$$

$$\frac{d^2 D}{dh^2} = -g, \quad [18]$$

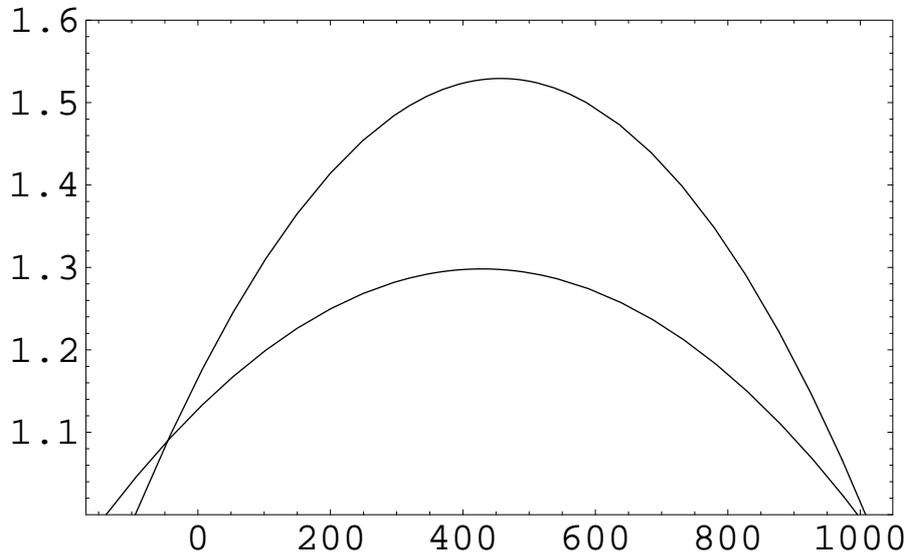


Figure 5. Ajustements de $D_B(h)$ et de $D_{BA}(h)$ extrapolés au-delà du domaine mesuré 100-900 m. La dimension $D_B = 1$ (non-fractalité) est obtenue pour des altitudes de -120 m et 1000 m (aux barres d'erreur près) dans les deux cas.

avec $h_1 = -120$ m et $h_2 = 1000$ m.

Une autre possibilité serait que l'altitude h_0 pour laquelle la dimension fractale est maximale puisse être déterminée par des arguments physiques et géographiques. On verra effectivement dans la suite que cette altitude (autour de 450 m) semble être un invariant indépendant de l'échelle pour l'ensemble des données. Dans ce cas la relation s'écrit

$$D(h) = D_{\max} - \frac{1}{2} g (h - h_0)^2 \quad [19]$$

Cette altitude a l'avantage d'être donnée par les coefficients en h et h^2 et de ne pas dépendre du coefficient constant. Ainsi, si $D(h) = a + b h + c h^2$, on a $h_0 = -b/2c$.

En fonction des trois paramètres physiques / géographiques h_0 , h_1 et D_{\max} , g est alors donné par :

$$g = \frac{2(D_{\max} - 1)}{(h_1 - h_0)^2}. \quad [20]$$

Le dernier coefficient manquant n'est pas déterminé pour le moment mais seulement mesuré. Une telle détermination serait envisageable s'il devenait possible, dans le futur, d'avoir une estimation des dimensions fractales maximales (en fonction des

caractéristiques des roches, de l'érosion, etc.). Une première estimation (provisoire) de ces dimensions fractales donne :

* $D_{B_{\max}} = 1.298$, à 429 m (ajustement) et 1.311 à 400 m (données);

* $D_{BA_{\max}} = 1.529$ à 457 m (ajustement) et 1.541 à 500m (données).

3. Variation de la dimension fractale pour $h = \text{cst}$

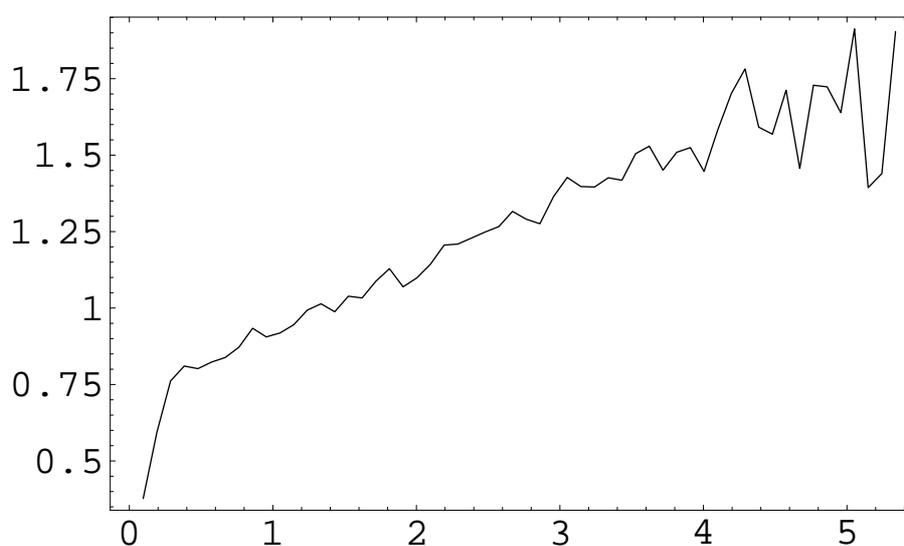


Figure 6. Exemple de variation de la dimension fractale locale $D_F = -d \ln N / d \ln r$ pour la courbe de niveau $h = 450$ m en fonction de $x = \ln r$ (où l'unité de la taille de boîte, correspondant à $x = 0$, est $r = 30$ m). Les valeurs de D_F inférieures à 1 pour $\ln r < 1.32$ (ce qui correspond à une taille de boîte $r \approx 100$ m, c'est-à-dire deux fois le pixel IGN) sont dues à un biais de petite taille.

Avant de passer à une analyse couplée de la variation de la dimension fractale en échelle et altitude, donnons un exemple de la manière dont elle varie en fonction de l'échelle seule pour une altitude donnée. Un tel exemple est donné en Fig. 6 pour la courbe de niveau d'altitude $h = 450$ m.

On voit que sa variation est forte en fonction de l'échelle et qu'aucune valeur constante n'est établie sur l'essentiel de l'intervalle d'échelle, sauf au-delà de $x \approx 4$, où une dimension asymptotique constante peut être définie, bien qu'à ces petites échelles géographiques les fluctuations deviennent néanmoins importantes. Les valeurs de la dimension fractale effective inférieures à 1 aux petites valeurs de r sont dues à un biais de petite taille de boîte : la courbe n'a en fait de sens qu'au-delà de

$x = \ln r = 1.32$, qui correspond à une taille de boîte $r \approx 100$ m, c'est-à-dire environ deux fois le pixel IGN. La dimension fractale atteint sa valeur minimale possible $D_F = 1$ pour cette échelle. Cependant, on peut montrer (par exemple par une analyse de données à meilleure résolution) que l'effet de ce biais se poursuit (en décroissant) au-delà de cette échelle. Les résultats obtenus ici n'ont donc rien de définitif en ce qui concerne les grandes échelles géographiques. Une analyse détaillée de ce biais sort du cadre du présent article et fera l'objet d'une publication future, ainsi que sa correction.

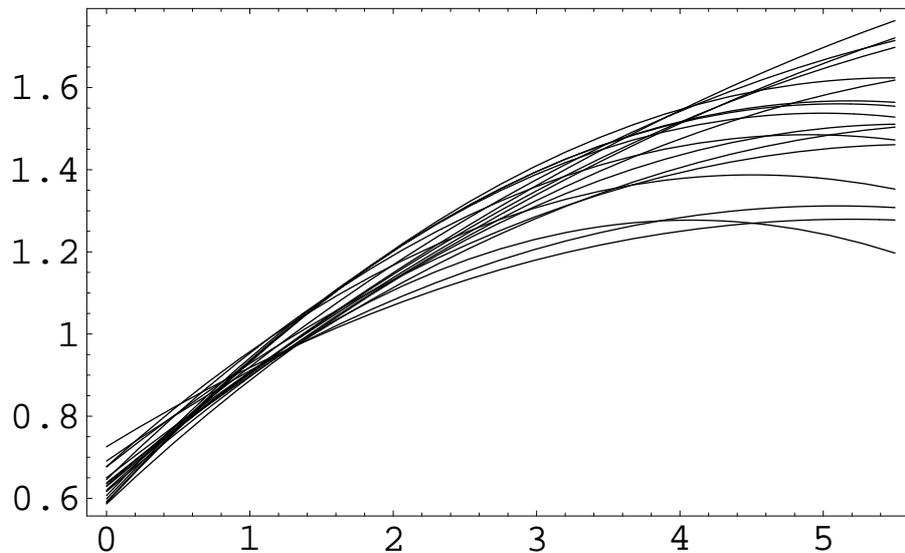


Figure 7. Courbes quadratiques donnant la variation de la dimension fractale en fonction de l'échelle $x = \ln r$ pour chacune des 17 courbes de niveau, de $h = 100$ m à $h = 900$ m (obtenues par ajustement de $\ln N(x)$ par un polynôme du 3^e ordre puis dérivation). Les unités sont telles que $x = \ln r = 0$ pour $r = 30$ m. Les valeurs de la dimension fractale obtenues aux grandes échelles géographiques sont sous-estimées en raison de l'existence d'un biais de petite taille de boîte (c'est la raison pour laquelle elles tombent artificiellement sous la valeur $D_F = 1$ pour $x < 1.4$).

On peut alors faire un ajustement quadratique de la dimension fractale variable en fonction de l'échelle pour chacune des 17 lignes de niveau séparées de 50 m, de $h = 100$ m à $h = 900$ m. Pour chaque valeur de h , on ajuste $\ln N(x)$ par un polynôme du 3^e ordre, puis on dérive pour obtenir la dimension fractale variable (qui est donc quadratique en x). Les courbes correspondantes sont données en Fig. 7.

On remarquera sur cette figure la variation systématique de la dimension fractale sur la plus grande partie de l'intervalle d'échelles, avec un écrasement sur les petites échelles géographiques (grandes échelles physiques) qui suggère l'existence d'une

dimension asymptotique (elle-même variable avec l'altitude, comme nous l'avons vu précédemment).

4. Analyse couplée en échelle et altitude : ajustement polynomial

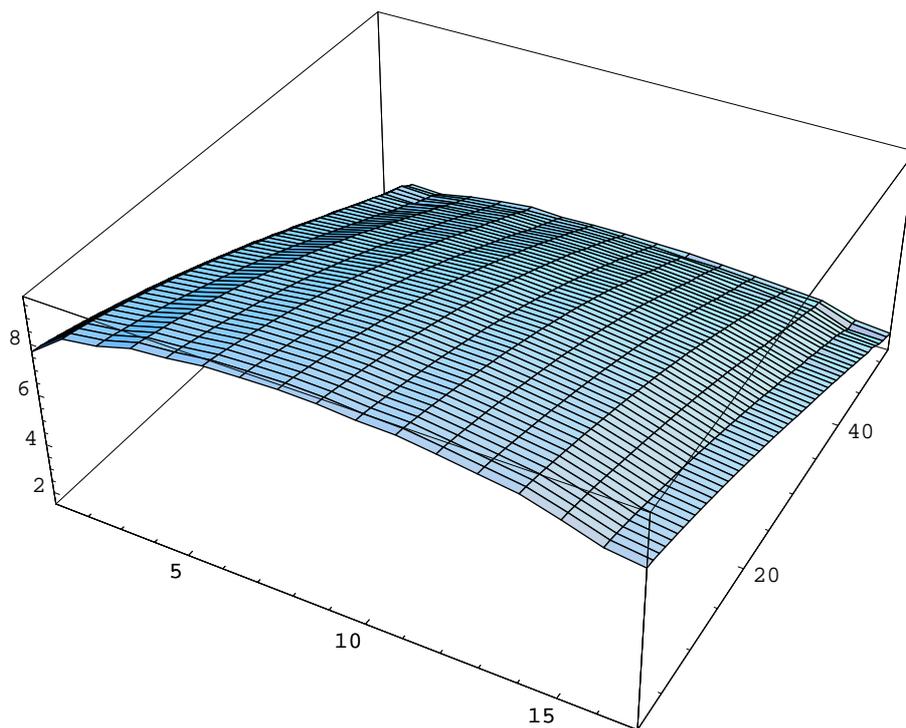


Figure 8. Valeurs mesurées de $\ln N$ en fonction de h (les valeurs indiquées sont celles de $(h/50 \text{ m}) - 1$, qui vaut de 1 à 17 pour $h = 100 \text{ m}$ à $h = 900 \text{ m}$) et de $x = \ln(r/30 \text{ m})$ (les valeurs indiquées sont celles de $10x$ pour $x = 0$ à $x = 5.2$). Les données ont été ré-échantillonnées pour obtenir une grille régulière en h et x . La dimension fractale est la dérivée partielle de cette fonction $\ln N(x, h)$ par rapport à x (au signe près, $D_F(x, h) = -\partial \ln N(x, h) / \partial x$). La dépendance parabolique en h est donc commune à $\ln N$ et D_F .

Pour tenter de rendre compte de la double variation de la dimension fractale, un ajustement polynomial des valeurs observées du compte du nombre de boîtes $\ln N(x, h)$ en fonction de l'échelle $x = \ln r$ et de l'altitude h a été effectué.

Il faut aller à un ordre important en $x = \ln r$, c'est-à-dire jusqu'à l'ordre 3 dans l'ajustement de $\ln N$, et faire intervenir des termes en x^3 , $x^3 h$ et

$x^3 h^2$ pour être à l'ordre 2 dans la dimension fractale qui en est la dérivée, $D_F(x, h) = -\partial \ln N(x, h) / \partial x$. On trouve en effet que les termes en $\{1, h, h^2, x, x^2, x^3, hx^3, h^2x^3, h^3, h^4, hx\}$ sont tous significatifs.

On obtient le résultat de la figure 9, où la dimension fractale ne dépend plus de h aux petites tailles de boîte, se déforme continument vers une dépendance parabolique et s'écrase aux grandes valeurs de x . Ce résultat apporte une nouvelle confirmation de l'existence d'une dimension asymptotique D_{BA} (Martin 2004).

La dimension fractale variable obtenue s'écrit :

$$D_F(x, h) = 0.679 - 0.1097 h + 0.3243 x - 0.04746 x^2 + 0.09616 h x^2 - 0.09943 h^2 x^2, \quad [21]$$

où h est en km ($h = 0.1$ à 0.9) et où, on le rappelle, x est non biaisé seulement au-delà de $x = 1.32$ ($r = 100$ m). Dans cet ajustement, sa variation est donc parabolique en h (voir Section 2) et en $x = \ln r$ (voir Section 3).

5. Analyse couplée en échelle et altitude : transition fractal / non-fractal

L'analyse précédente met bien en évidence la double variation de la dimension fractale, parabolique en h et croissante en $x = \ln r$ vers une éventuelle dimension asymptotique, mais ne permet pas de trancher entre un effet de transition fractal / non-fractal ou un effet d'« accélération d'échelle ». Les ajustements polynomiaux utilisés jusqu'à maintenant présupposent une interprétation plutôt du type « dynamique d'échelle » de la variation en fonction de l'échelle, mais celle-ci doit pouvoir être mise à l'épreuve, ce qui va maintenant être fait.

Un inconvénient des données d'origines est qu'elles ont régulièrement espacées en h mais pas en $x = \ln r$. Elles ont alors été interpolées de manière à obtenir une grille régulière également en $\ln r$ (de 0.1 à 5.2 par intervalles de 0.1). Ceci permet de faire des coupes en $\ln r = \text{cst}$, et d'étudier la dépendance en h dans chacune de ces coupes et sa variation d'une échelle à la suivante. On constate (Fig. 8 et 10) que la dépendance parabolique de $\ln N$ en fonction de h se maintient quelle que soit l'échelle, d'une manière remarquablement stable. Ce résultat corrige et améliore l'ajustement provisoire obtenu en Fig. 9, dans lequel celle-ci semblait disparaître aux grandes échelles géographiques (petites valeurs de $x = \ln r$).

Ces 52 courbes ont été ajustées individuellement par des paraboles en h ,

$$\ln N(h) = a(x_i) + b(x_i)h + c(x_i)h^2, \quad [22]$$

pour $x_i = 0.1$ à 5.2 , par intervalle de 0.1. Les 52 ajustements ont fourni des valeurs numériques pour les trois coefficients $a(x)$, $b(x)$ et $c(x)$. La variation observée de ces valeurs en fonction de $x = \ln r$ est donnée Fig. 11.

Le résultat est remarquable :

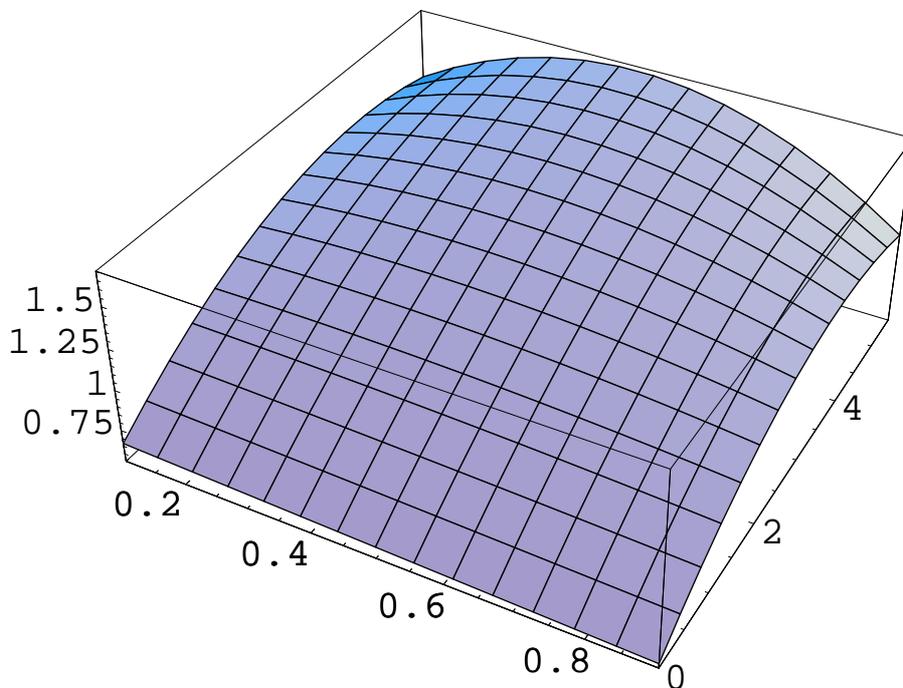


Figure 9. Ajustement de la dimension fractale en fonction de l'altitude h (en km, qui varie de 0.1 à 0.9) et de l'échelle $x = \ln r$, qui varie de 0 (correspondant à $r = 30$ m) à 5.5 (correspondant à $r = 7.34$ km). La loi représentée s'écrit : $D_F(x, h) = 0.679 - 0.1097 h + 0.3243 x - 0.04746 x^2 + 0.09616 h x^2 - 0.09943 h^2 x^2$. Elle est obtenue par ajustement des données $\ln N(x, h)$ (voir Fig. 8) par un polynôme de degré élevé (voir texte) et dérivation. Les valeurs obtenues aux grandes échelles géographiques sont sous-estimées car affectées par un biais de petite taille qui n'a pas été corrigé ici.

- Le coefficient $a(x)$ varie régulièrement en fonction de l'échelle $x = \ln r$, ce qui justifie pour lui les ajustements polynomiaux précédents. Un ajustement de $a(x)$ à l'ordre 3 donne :

$$a(x) = 7.215(11) - 0.674(17)x - 0.173(7)x^2 + 0.0171(9)x^3 \quad (R^2 = 0.9999) \quad [23]$$

- Mais il n'en est pas de même des deux coefficients $b(x)$ et $c(x)$ respectivement en facteur de h et h^2 . Leur variation est typique d'un régime de transition fractal / non-fractal. Ils montrent en effet deux régimes très clairs, l'un constant, donc indépendant de l'échelle, de $x = 1.32$ à ≈ 2.5 (l'intervalle 0 à 1.32 est exclu de l'analyse car

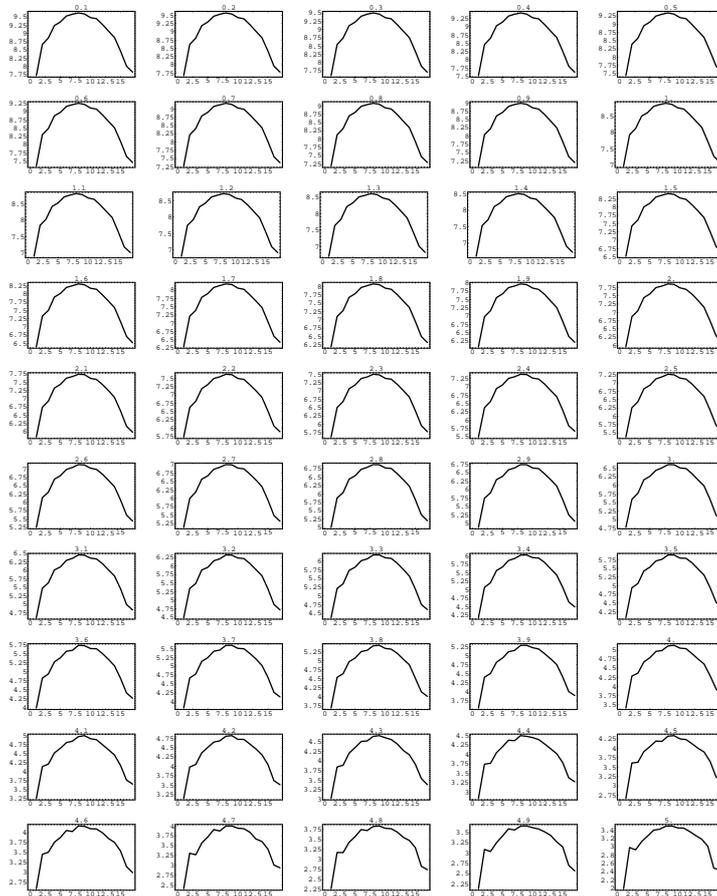


Figure 10. Valeurs de $\ln N$ en fonction de h pour $x = \ln r = 0.1$ à 5 (coupes en x de la figure 8). L'altitude h est repérée par un indice j qui varie de 1 à 17 pour $h = 100$ à 900 m par incrément de 50 m (i.e., $h = 50(j + 1)$ mètres). Le caractère parabolique de la variation de $\ln N$ en fonction de l'altitude h , quelle que soit l'échelle, apparaît clairement sur cette figure, où l'amplitude de la variation a été renormalisée (la parabole s'écrase en fait aux petites échelles géographiques, voir Fig. 8).

biaisé, comme on l'a déjà fait remarquer), l'autre linéaire, donc correspondant à une dimension fractale constante, de $x \approx 3.5$ à 5.2 , avec une transition continue qui les relie.

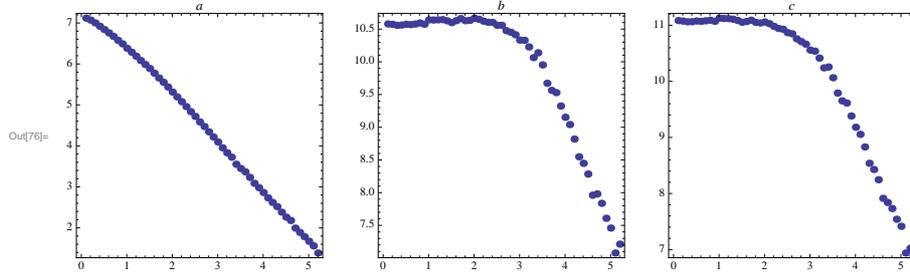


Figure 11. Variation en fonction de $\ln(r/30 \text{ m}) = 0.1$ à 5.2 des trois coefficients de l'ajustement parabolique de $\ln N(h)$. Les barres d'erreur sur chaque point sont à peu près constantes et valent respectivement $0.13(a)$, $0.58(b)$ et $0.57(c)$.

5.1. Étude séparée des deux régimes

5.1.1. Grandes échelles géographiques : $\ln r = 0$ à 2

Dans cette zone, la dimension fractale ne dépend que du coefficient a car les coefficients b et c sont constants. Elle est donc quasi indépendante de h , ce qui est logique géomorphologiquement puisque, à ces échelles correspondant à des objets et des processus très locaux, la dynamique fondamentale n'est plus la glyptogenèse qui varie en fonction de l'altitude, mais un ensemble de processus d'altération sur versants qui varient en fonction de la lithologie, de l'exposition, du couvert végétal, etc., autant de facteurs qui sont dans le cas du haut bassin du Gardon assez semblables de bas en haut.

La dimension fractale prend une valeur moyenne $D_F = 1$ dans cette zone :

$$\ln r = 0.1 - 2.2 : D_F = 0.986 \pm 0.016$$

$$\ln r = 0.5 - 1.9 : D_F = 1.005 \pm 0.011$$

Ceci est en accord avec le fait que le pixel réel (IGN) est en $x = \ln r = 0.51$ ($r = 50 \text{ m}$) et que la définition d'une dimension locale correcte nécessite un intervalle de lissage de l'ordre de $\Delta \ln r \approx 2 \times 0.8$. Ceci rend compte partiellement du fait que la dimension fractale locale prend sa valeur minimale 1 (i.e., non fractal) en $x = \ln r = 1.3$ ($r \approx 100 \text{ m}$). On obtient dans cette zone :

$$\ln N = (7.37 \pm 0.13) - (1.00 \pm 0.02) x + (10.60 \pm 0.12) h - (11.10 \pm 0.12) h^2, \quad [24]$$

$$D_F = 1.00 \pm 0.02. \quad [25]$$

Mais ces résultats restent soumis à caution tant que le biais de petite taille n'est pas pleinement corrigé. Cette correction conduit en fait à une transition graduelle vers $D_F \approx 1$ (Nottale et al, en préparation).

Le pic de cette relation parabolique est en $h_0 = 477$ m. Cette valeur décrit une géométrie globale du bassin versant (qui peut être liée à une courbure au sens géométrique du terme, mais aussi à ses limites) indépendante de la fractalité (puisque $D_F = 1$, ce qui correspond bien à une indépendance d'échelle).

5.1.2. Petites échelles géographiques : $\ln r = 3.1$ à 5.2

Dans cette zone le comportement des trois coefficients est linéaire avec une bonne approximation (Fig. 11 et 12), on obtient sur l'intervalle 3.1-5.2 :

$$\ln N = [(7.679 \pm 0.026) - (1.204 \pm 0.006) x] + [26] \\ + [(15.46 \pm 0.15) - (1.599 \pm 0.036) x] h - [(16.17 \pm 0.14) - (1.764 \pm 0.034) x] h^2$$

c'est-à-dire

$$\ln N = (7.679 + 15.464 h - 16.170 h^2) - (1.204 + 1.599 h - 1.764 h^2) x \quad [27]$$

Pour la partie indépendante d'échelle de cette relation (géométrie globale), on obtient un pic en $h_0 = 478$ m, en tout point identique à celui du régime non fractal des grandes échelles géographiques. Cette géométrie globale sous-jacente est un invariant indépendant de l'échelle (valable pour toutes les échelles).

À cette approximation près, on a une dimension fractale constante en fonction de l'échelle dans cette zone de petites échelles géographiques, mais dépendante de h . Ces résultats valident complètement l'introduction d'une dimension fractale asymptotique par Ph. Martin (2004). On trouve :

$$D_A = (1.204 \pm 0.006) + (1.599 \pm 0.036) h - (1.764 \pm .034) h^2, \quad [28]$$

que l'on peut factoriser sous la forme :

$$D_A = 1 + 1.764(h + 0.113)(1.020 - h). \quad [29]$$

où h est en km.

Ce résultat est remarquable, car il confirme ceux obtenus sur D_B et D_{BA} : les altitudes pour lesquelles $D = 1$ sont (-113 ± 4) m et (1020 ± 27) m. L'altitude du maximum est $h_0 = 453$ m. On obtient les mêmes résultats aux barres d'erreur près en prenant un intervalle plus restreint $x = \ln r = 3.4-5.2$.

Pour $h_0 = 453$ m, la relation ci-dessus pour la dimension fractale asymptotique donne une valeur maximale $D_A = 1.57$, en excellent accord avec les estimations obtenues dans des publications précédentes (Martin 2007.b).

En ce qui concerne le terme indépendant de $x = \ln r$ dans $\ln N$, il est également parabolique et pourrait décrire une forme globale indépendamment de l'échelle. On notera que les trois relations paraboliques obtenues dans les deux régimes culminent respectivement en des valeurs proches de l'altitude du maximum, $h_0 = 477$ m, 478 m (géométrie globale) et 453 m (dimension fractale), en accord avec la Figure 10 qui montre que h_0 ne dépend pas (ou peu) de l'échelle.

5.2. Ajustement global par une loi de transition « relative d'échelle »

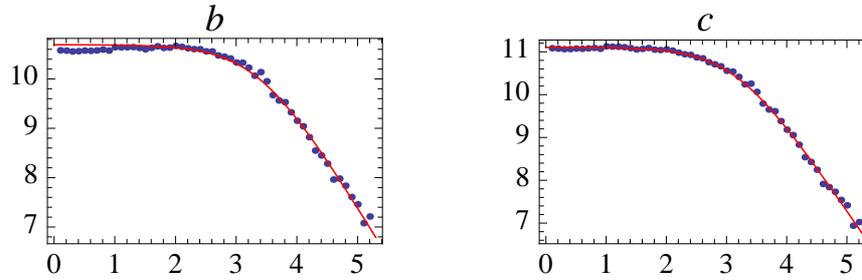


Figure 12. Ajustement par moindres carrés d'une loi de transition fractal / non-fractal (voir texte) sur les deux coefficients $b(x)$ (gauche) et $-c(x)$ (droite) de la loi $\ln N = a(x) + b(x)h + c(x)h^2$.

La théorie de la relativité d'échelle peut maintenant être utilisée pour franchir un pas supplémentaire et comparer l'ensemble de la variation des coefficients $b(x)$ et $c(x)$ aux types de lois d'échelle qu'elle obtient comme solutions d'équations différentielles d'échelle. Ce ne sont alors plus seulement les comportements asymptotiques de grande et petite échelle qu'on va éprouver, mais l'ensemble des échelles et en particulier l'intervalle d'échelle (qui est le plus étendu) sur lequel se produit la transition fractal / non-fractal.

Nous avons vu dans l'introduction qu'une telle transition est décrite simplement, dans le cas où la dépendance d'échelle est obtenue vers les petites valeurs de $x = \ln r$, par une équation différentielle du type $\partial y / \partial \ln r = a + by$. Le cas, manifesté ici, d'une transition inverse vers la fractalité aux grandes valeurs de x (petites échelles géographiques, i.e. grandes échelles physiques) s'en déduit aisément par une simple inversion $y \rightarrow 1/y$, ce qui correspond à l'élément symétrique (opposé) en logarithme, c'est-à-dire à la transformation $\ln y \rightarrow -\ln y$.

Ceci nous amène finalement à tenter, pour les coefficients $b(x)$ et $c(x)$, un ajustement par une loi de transition fractal / non-fractal du type

$$\ln \frac{y}{y_0} = -\ln \left\{ 1 + \left(\frac{r}{r_0} \right)^\alpha \right\} \quad [30]$$

c'est-à-dire, avec $x = \ln r$,

$$\ln y = \ln y_0 - \ln \left(1 + e^{\alpha(x-x_0)} \right). \quad [31]$$

Une telle loi décrit bien une transition d'un régime fractal aux grandes échelles physiques (petites échelles géographiques) vers une indépendance d'échelle aux petites

échelles physiques. En effet, quand $r \gg r_0$, on a $(r/r_0)^\alpha \gg 1$ et la loi ci-dessus s'écrit $y = y_1 r^{-\alpha}$, alors que quand $r \ll r_0$, on a $(r/r_0)^\alpha \ll 1$ et donc $y = y_0$.

Appliquée aux coefficients de la loi parabolique $b(x)$ (en h) et $c(x)$ (en h^2), on obtient deux ajustements (par moindres carrés) très hautement statistiquement significatifs (voir Fig. 12) :

$$b(x) = 10.693 - \ln\{1 + e^{2.023(x-3.381)}\}, \quad (\rho = 0.9980, t_{st} = 103.6), \quad [32]$$

$$c(x) = -11.106 + \ln\{1 + e^{2.071(x-3.162)}\}, \quad (\rho = 0.9990, t_{st} = 163.2). \quad [33]$$

Les exposants α obtenus (qui ne sont pas ici des dimensions fractales, puisqu'ils ne caractérisent qu'une partie de la contribution) sont proches l'un de l'autre (et de la valeur critique 2). Les échelles de transition qui résultent de cet ajustement sont également proches sur les deux coefficients ($x = 3.16$, qui correspond à $r \sim 630$ m et $x = 3.38$, qui correspond à $r \sim 780$ m).

5.3. Ajustement global par une loi de transition : analyse complémentaire

L'ajustement ci-dessus est incomplet, car on a présupposé un coefficient 1 devant le terme en logarithme. Plutôt que d'ajuster séparément les deux coefficients $b(x)$ et $c(x)$, il peut être plus intéressant d'utiliser (en la validant) la quasi-invariance de l'altitude du maximum. On a vu en effet qu'on pouvait écrire une loi parabolique sous la forme

$$\ln N = a(x) + b(x)h + c(x)h^2 = c(x) [h - h_0(x)]^2 + d(x) \quad [34]$$

avec

$$h_0(x) = -\frac{b(x)}{2c(x)}, \quad d(x) = a(x) - \frac{b(x)^2}{4c(x)}. \quad [35]$$

L'avantage de cette approche est que les deux coefficients sont alors soumis à la même loi de transition (ce que suggère leur similitude sur les figures).

La figure 13 donne les valeurs de h_0 en fonction de $x = \ln r$. Ce résultat confirme sa quasi-invariance : $h_0(x)$ varie continument sur l'intervalle d'échelle $x = 0$ à 5.2 de moins de 40 m (entre 477 m et 513 m), avec une moyenne $\langle h_0 \rangle = 489$ m. Un ajustement quadratique de cette variation donne (en km) :

$$h_0(x) = (0.4773 \pm 0.0003) + (0.00126 \pm 0.00002) x^2. \quad [36]$$

Noter qu'une interprétation plus correcte de cette variation pourrait être une variation linéaire à partir du pixel minimal effectif 100 m ($\ln r = 1.32$) pour lequel $D = 1$ et une valeur constante pour les valeurs plus petites de $\ln r$ (qui ne représentent pas en fait de l'information nouvelle). Les écarts entre ces deux interprétations sont négligeables.

On peut alors comparer la fonction

$$b(x) = -2 h_0(x) c(x) = (0.9546 + 0.00252 x^2)(-11.106 + \ln\{1 + \exp[2.071(x-3.162)]\}) \quad [37]$$

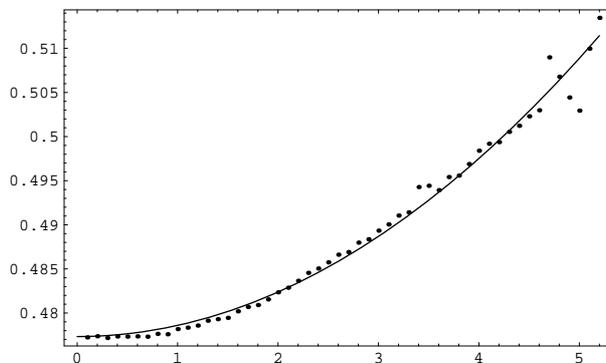


Figure 13. Variation de l'altitude h_0 (de 475 à 510 m) du maximum de $\ln N$, en fonction de l'échelle $x = \ln r$ et ajustement de cette variation par une loi quadratique.

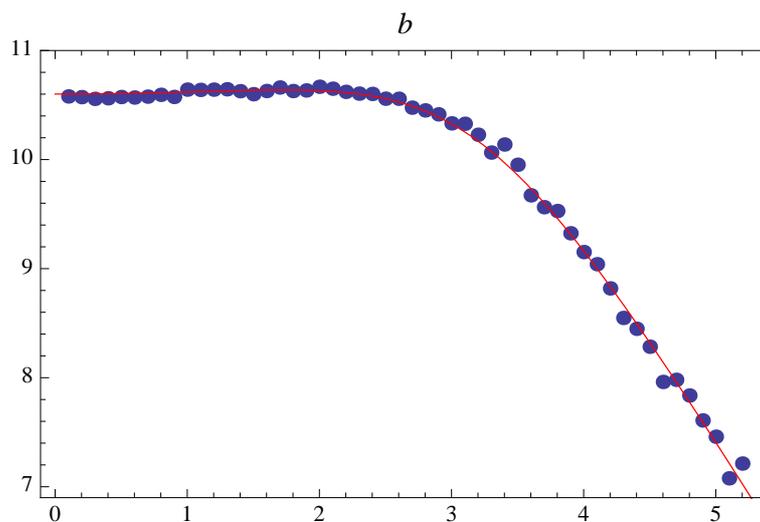


Figure 14. Ajustement du coefficient $b(x)$ déduit de la loi de transition établie pour le coefficient $c(x)$ (voir texte).

aux données. On obtient la figure 14. On constate que l'accord est devenu meilleur que par l'ajustement direct, en particulier aux petits $\ln r$ où la nouvelle fonction prévoit une légère croissance effectivement observée.

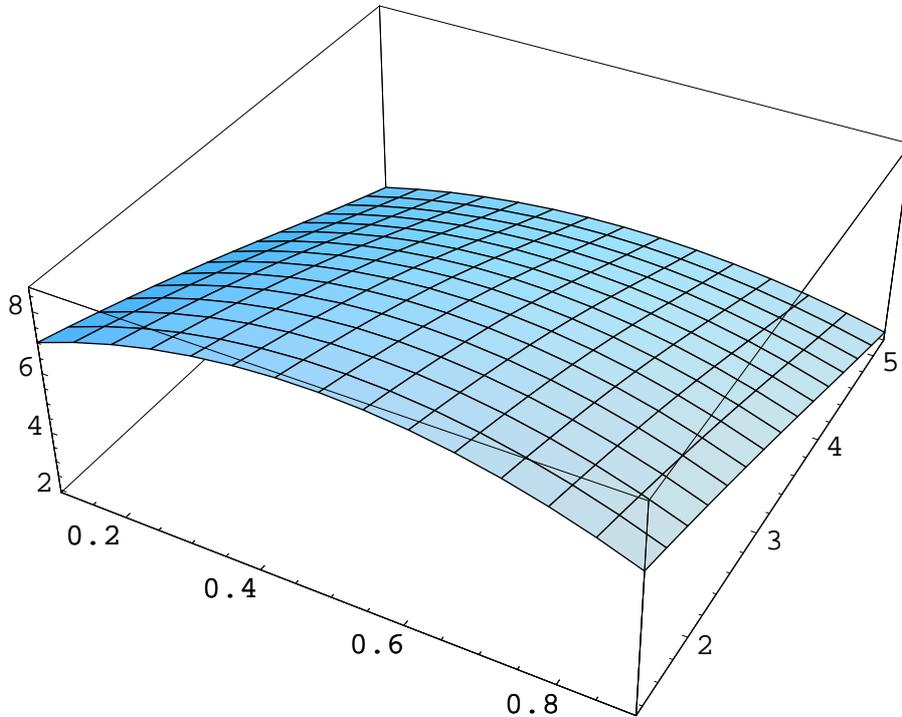


Figure 15. Tracé du modèle de transition fractal / non-fractal ajusté (Eq. 38) sur $\ln N(h, x)$, où h varie de 0.1 à 0.9 km et $x = \ln r$ de 1.32 ($r = 110$ m) à 5.2 ($r = 5.44$ km). À comparer aux résultats de mesures de la figure 8.

La relation $\ln N(x, h)$ est donc maintenant bien ajustée par la fonction :

$$\ln N(x, h) = (7.215 - 0.674x - 0.173x^2 + 0.0171x^3) + (\ln\{1 + \exp[2.071(x - 3.162)]\} - 11.106)h(h - 0.9546 - 0.00252x^2). \quad [38]$$

Elle est tracée en Fig. 15 et se compare favorablement aux données d'origine (Fig. 8).

La dimension fractale est ensuite donnée par la dérivée partielle de cette fonction, $D_F = -\partial \ln N(x, h) / \partial x$. Elle est tracée Fig. 16 et peut être comparée au modèle polynomial de la figure 9. On constate une amélioration aux grandes valeurs de $x = \ln r$, le nouveau modèle rendant mieux compte de l'existence d'une dimension fractale constante asymptotique.

Cette loi peut paraître très complexe, mais elle est formée, comme on l'a vu, de divers éléments pour lesquels on peut individuellement envisager une explication :

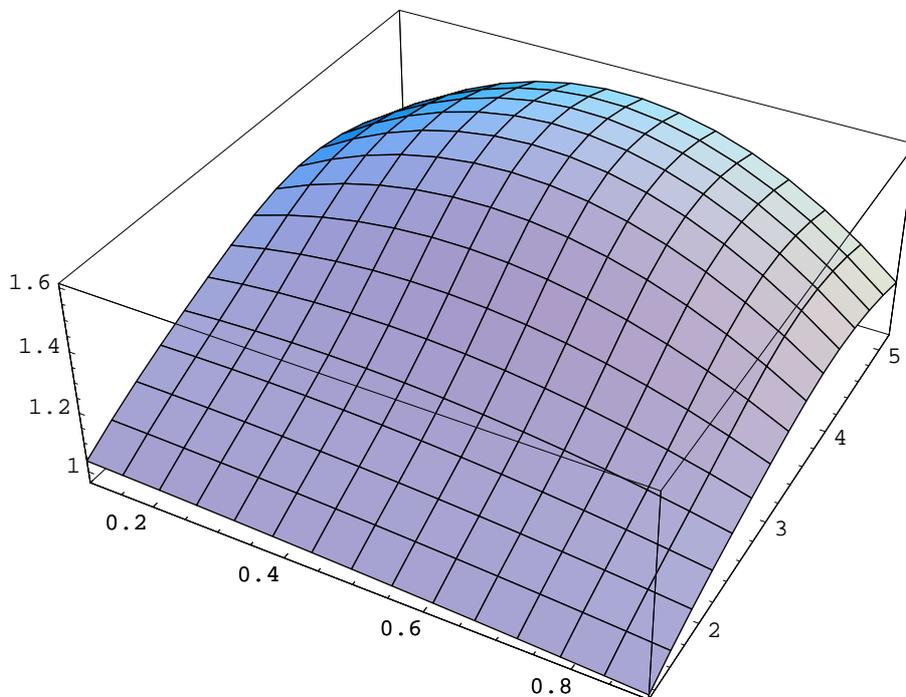


Figure 16. *Tracé de la dimension fractale effective $D_F(x, h)$ où h varie de 0.1 à 0.9 km et $x = \ln r$ de 1.32 ($r = 110$ m) à 5.2 ($r = 5.44$ km), obtenue comme dérivée de l'ajustement de $\ln N(x, h)$ par un modèle de transition fractal / non-fractal. À comparer à la figure 9. Le biais de petite taille de boîte n'est pas pleinement corrigé, si bien que les dimensions fractales restent sous-estimées aux grandes échelles géographiques.*

- une contribution polynomiale à la variation de la dimension fractale en fonction de l'échelle, obtenue en dérivant le premier terme $a(x)$ de $\ln N(x, h)$. On obtient : $0.674 + 0.346x - 0.0513x^2$. Cette contribution montre une variation totale de ~ 0.2 , passant de 1.04 en $x = \ln r = 1.32$ ($r = 110$ m) à un maximum de 1.26, atteint pour $x = 3.37$ (ce qui est proche de l'échelle de transition fractal / non-fractal sur les autres coefficients). Elle suggère l'existence d'une composante de « dynamique d'échelle » qui s'ajoute à la transition fractal / non-fractal (entre dépendance et indépendance d'échelle). Néanmoins une analyse plus poussée reste nécessaire pour trancher ce point, en particulier en ce qui concerne le terme quadratique $-0.0513x^2$ qui décrit une légère décroissance de la dimension fractale aux tailles de boîte maximales (apparente sur la Fig. 16). Celle-ci est vraisemblablement due à un biais de fenêtrage précisément lié à cette taille maximale accessible (celle du bassin versant du Gardon)

comme semblent l'indiquer des simulations faites dans les mêmes conditions sur des modèles d'objets fractals mathématiques (Nottale, en préparation).

- une loi d'échelle asymptotique en loi de puissance avec un exposant $\alpha \approx 2$ pour les grandes valeurs de $x = \ln r$.

- une transition entre cette loi fractale à dimension constante et une indépendance d'échelle aux petites valeurs de $x = \ln r$. L'échelle centrale de cette transition correspond à une taille de boîte $r_0 = 0.63$ km. La loi de transition est donnée, à une constante près, par la relation

$$c(x) = \ln \left\{ 1 + \left(\frac{r}{0.63} \right)^{2.07} \right\}. \quad [39]$$

- une dépendance en h donnée par $h(h - 2h_0) + f(x)$ dépendant d'une fonction $h_0(x)$ qui varie relativement peu (de 475 à 510 m).

5.4. Compatibilité des deux ajustements

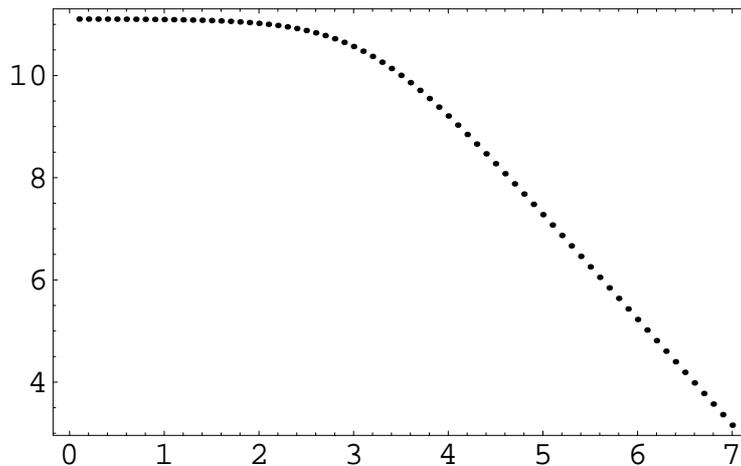


Figure 17. Variation attendue en fonction de l'échelle $x = \ln r$ du coefficient $c(x)$ dans le cas d'une loi de transition fractal-non fractal. Le tracé a été poussé jusqu'à $x = 7$ de manière à mettre en évidence le petit écart résiduel de pente entre la zone accessible dans les données réelles (jusqu'à $x = 5.2$, ce qui correspond à une taille de boîte maximale $r \approx 5.44$ km) et la pente asymptotique constante (ici, de valeur -2.07).

Il reste à résoudre un problème d'inconsistance apparente entre les ajustements. En effet, l'ajustement linéaire asymptotique (pour $x = 3.1 - 5.2$) a fourni une contribution

à la dimension fractale asymptotique de pente $-(1.76 \pm 0.03)$ dans le terme en h^2 , alors que dans l'ajustement global, après développement, ce coefficient vaut -2.07 .

La solution à ce problème est donnée Figure 17, où on a poussé jusqu'à $x = 7$ le tracé de la loi ajustant $c(x)$ avec $\alpha = 2.07$ (en utilisant le même écart $\Delta \ln r = 0.1$ entre les points que pour les données). On y constate que la zone $x = 3.1-5.2$ est encore partiellement dans la transition et n'a pas atteint en fait le régime asymptotique de dimension fractale constante. On trouve pour cette zone un ajustement linéaire

$$-c(x) = (16.13 \pm 0.13) - (1.755 \pm 0.031) x, \quad [40]$$

ce qui signifie qu'on retrouve exactement la pente 1.76 de l'ajustement linéaire des données dans cette zone. Cette valeur n'est donc pas une vraie valeur asymptotique, mais une valeur intermédiaire. On s'en assure en faisant un ajustement dans la zone 5.3-7.0, ce qui donne

$$-c(x) = (17.615 \pm 0.004) - (2.0651 \pm 0.0007) x \quad [41]$$

où on obtient bien maintenant une valeur proche de 2.07. On retrouve une nouvelle fois un problème lié aux limitations de l'intervalle d'échelles disponible : il faudrait une échelle maximale environ 4 fois plus grande (ce qui correspondrait à environ 20 km) pour visualiser la valeur asymptotique des coefficients $b(x)$ et $c(x)$.

Cependant, en ce qui concerne la valeur de la dimension fractale asymptotique elle-même, celle-ci résulte d'une combinaison des différents coefficients et reste relativement peu affectée par ce petit écart : la valeur maximale $D_{FA} = 1.59 \pm 0.03$ (atteinte pour $h = 450-500$ m) se trouve donc confirmée (voir figure 16).

6. Conclusion et prospective

En conclusion, la présente analyse confirme et précise le comportement fractal généralisé obtenu précédemment sur le bassin versant du Gardon (Martin 2006, 2007.b, Martin et al. 2008). La dimension fractale y est fortement variable, aussi bien en fonction de l'altitude que de l'échelle elle-même.

La variation de la dimension fractale en fonction de l'altitude est systématiquement parabolique, ce qui s'explique aisément par la double contrainte $D_F = 1$ (relief lisse, non fractal) aux basses altitudes (niveau régressif de la Méditerranée au Wurm à environ -120 m) et au sommet (autour de 1000 m). Deux des trois coefficients de cette relation parabolique peuvent donc être « prédits » par cette approche.

La variation de la dimension fractale en fonction de l'échelle est très bien ajustée par un modèle de transition fractal / non-fractal obtenu comme solution d'une équation différentielle d'échelle dans le cadre de la théorie de la relativité d'échelle.

Certains problèmes de biais liés à la nature des données et à la méthode d'analyse (comptage de boîtes) ont été considérés mais n'ont été que partiellement résolus. Une dimension fractale artificiellement inférieure à 1 (ce qui est interdit pour une courbe,

dont la dimension topologique est 1) est obtenue pour les petites valeurs de $x = \ln r$. Ce biais a été partiellement corrigé en ne prenant en compte que les échelles supérieures à $\ln r = 1.32$, ce qui correspond à environ 100 m, soit 2 fois la taille du pixel IGN sur les données utilisées. Une analyse plus détaillée et une correction de ce biais fera l'objet d'un travail futur.

La croissance de la dimension fractale observée au-delà de cette limite est réelle. Par contre il manque des données de grandes échelles géographiques ($r < 100$ m) pour étudier de quelle manière se produit la transition vers $D_F = 1$. Une étude à venir utilisant des données à la résolution de 1 m et prenant en compte la correction du biais de petite taille de boîte permettra de trancher ce point.

L'écrasement de la variation de la dimension fractale aux grands $\ln r$ dans les données du Gardon a été confirmé comme réel. Le modèle de transition fractal / non-fractal en rend compte en montrant que l'essentiel de la variation observée semble n'être rien d'autre que la transition continue vers un régime asymptotique (aux petites échelles géographiques) de dimension fractale constante. Le problème est que l'intervalle d'échelles sur lequel cette dimension constante est établie est assez étroit, étant limité par la taille maximale du bassin versant lui-même. Ce problème ne peut être dépassé dans ce cas, mais pourra l'être dans des études futures de reliefs plus étendus.

La légère re-décroissance de la dimension fractale aux plus grands $\ln r$ accessibles est vraisemblablement un biais, conséquence précisément de cet effet de fenêtre de petite échelle géographique (ou grandes échelles physiques).

Dans des travaux à venir, cette étude sera complétée par une détermination directe de la dimension fractale à partir des données – alors que dans la présente contribution, elle est déduite par dérivation de l'ajustement du comptage $\ln N(x, h)$. Une des questions en suspens qui sera alors abordée est celle de la détermination précise de la dimension fractale asymptotique maximale et de son éventuelle compréhension théorique. Elle est atteinte sur la CN450 pour laquelle on obtient $D_A = 1.584 \pm 0.010$ et la CN500 sur laquelle $D_A = 1.589 \pm 0.007$, en accord avec les autres déterminations. Une conjecture probable, pour laquelle plusieurs justifications seront apportées dans une prochaine publication, est qu'elle soit donnée par $D_F = \ln 3 / \ln 2 = 1.585$. Avec la détermination de cette valeur, les trois coefficients de la courbe parabolique qui décrit la variation de la dimension fractale asymptotique en fonction de l'altitude seront alors fixés.

De nombreuses autres études sont à envisager pour aller plus loin : relation au réseau hydrographique (Forriez et al., à paraître), déduction de ce réseau comme géodésiques de l'espace bidimensionnel, courbe et fractal qu'est un bassin versant, relation entre la courbure globale et les structures fractales, sachant que la fractalité d'un espace peut être décrite comme une courbure multi-échelle (Nottale 1993), calibration du comptage de boîte en dimension variable sur des modèles mathématiques d'objets fractals de propriétés connues, etc.

Sur le plan géographique, ce texte ouvre la voie à une géomorphologie théorique fondée sur la géométrie fractale qui est fondamentalement celle de la nature (Mandelbrot, 1975, 1982).

Tout en confirmant bien que le bassin versant est l'unité géographique conceptuelle qu'il faut considérer dans ce type d'analyse en raison de sa dimension fonctionnelle et des dynamiques morphogénétiques dont il est le siège, les paramètres identifiés montrent que certains d'entre eux peuvent avoir des valeurs qui dépendent (partiellement ?) des conditions énergétiques (élévation, masse d'eau), lithologiques (signature morphologique des roches) voire climatiques (formes climatiques) alors que l'organisation structurelle (transition fractal / non-fractal, variation parabolique des valeurs des dimensions fractales de haut en bas, etc.) est vraisemblablement invariante. Cela définissant *de facto* un programme de recherches.

7. Bibliographie

- Forriez M. et Martin Ph., Nottale, à paraître, Comparaison entre la classification de Horton et la classification ascendante hiérarchique des confluences (C.H.A.C.). Application au bassin amont du Gardon (Gard, France), 11 p. [accepté, en cours d'édition aux Presses Universitaires de Rennes]
- Mandelbrot B., 1975, *Les Objets Fractals*, Flammarion, Paris, 268 p.
- Mandelbrot B., 1982, *The fractal geometry of nature*, Freeman, San Francisco, 468 p.
- Martin Ph., 2000.a, Quelle est la dimension du massif karstique de la Sainte Baume ? Eléments pour une théorie spatiale et fractale du karst. *Karstologia*, n°35, p.13-26.
- Martin Ph., 2000.b, Forme et rugosité des surfaces karstiques. Conséquences pour une théorie spatiale et fractale de l'interface terrestre. *Karstologia*, n°36, p.1-16.
- Martin Ph., 2004, *Modélisation fractale et structurelle des formes en géographie. Réflexion développée à partir d'exemples karstiques*. Habilitation à diriger les recherches. Université d'Avignon et des Pays du Vaucluse, tome 1, 173 p., tome 2, 314 p., tome 3, 176 p., 1 carte coul. ht.
- Martin Ph., 2006 Logiques fractales et spatiales des reliefs du sud-est du Massif Central (France). Eléments pour une théorie structurelle et formelle en géomorphologie. 21^e Réunion des Sciences de la Terre, Dijon, décembre 2006, livre des résumés, Université de Bourgogne éditeur, p.181.
- Martin Ph., 2007.a, Caractérisation fractale du relief du Lodévois après extraction de tendances topographiques générales. *Revue internationale de géomatique. Informations géographiques. Structuration, extraction et utilisation*, sous la direction de Ch. Weber et P. Gañçarski, Lavoisier-Hermès éditeur, vol. 17, n°3-4, Paris, p. 391-414.
- Martin Ph., 2007.b Développement scalaire plus ou moins ample aux différentes altitudes du bassin versant du Gardon. Recherche de la grande échelle de coupure portant localement la transition fractal→non fractal. Livre des contributions au workshop : *La Théorie de la Relativité d'Échelle. Une base commune à une vision structurelle du monde ?* 1^{er} Workshop TRE Avignon les 6 et 7 décembre 2007, 3 fig., p. 64-65.
- Martin Ph., 2008, Approche fractale des Grands Causses (Massif Central, France). Structure spatiale de la relation existant entre l'altitude et la dimension fractale de courbes de niveau

- covariantes. Actes des Journées de l'Association Française de Karstologie de Sion (Suisse), Université de Lausanne organisateur, Coll. EDYTEM - *Cahiers de Géographie*, n° 7, p. 93-108.
- Martin Ph., Forriez M., Nottale L., 2008, Modélisations fractales du relief et du réseau de drainage des Cévennes méditerranéennes entre l'Aigoual et le mont Lozère. Application au bassin versant du Gardon (France). 7^e Journées d'étude de l'Office Hydro Météorologique - Cévennes Vivarais. Résumé étendu, 2 p. http://lthel21.hmg.inpg.fr/OHM-CV/P007_JE.php
- Nottale L., 1993, *Fractal Space-Time and Microphysics : Towards a Theory of Scale Relativity*, World Scientific, Singapore, 333 p.
- Nottale L., 1997, in *Scale invariance and beyond*, Proceedings of Les Houches School, B. Dubrulle, F. Graner & D. Sornette eds., (EDP Sciences, Les Ullis/Springer-Verlag, Berlin, New York), p. 249.
- Nottale L., 1998, *La relativité dans tous ses états*, Hachette, Paris, 319 p.
- Nottale L., Chaline J. & Grou P., 2000, *Les arbres de l'évolution : Univers, Vie, Sociétés*, Hachette, Paris, 379 p.
- Nottale L., 2002, in *Lois d'Echelle, Fractales et Ondelettes*, Traité IC2, eds. P. Abry, P. Gonçalves et J. Levy Vehel, (Hermès Lavoisier), Vol. 2, Chap. 7, p. 233.
- Nottale L., Chaline J. & Grou P., 2009, *Des fleurs pour Schrödinger : la relativité d'échelle et ses applications*, Ellipses, Paris, 421 p.
- Nottale L., 2011, *Scale Relativity and Fractal Space-Time : A New Approach to Unifying Relativity and Quantum Mechanics*, Imperial College Press, London, 750 p.