La relativité d'échelle à

Plusieurs observations astrophysiques, notamment les positions des planètes dans les systèmes planétaires et la valeur de la constante cosmologique avaient été prédites par la théorie de la relativité d'échelle.

Laurent Nottale

En 1638, Galilée publia son *Discours sur deux sciences nouvelles* considéré, à juste titre, comme un des textes inauguraux de la physique moderne. On connait surtout la première partie de ce livre, celle qui traite du mouvement et qui introduit à la fois le concept de vitesse instantanée et le principe de relativité. Sous sa forme généralisée (développée par Albert Einstein), ce principe postule que les lois de la nature sont les mêmes pour tous les observateurs, quel que soit leur mouvement. Quant à la notion de vitesse instantanée, quotient d'un déplacement infinitésimal par un temps infinitésimal, elle anticipe la fondation du calcul différentiel grâce auquel la physique calcule l'évolution des systèmes qu'elle étudie. Qu'en est-il de la seconde partie du livre de Galilée, celle qu'il considérait lui-même comme une autre « science nouvelle » ? Elle reflète son étonnement devant le fait que la nature change notablement d'aspect selon l'échelle à laquelle on la considère.

Les historiens des sciences s'étonnent parfois de l'importance accordée par Galilée au changement d'échelle parce qu'il parait secondaire comparé au principe de relativité ou au calcul différentiel. Ironie du sort, lors de la naissance de la théorie de la relativité d'échelle, ces trois idées se sont révélées liées. Il s'avère, en effet, qu'en renonçant à l'hypothèse de différentiabilité (c'est-à-dire à la possibilité de calculer une vitesse instantanée dans n'importe quel cas), on peut étendre le principe de relativité : on postule alors que les lois de la physique sont invariantes non seulement lorsque l'on change l'état de mouvement du référentiel auquel on les rapporte, mais aussi lorsque l'on change l'échelle à laquelle on les considère ! Une telle modification de point de vue peut paraitre déraisonnablement radicale. Cependant, plusieurs des prédictions qui en résultent ont déjà été confirmées, notamment la position des planètes dans les systèmes planétaires et la valeur de la constante cosmologique. Examinons les fondements de la théorie et voyons comment elle nous conduit à ces prédictions.

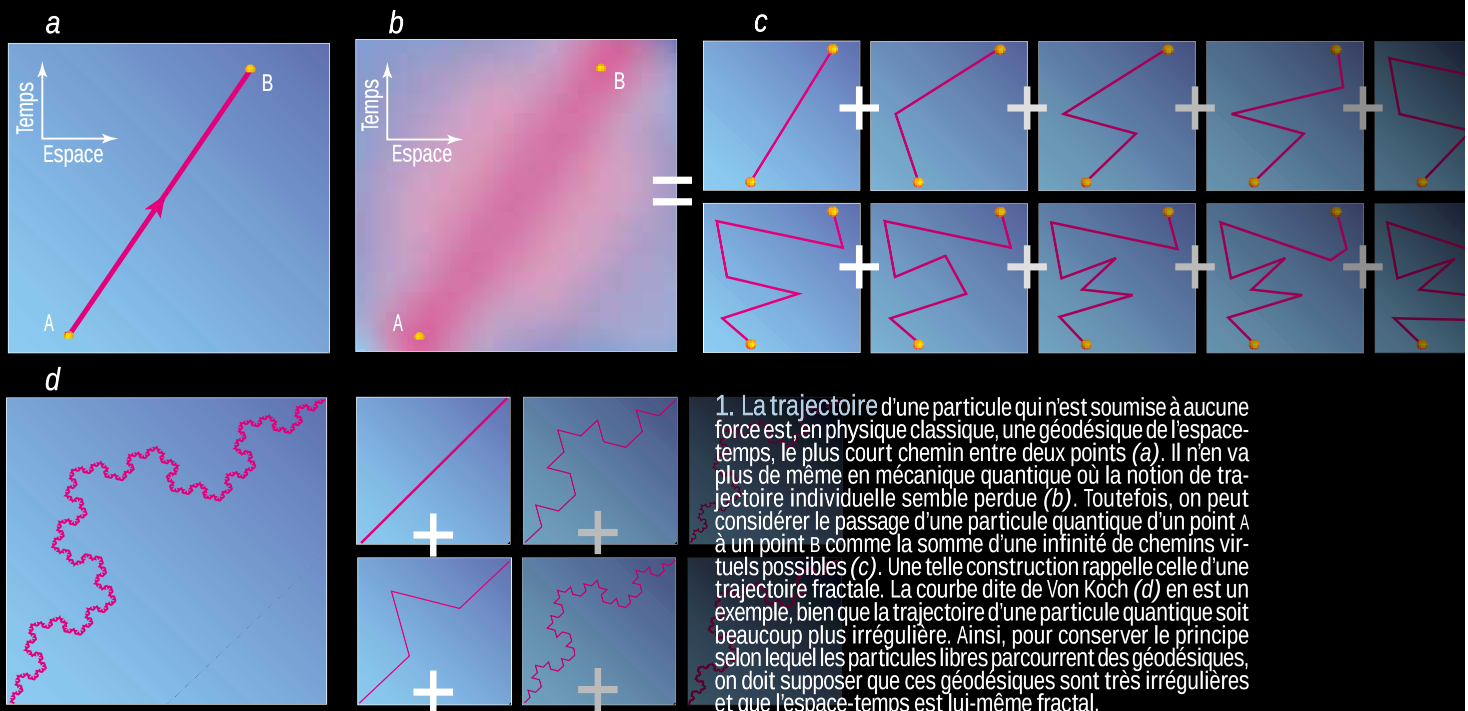
La physique classique – y compris la relativité générale – considère que les trajectoires des points matériels sont parfaitement régulières. En effet, prendre la vitesse instantanée d'un mobile, c'est-à-dire la dérivée de sa position par rapport au temps à un moment donné, c'est considérer la tangente à sa trajectoire au point qu'il occupe à cet instant... tangente qui n'existe que si la courbe est parfaitement lisse à petite échelle. Les particules « libres », sur lesquelles ne s'exerce aucune force, suivent des géodésiques de l'espace-temps, les chemins les plus courts entre deux points. Il s'ensuit qu'en physique classique, ces géodésiques sont toujours absolument régulières, quelle que soit l'échelle à laquelle on les étudie. Cette hypothèse a été justifiée parce que, sans elle, il semble que l'on doive renoncer aux innombrables succès du calcul différentiel.

Un espace-temps fractal

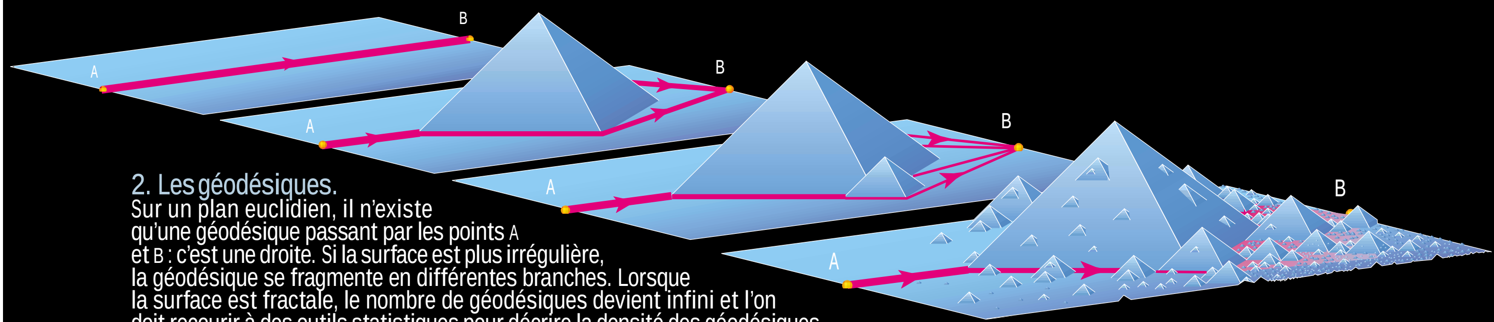
Depuis la découverte de la mécanique quantique, il existe pourtant de bonnes raisons d'abandonner cette hypothèse. Tout d'abord, la première interprétation de la mécanique quantique renonçait à la notion de trajectoire : en effet, la construction d'une trajectoire suppose que l'on connaisse, à chaque instant, à la fois la position et la vitesse d'une particule, ce qui est interdit par le principe d'indétermination de Heisenberg. Par la suite, dans les années 1940, le physicien américain Richard Feynman montra que l'on pouvait réhabiliter partiellement le concept de trajectoire et que la théorie développée par Schrödinger, Heisenberg et Dirac, revenait à calculer la probabilité des événements en sommant selon certaines règles les amplitudes de probabilité de toutes les trajectoires possibles des particules.

En 1965, Feynman et Albert Hibbs écrivaient au sujet de ces chemins virtuels, que « ceux qui sont importants pour une particule ne sont pas ceux qui ont une pente (ou une vitesse) bien définie partout, mais, au contraire, ceux qui sont très irréguliers à toute petite échelle [...] En d'autres mots, ces trajectoires sont non différentiables ». Donnons un autre argument : l'opération mathématique de dérivation

l'épreuve des faits



1. La trajectoire d'une particule qui n'est soumise à aucune force est, en physique classique, une géodésique de l'espace-temps, le plus court chemin entre deux points *(a)*. Il n'en va plus de même en mécanique quantique où la notion de trajectoire individuelle semble perdue *(b)*. Toutefois, on peut considérer le passage d'une particule quantique d'un point A à un point B comme la somme d'une infinité de chemins virtuels possibles *(c)*. Une telle construction rappelle celle d'une trajectoire fractale. La courbe dite de Von Koch *(d)* en est un exemple, bien que la trajectoire d'une particule quantique soit beaucoup plus irrégulière. Ainsi, pour conserver le principe selon lequel les particules libres parcourent des géodésiques, on doit supposer que ces géodésiques sont très irrégulières et que l'espace-temps est lui-même fractal.



2. Les géodésiques. Sur un plan euclidien, il n'existe qu'une géodésique passant par les points A et B : c'est une droite. Si la surface est plus irrégulière, la géodésique se fragmente en différentes branches. Lorsque la surface est fractale, le nombre de géodésiques devient infini et l'on doit recourir à des outils statistiques pour décrire la densité des géodésiques.

par rapport au temps implique de considérer la limite d'un intervalle de temps tendant vers zéro. Or, la mécanique quantique nous enseigne, à travers les relations de Heisenberg, qu'il faudrait une énergie infinie pour réaliser vraiment cette opération. Par conséquent, il existe une contradiction entre ce que l'on écrit et ce que l'on fait en physique.

Que se passe-t-il lorsque l'on renonce à la différentiabilité des coordonnées décrivant les trajectoires des particules ? La principale conséquence est le caractère fractal qu'acquiert l'espace-temps. Par fractal on entend le fait qu'il dépend de façon explicite de l'échelle à laquelle on le considère. Ainsi, par exemple, la longueur d'un morceau de géodésique ou de trajectoire varie avec la résolution utilisée pour l'étudier, tout comme la longueur de la côte de Bretagne, pour citer un exemple bien connu, dépend de la résolution avec laquelle on la mesure. Dès lors, lorsque l'on étudie le mouvement d'une particule, il faut définir au préalable la résolution avec laquelle on le fait, résolution qui caractérise « l'état d'échelle » du référentiel auquel on rapporte les phénomènes.

Relativité d'échelle

Le principe de relativité étendu s'exprime ainsi : « Les lois de la physique restent valides quel que soit l'état du référentiel auquel on rapporte les phénomènes », où l'on entend par « état du référentiel » à la fois son état de mouvement (c'est la relativité restreinte et générale) et son état d'échelle.

Comment l'irrégularité des géodésiques doit-elle varier avec l'échelle pour que ce nouveau principe de relativité soit respecté ? On postule que lorsque l'on change d'échelle, les lois qui déterminent l'évolution de la longueur des géodésiques (ou de tout autre grandeur dépendant de l'échelle) sont analogues à celles qui déterminent l'évolution des grandeurs physiques lorsque l'on passe d'un référentiel en mouvement à un autre. Ce sont donc des équations différentielles équivalentes à celles qui régissent les changements de mouvement dans l'espace ordinaire ; la seule différence est qu'elles agissent dans l'espace des échelles et que le rôle joué par le paramètre temps dans les transformations de mouvement l'est par un paramètre décrivant l'irrégularité des géodésiques : leur « dimension fractale » *(voir l'encadré ci-dessous).*

On peut alors construire ces équations en s'inspirant des différentes étapes de la théorie relativiste du mouvement : à la relativité galiléenne du mouvement correspond une première approximation de la relativité d'échelle que nous nommerons « relativité d'échelle galiléenne ». On peut ensuite construire une théorie de la « relativité d'échelle restreinte », puis une théorie de la « relativité d'échelle généralisée » en cours d'élaboration. Examinons les premiers résultats.

La relativité galiléenne du mouvement attribue à un point matériel libre un mouvement rectiligne et uniforme, c'est-à-dire une trajectoire dans l'espace-temps dont la pente est constante. De la même façon, la solution la plus simple en relativité galiléenne d'échelle est celle où la longueur des géodésiques varie de façon constante avec la résolution (dans une certaine description où les variables sont dites logarithmiques). Ceci signifie que, dans cette approximation galiléenne, la dimension fractale des trajectoires parcourues par les particules libres ne change pas avec les zooms qu'on leur applique. Ces courbes sont très irrégulières, mais présentent un aspect semblable quelle que soit la résolution à laquelle on les étudie : on les qualifie pour cela d'autosimilaires. Elles s'apparentent, de ce fait, aux chemins suivis par de petits grains en suspension dans un fluide au cours de leur mouvement brownien. Toutefois, lorsque l'on ajoute au principe de relativité d'échelle la contrainte d'obéir au principe de relativité du mouvement, on montre que la structure des géodésiques subit une transition vers les grandes échelles, transition au-delà

Qu'est-ce que la dimension fractale ?

Elle est souvent définie à partir de l'invariance d'échelle propre aux figures pouvant être découpées en formes plus petites, similaires à la figure originale à une homothétie près *(a)*. Ainsi, un carré, qui est un objet à deux dimensions, peut être subdivisé en m^2 carrés identiques à l'original, mais m fois plus petits que lui. Un cube (objet à trois dimensions) peut être subdivisé en n^3 cubes identiques à l'original, mais n fois plus petits que lui, etc. Les exposants 2 et 3 sont les dimensions d'homothétie de ces figures. Elles sont identiques à leur dimension au sens classique, leur dimension « topologique ». Il en va autrement pour des figure très irrégulières.

La courbe de von Koch

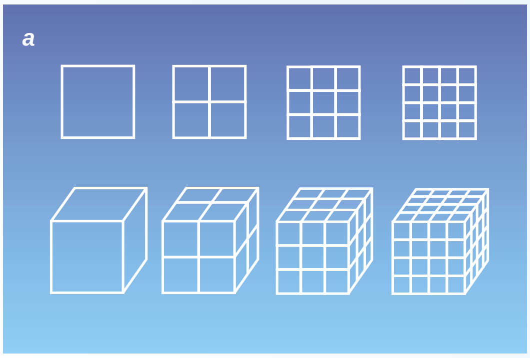
Cette courbe relie les points A et B par un chemin de longueur infinie *(b)*. On peut la construire à l'aide d'une infinité d'étapes dont on a représenté les quatre premières. Ces étapes peuvent être considérées comme des images de la courbe réalisées avec une résolution de plus en plus petite. Ce sont des «zooms» dont on observe que l'effet est, à chaque fois, de multiplier la longueur de la courbe par un facteur 4/3. Pour reprendre la terminologie que nous avons appliquée au carré et au cube, la courbe de von Koch peut être subdivisée en quatre courbes identiques à elle-même, mais trois fois plus petites, ou, plus généralement en 4^n morceaux identiques, mais 3^n fois plus petits que l'original. On est alors conduit à lui attribuer une dimension fractale égale à Log(4)/Log(3) soit environ 1,26. De manière intuitive, cette valeur signifie que la courbe de von Koch occupe plus de place qu'une simple ligne (de dimension égale à 1) et moins qu'une surface (de dimension égale à 2).

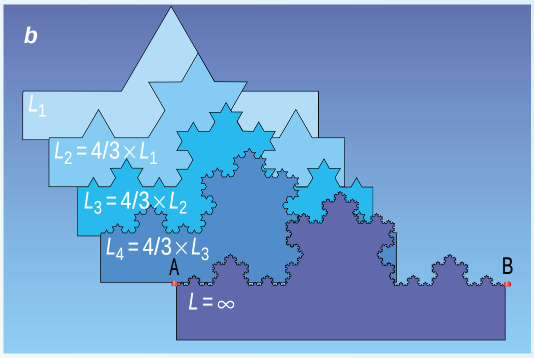
Les fractales ne sont pas nécessairement auto-similaires

On qualifie de fractale toute courbe qui, comme celle de von Koch, présente une longueur dépendant de la résolution avec laquelle on la mesure. Toutefois, contrairement à ce que pourrait laisser croire cet exemple, les fractales ne sont pas nécessairement autosimilaires, c'est-à-dire qu'en général leur longueur n'augmente pas de façon régulière avec les zooms successifs. La dimension fractale de ces figures varie alors avec l'échelle.

Relativité d'échelle

Dans le cadre de la théorie de la relativité d'échelle, on montre que les trajectoires des particules libres sont indépendantes de la résolution (elle ne sont pas fractales) à grande échelle, mais acquièrent une dépendance d'échelle lorsqu'on les observe avec une résolution inférieure à une certaine longueur λ qui dépend du système considéré. En dessous de cette longueur, les trajectoires acquièrent une dimension fractale constante.





de laquelle la longueur des trajectoires ne dépend plus de la résolution (elles redeviennent classiques).

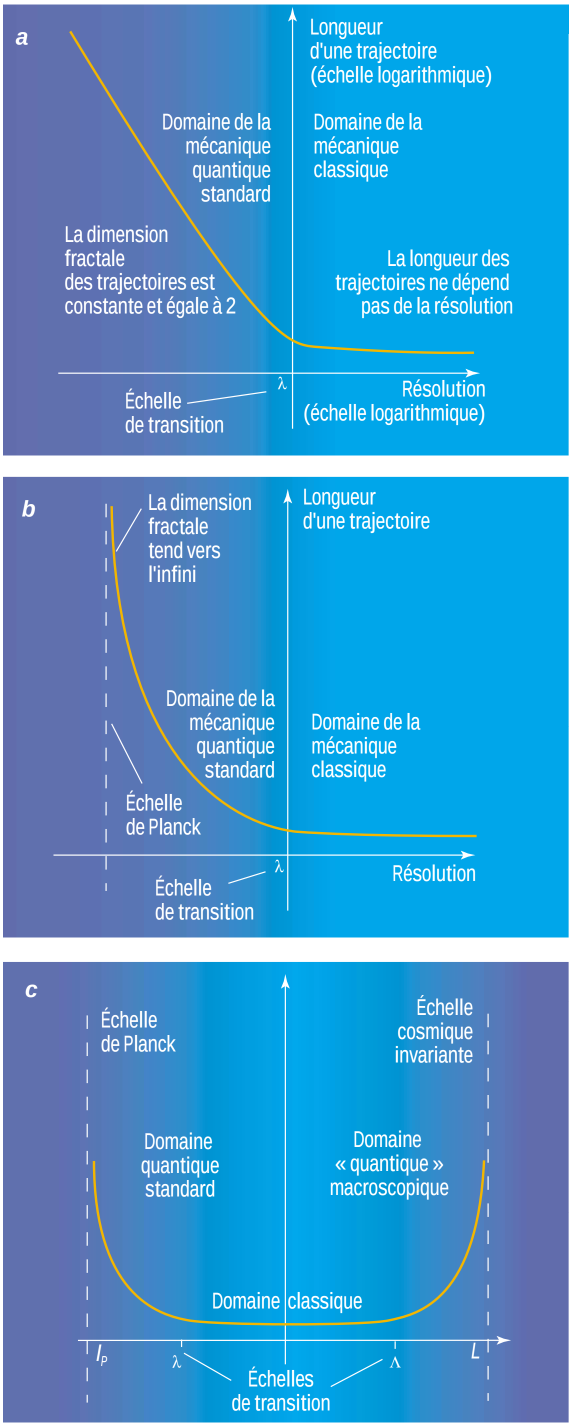
Ainsi, cette première étape explique l'existence d'un domaine, situé vers les grandes échelles relatives, où la physique classique est valable (c'est la moindre des choses) et prédit la manifestation de l'irrégularité des trajectoires vers les petites échelles. Il se trouve que si la dimension fractale constante des géodésiques vaut deux (ce qui caractérise des courbes qui occupent « autant de place » qu'une surface), les effets de ces irrégularités sont exactement ceux prédits par la mécanique quantique standard.

Passons à la seconde étape, c'est-à-dire à la relativité d'échelle restreinte. On peut considérer la relativité restreinte du mouvement comme la modification de la relativité galiléenne par l'introduction d'une vitesse limite infranchissable (la lumière dans le vide). La relativité restreinte d'échelle est construite à partir d'une limite analogue : un rapport de dilatation maximal. Cette dilatation maximale implique l'existence d'une résolution spatiale (et temporelle) extrêmale, invariante sous les dilatations et les contractions. Quelle que soit la puissance du « zoom » supplémentaire qu'on lui applique, une telle échelle ne change pas. Cette situation est analogue à celle qui nous est plus familière en relativité restreinte du mouvement où la somme d'une vitesse quelconque et de la vitesse de la lumière reste égale à la vitesse de la lumière. Vers les petites échelles, les physiciens connaissent depuis longtemps une longueur et une durée particulières : l'échelle de Planck (10^{-35} mètre ou 10^{-43} seconde) que nous identifions à notre résolution extrêmale.

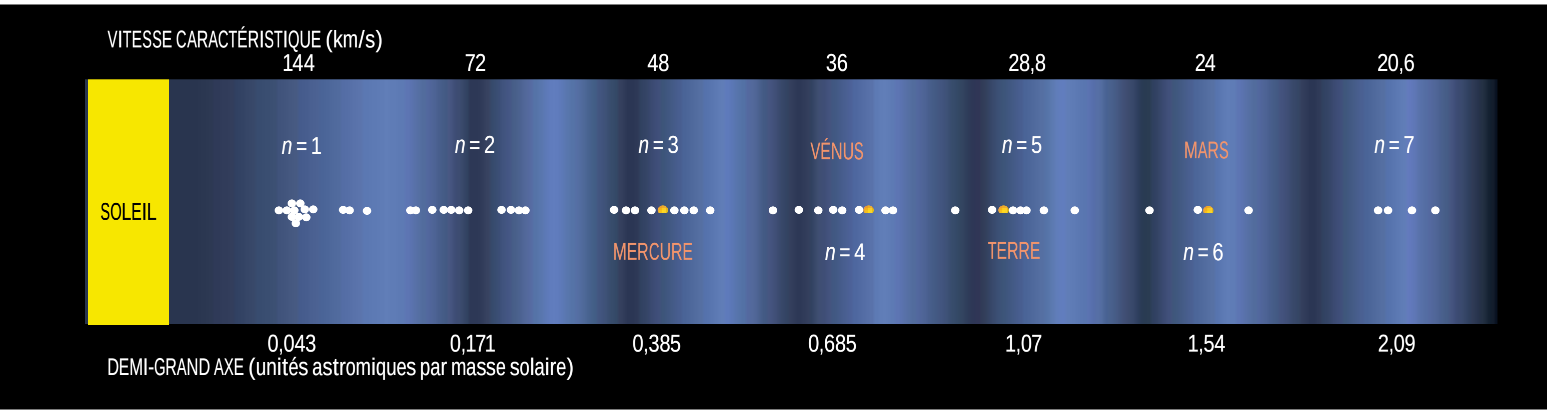
Résumons ces deux premières étapes. Lorsque qu'un observateur considère l'espace-temps à des échelles de plus en plus petites, relativement à la sienne, il commence par observer que la longueur des trajectoires est indépendante du zoom. Les géodésiques semblent parfaitement lisses : c'est le domaine de validité de la mécanique classique. Puis, à partir d'une certaine résolution, les géodésiques deviennent extrêmement irrégulières. La résolution où a lieu cette transition dépend du système étudié : nous l'identifions à la longueur dite de de Broglie du système, longueur au-dessous de laquelle les comportements quantiques ne peuvent plus être ignorés. Notons bien que cette échelle de transition dépend du système considéré, ce qui explique que certains dispositifs présentent des comportements quantiques à des échelles que l'on considère habituellement comme macroscopiques (les superfluides ou les supraconducteurs, par exemple).

Intéressons-nous à ce qui se passe dans le domaine où la dimension fractale des trajectoires est égale ou très proche de deux. Nous sommes dans le territoire de validité de la relativité d'échelle galiléenne. Même dans le cas simple d'un mouvement de vitesse petite par rapport à celle de la lumière (correspondant à un espace fractal sans que le temps ne soit affecté), trois conséquences découlent de la relativité d'échelle.

La première est la perte du déterminisme. Rappelons que lors d'un mouvement classique entre deux points, une particule libre parcourt le plus court chemin, c'est-à-dire un segment de droite dans un espace euclidien, et plus généralement une géodésique dans un espace courbe. Or, dans un espace-temps fractal, il existe, entre deux points,



3. La dimension fractale des trajectoires évolue avec la résolution de façon à obéir au principe de relativité d'échelle. Selon la version « galiléenne » de ce principe *(a)*, lorsque qu'un observateur considère l'espace-temps à des échelles de plus en plus petites, il commence par observer que la longueur des trajectoires est indépendante du zoom : c'est le domaine de la mécanique classique. Puis, au-dessous d'une certaine résolution, les géodésiques deviennent très irrégulières : elles acquièrent une dimension fractale constante correpondant à la mécanique quantique standard. La relativité d'échelle « restreinte » *(b)* fait apparaître une échelle minimale (identifiée avec l'échelle de Planck) à l'approche de laquelle la dimension fractale des géodésiques diverge. Finalement, le principe de relativité d'échelle lui-même garantit que des transitions analogues ont lieu vers les grandes échelles *(c)*.



4. Les planètes solaires et extrasolaires, *(respectivement en orange et en blanc)* ont une plus forte probabilité de présence à certaines distances bien précises de leur étoile. Selon l'équation de Schrödinger gravitationnelle, dans le puits de potentiel du Soleil ou d'une autre étoile, les géodésiques sont structurées d'une façon qui rappelle les niveaux d'énergie dans un atome. Ces orbitales sont définies par un « nombre quantique principal » *n* et correspondent à des vitesses caractéristiques (vitesse de chaque planète si son orbite était exactement circulaire et de même demi-grand axe) qui sont des sous-multiples entiers d'une vitesse fondamentale de 144 kilomètres par seconde. Les chances d'obtenir ce résultat par hasard sont inférieures à 2 pour 100 000.

une infinité de chemins de longueur minimale *(voir la figure 2)*. Ainsi, en chaque point de sa trajectoire, une particule libre se voit désormais offrir un bouquet de trajectoires fractales possibles qui sont autant de futurs équiprobables.

La seconde conséquence a trait à la description des déplacements infinitésimaux dans l'espace. Ils restent définissables, à condition de ne pas passer à la limite où leurs rapports peuvent ne plus être définis (c'est la non-dérivabilité). On montre qu'ils sont la somme de deux termes, une « partie classique », indépendante de l'échelle, différentiable et dominant à grande échelle, et une « partie fractale », fonction de l'échelle et non dérivable, dominant à petite échelle relative.

Enfin, la troisième conséquence va de pair avec la disparition du déterminisme : c'est l'existence d'une nouvelle forme d'irréversibilité microscopique. Les lois de la mécanique classique sont réversibles dans le temps. Ceci signifie que si l'on inverse la vitesse instantanée d'une particule à un point donné de sa trajectoire, on est assuré qu'elle rebroussera chemin en repassant exactement « sur ses pas ». Cependant, lorsque l'on tente une opération semblable en tenant compte de la fractalité de l'espace-temps, la particule débouche non pas sur une trajectoire, mais, comme précédemment, sur un faisceau de trajectoires passées possibles ! Il s'ensuit que la notion de vitesse instantanée est remplacée par deux champs de vitesse, l'un vers le futur et l'autre vers le passé, qui ne sont pas, en général, identiques, et définissent un nombre complexe jouant le rôle d'une nouvelle « vitesse » généralisée.

À l'aide de cette nouvelle « vitesse » et de la séparation des déplacements élémentaires en leur partie « classique » et leur partie « fractale », on construit un nouvel opérateur de dérivation. Grâce à cet opérateur, on peut ré-écrire les équations de la physique sous une forme qui prend en compte les effets induits par le caractère fractal de l'espace-temps. Ceci s'apparente à une « traduction » de la physique dans un nouveau langage. L'une des conséquences remarquables de cette traduction est que l'équation fondamentale de la dynamique de Newton se transforme (après intégration) en l'équation de Schrödinger, c'est-à-dire l'équation fondamentale de la mécanique quantique non relativiste !

Nous sommes arrivés ici à un point essentiel : à l'aide de ce nouvel opérateur de dérivation, il n'y a plus qu'une seule forme pour les lois fondamentales de la physique, lois qui se ramènent ensuite aux lois classiques ou quantiques suivant l'état d'échelle relatif du système de référence !

Une équation de Schrödinger « astronomique »

Cela confère à l'équation de Schrödinger un statut plus universel que prévu. En effet, les trois conditions qui sous-tendent sa démonstration (perte d'information sur les trajectoires individuelles, fractalité et irréversibilité) sont valides, au moins comme approximations, dans beaucoup de cas.

En relativité générale, des particules qui ne sont soumises qu'à la gravitation sont précisément décrites comme libres, c'est-à-dire parcourant les géodésiques (mais dans un espace-temps courbé par la matière et l'énergie). Par ailleurs, dans un grand nombre de systèmes gravitationnels (en fait, dès qu'on passe à un problème à trois corps), apparait une forte sensibilité aux conditions initiales – c'est-à-dire du chaos. On ne peut plus strictement déterminer le devenir d'un système au-delà d'une certaine échelle de temps, son « horizon de prédictibilité ». Que deviennent les trajectoires classiques quand elles sont vues à une résolution temporelle de l'ordre de cet horizon et suivies sur un temps beaucoup plus long que lui ? Une des façons d'aborder cette question consiste à ne plus tenter de décrire des trajectoires individuelles, mais à utiliser des outils statistiques, telles les densités de probabilité de présence. On note que cet horizon dépend du système considéré, tout comme la transition quantique vers les petites échelles. Finalement, en ajoutant l'hypothèse d'une irréversibilité « microscopique » du mouvement des corps (troisième implication), l'équation de la dynamique gravitationnelle, devenue non déterministe, prendra la forme d'une équation de Schrödinger macroscopique. Cette dernière pourrait constituer sinon une description exacte, du moins une bonne approximation de la dynamique régissant l'évolution, sous l'effet de la gravitation, de structures considérées sur des durées assez grandes pour voir apparaitre le chaos : beaucoup de systèmes astronomiques répondent à ces critères, même s'il ne s'agit pas, à proprement parler, de mécanique quantique standard.

Les solutions de cette équation nous donneront la répartition du champ de géodésiques dans un puits de potentiel gravitationnel donné. Les petits corps ou les particules qui suivent ces géodésiques se regrouperont dans les zones où elles sont les plus concentrées et, par conséquent, la répartition de la matière devrait refléter la densité de probabilité donnée par l'équation de Schrödinger gravitationnelle. Ainsi, un nuage de matière piégé par le champ de gravité d'un corps massif devrait être façonné par l'équation de Schrödinger gravitationnelle d'une manière qui rappelle la façon dont les nuages d'électrons, piégés dans le champ électrique des noyaux atomiques, le sont par l'équation de Schrödinger authentiquement quantique : on devrait observer des « lobes de densité » comparables aux orbitales électroniques !

Ceci est particulièrement intéressant, car, dans la théorie standard de formation des structures (qu'il s'agisse de planètes, d'étoiles, de galaxies ou d'amas de galaxies), rien ne peut se former à partir d'un milieu de densité strictement homogène : des fluctuations « initiales », des grumeaux que la gravitation fera croitre, sont toujours nécessaires et doivent souvent être introduits de façon *ad hoc* dans la théorie. Au contraire, dans la nouvelle approche, le problème se pose autrement : des solutions stationnaires montrant des pics de probabilité s'obtiennent même dans le cas du potentiel gravitationnel d'une distribution uniforme. Si l'on calcule les divers modes quantifiés dans le puits de potentiel isotrope le plus simple, on montre qu'il doit se former des objets sphériques pour l'énergie minimale, puis des structures binaires pour une énergie plus élevée, et des structures en forme de chapelet ou de trapèze pour les niveaux d'énergie supérieurs. On observe effectivement de telles morphologies dans les zones de formation d'étoiles ou dans les amas de galaxies. Cependant, les résultats les plus spectaculaires concernent la formation des planètes.

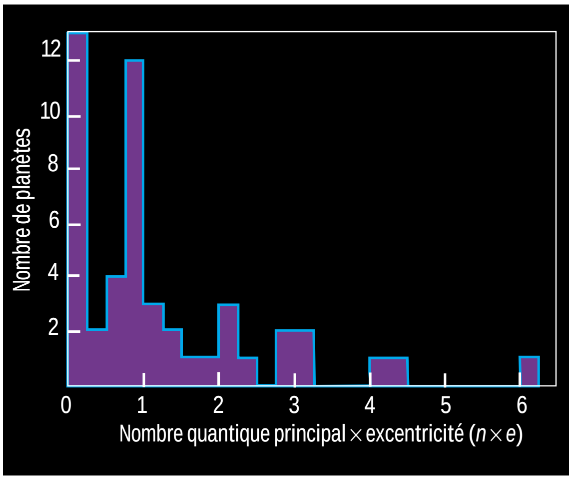
Les systèmes planétaires

Pour appliquer cette approche aux systèmes planétaires, il faut résoudre l'équation de Schrödinger gravitationnelle dans le potentiel central képlerien d'une étoile. On postule, tout comme dans le modèle de formation standard, que les planètes se forment par accrétion de planétésimaux. Cependant, les mouvements de ces petits corps dans la nébuleuse primitive sont si chaotiques qu'au-delà d'un certain horizon de prédictibilité, l'information sur les orbites individuelles se perd. La répartition initiale de la densité de probabilité de ces planétésimaux sera donnée par les solutions d'une équation de Schrödinger gravitationnelle. Par la suite, les planètes qu'ils formeront garderont des orbites proches des pics de probabilité prévus par ces solutions.

En 1992, nous avons appliqué cette approche au Système solaire. La théorie prédit, par exemple, que les demi-grands axes de leurs orbites (le rayon dans le cas d'orbites circulaires) se répartissent autour de pics de probabilités qui varient comme le carré d'un nombre entier *n*. En utilisant la troisième loi de Kepler qui relie les demi-grands axes *a* et les périodes *T* de ces orbites, il s'ensuit que les vitesses caractéristiques des planètes $v = 2\pi a / T$ adoptent des valeurs quantifiées $v_n = w_0 / n$. Dans cette expression w_0 est une constante fondamentale homogène à une vitesse. Quel est cette nouvelle constante ?

En 1997, Gino Agnese et Roberto Festa, de l'Institut de physique nucléaire de Gênes, qui recherchaient indépendamment une équation de Schrödinger gravitationnelle, ont montré que le rapport $\alpha_g = w_0 / c$ (qui est un nombre sans dimension) joue un rôle comparable pour la gravitation à celui de la constante de structure fine qui mesure l'amplitude des phénomènes électromagnétiques. Des observations indépendantes du Système solaire, réalisées aux niveaux galactiques et extragalactiques, ont montré que les vitesses relatives des étoiles, mais aussi des galaxies dans les amas et même dans des structures plus grandes ont des valeurs proches des multiples ou des sous-multiples d'une vitesse fondamentale – que l'on postule être la nouvelle constante w_0 – de l'ordre de 144 kilomètres par seconde. Il est remarquable qu'en adoptant cette valeur pour w_0, les résultats obtenus pour les orbites des planètes sont très proches des valeurs observées dans le Système solaire, à condition d'admettre que Mercure n'occupe pas la première, mais la troisième des orbites les plus probables. Il existerait donc deux orbitales plus basses, apparemment non occupées, dans le cas particulier de notre Système. Malheureusement, cette hypothèse pouvait sembler arbitraire et, de toutes façons, un exemple unique ne pouvait constituer une preuve convaincante.

En 1995, trois ans après ces premiers travaux, Michel Mayor et Didier Queloz, de l'Observatoire de Genève, annoncèrent la découverte de la première planète extrasolaire connue autour d'une étoile de type solaire, 51 Pegasi.



5. Les excentricités des orbites des planètes solaires et extrasolaires *(e)* se répartissent préférentiellement autour de valeurs dont le produit avec le nombre quantique *n* est entier, comme prévu par la théorie. La probabilité d'obtenir un tel résultat par hasard est inférieure à 10^{-4}. La probabilité pour les résultats combinés sur les demi-grands axes et sur les excentricités est de 3×10^{-7}.

Cette planète, circule autour de son étoile en à peine plus de quatre jours, une période bien plus courte que celles des planètes de notre Système. Or, le calcul du nombre quantique n de cette orbite donne une valeur très proche de 1 (n=1,1) et donc de l'orbitale fondamentale prédite par la relativité d'échelle. Au cours des années suivantes, des dizaines de nouvelles planètes furent découvertes autour d'autres étoiles et il est devenu possible de tester la théorie de manière plus draconienne encore.

Lorsque l'on découvre une planète extrasolaire, la seule quantité à laquelle on a accès est sa période de révolution T (que l'on déduit, par exemple, des oscillations dans le mouvement de son étoile) et non sa vitesse. Toutefois, d'après les lois de Kepler, cette vitesse est égale à la racine cubique du rapport de la masse de l'étoile à la période : $v = \sqrt[3]{(2\pi GM / T)}$. Ainsi, si les vitesses caractéristiques des planètes se concentrent autour des valeurs $v_n = w_0\ /\ n$, on prédit que les valeurs les plus probables pour les demi-grands axes et donc pour les périodes des planètes seront telles que la quantité $4{,}83\ \sqrt{(a / M)} = 4{,}83\ \sqrt[3]{(T / M)}$ est entière. Dans cette expression, les unités sont celles du Système solaire : la constante 4,83 est la vitesse w_0 en unités de vitesse de la Terre ; la période est en années, le demi-grand axe en rayons de l'orbite terrestre, la masse de l'étoile en masses solaires.

Les résultats sont très encourageants. Les valeurs des demi-grands axes des orbites des exoplanètes découvertes depuis 1995 sont en excellent accord avec ces prédictions *(voir la figure 4)*. Ainsi, les observations permettent d'estimer les positions des premiers pics de probabilité à 0,0438 et 0,168 unité astronomique par masse solaire, à quelques pour cent près, valeurs qui s'accordent bien avec les prédictions théoriques (respectivement de 0,0430 et de 0,171).

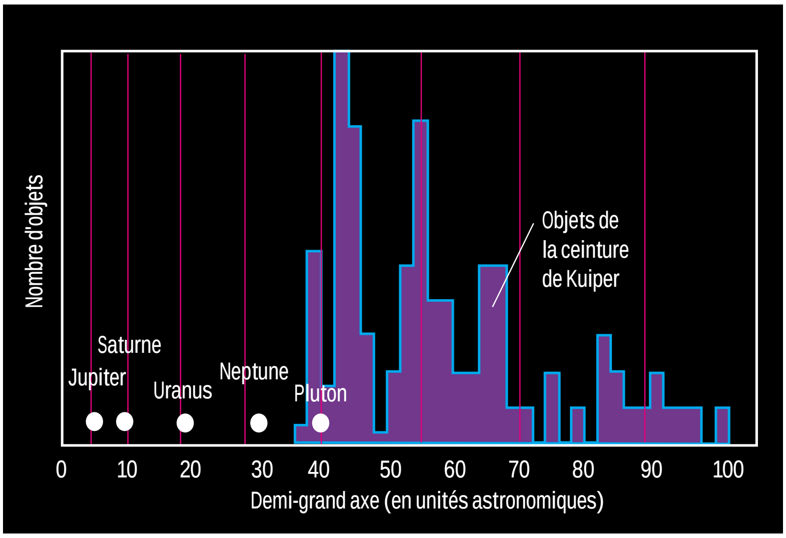
Les planètes extrasolaires ont réservé une deuxième surprise aux planétologues : contrairement à ce que prévoit le modèle standard de formation, dans lequel le balayage des planétésimaux conduit à la circularité des orbites, un grand nombre d'orbites sont très excentriques. L'équation de Schrödinger gravitationnelle prédisant les excentricités les plus probables, nous avons repris ces calculs récemment, afin de comparer leur prédiction avec les données d'observation. La théorie stipule que les valeurs les plus probables pour les excentricités e des planètes sont données par $e = k / n$, où n est le « nombre quantique principal » introduit plus haut pour caractériser le demi-grand axe de l'orbite et où k est un autre nombre entier, compris entre 0 et n–1. Encore une fois, la distribution observée est en accord statistique avec cette prédiction *(voir la figure 5)*.

Ainsi, les outils développés dans le cadre de la relativité d'échelle expliquent l'existence de planètes aux orbites circulaires (k=0) qui sont toujours possibles quel que soit le nombre quantique principal, mais aussi d'orbites elliptiques très excentriques, ainsi que l'existence de planètes aux orbites très proches de leur étoile. Or ces deux observations constituaient les principales énigmes posées par les planètes extrasolaires dans le cadre des théories standard de formation des systèmes planétaires. Nos résultats suggèrent que l'ensemble des systèmes découverts à ce jour relève d'une même structure universelle.

Plus récemment, nous avons utilisé cette méthode pour prédire l'existence de nouvelles structures dans le Système solaire. Remarquons tout d'abord qu'il existe une différence entre, d'une part, les électrons « en orbite » autour du noyau d'un atome et, d'autre part, les poussières, petits corps et autres planètes qui gravitent autour du Soleil. Pour les premiers, le « rayon » des orbites possibles dépend du rapport de la charge des électrons à leur masse, rapport qui est fixe. Pour les seconds, au contraire, le principe d'universalité de la chute libre assure que les orbites possibles ne dépendent pas de leur masse. On montre qu'à cause de cette propriété particulère à la gravitation, les orbitales formées se subdivisent en sous-structures formant une hiérarchie d'organisation : c'est une nouvelle forme d'invariance d'échelle. Par exemple, l'orbitale fondamentale du Système solaire interne et des systèmes extrasolaires doit présenter des sous-structures, elles aussi solutions d'une équation de Schrödinger (mais en prenant comme constante w un multiple entier de w_0).

Les pics prédits de cette façon sont situés à 0,02 et à 0,043 unité astronomique. Or, depuis 1966, on observe que les poussières interplanétaires en orbite près du Soleil (observées régulièrement au cours des éclipses) présentent des pics de densité précisément à ces distances. Notons qu'une exoplanète découverte récemment gravite à 0,023 unité astronomique de son étoile, ce qui correspond également à cette nouvelle sous-structure. Lorsque l'on applique la même idée vers les grandes échelles, le Système solaire externe forme une superstructure dont le Système solaire interne dans son ensemble (Mercure, Vénus, la Terre et Mars) constitue l'orbitale fondamentale. Les orbitales plus élevées concernent Jupiter, Saturne et les autres planètes géantes, ainsi que les petits corps glacés qui gravitent aux confins du Système solaire et dont Pluton est le premier (les autres sont découverts à un rythme accéléré depuis la fin des années 1990). Or, là encore, ces petits corps dits de la ceinture de Kuiper, se répartissent selon des pics de probabilité situés aux distances prédites par la théorie *(voir la figure 6)*.

Pour finir ce tour d'horizon, considérons les conséquences de notre théorie vers des échelles astronomiques



6. Les positions des corps dans le système solaire externe, c'est-à-dire les planètes géantes et les petits corps de la ceinture de Kuiper, correspondent bien aux maximums de probabilité *(traits rouges)* calculés dans le cadre de la relativité d'échelle.

encore plus considérables. De même que le principe de relativité d'échelle nous a conduit à prédire l'existence d'un domaine « quantique astronomique », nous devrions nous attendre à ce qu'il existe, encore au-delà, une « échelle cosmique » manifestant l'existence d'une dilatation maximale. Dès lors, il doit exister une longueur fondamentale L jouant vers les grandes échelles, un rôle analogue à celui que joue la longueur de Planck vers les petites échelles. En 1992, nous avons postulé qu'une telle « longueur de Planck cosmique » se traduirait par l'existence d'une constante cosmologique dans les équations d'Einstein décrivant la gravitation.

La constante cosmologique

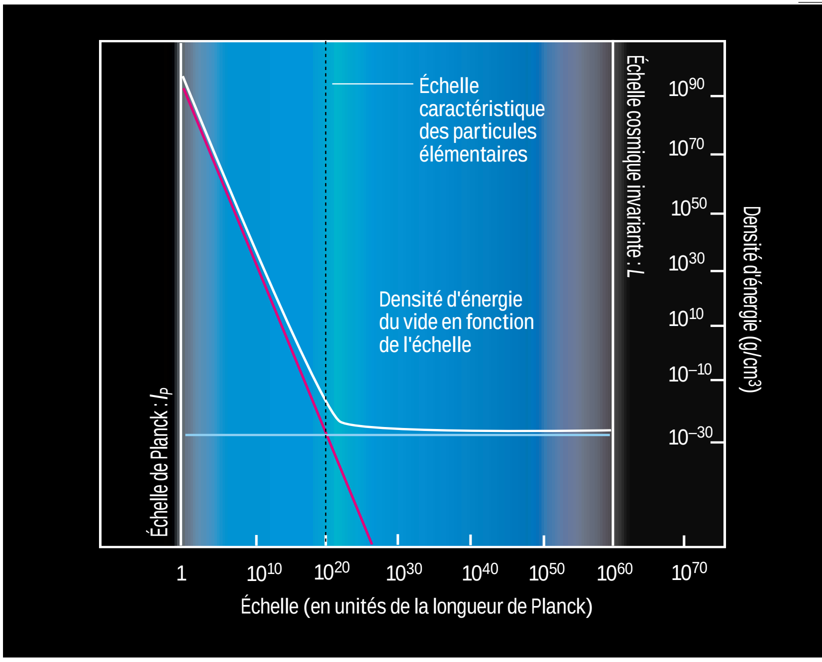
En 1917, Einstein avait introduit dans ses équations une constante, dite cosmologique, afin d'expliquer l'origine de l'inertie. Cette constante joue un rôle géométrique : elle définit une courbure fondamentale de l'espace-temps et est égale à l'inverse du carré d'une longueur cosmique invariante. Elle a aussi la propriété de s'opposer à grande échelle à la force attractive de la gravité et, si elle est bien ajustée, d'autoriser des modèles d'Univers statiques.

Lorsque l'on découvrit que l'Univers n'est pas statique, certains physiciens voulurent se débarrasser de la constante cosmologique en lui attribuant une valeur nulle. Toutefois, Georges Lemaître fit remarquer dès 1934, suivi plus tard par l'astrophysicien russe Yacov Zeldovich, que l'effet de la constante cosmologique était semblable à celui de la densité et de la pression (négative) du vide quantique. Malheureusement, lorsqu'on tente de calculer l'effet de cette énergie du vide quantique, on obtient un résultat... infini. Une constante cosmologique d'une telle magnitude n'aurait pas manqué d'avoir des conséquences catastrophiques sur l'Univers !

La solution que nous avons proposée part du constat que si la densité d'énergie du vide dépend de l'échelle à laquelle on la considère, il n'y a aucune raison pour qu'elle soit identique à l'échelle microscopique (où la physique des particules lui attribue une valeur gigantesque) et à l'échelle cosmique (ou elle semble bien plus faible). Dans ce cadre, la constante cosmologique provient de deux sources : d'une part, l'énergie gravitationnelle des fluctuations du vide quantique dont la contribution décroit très rapidement lorsque l'échelle croit, et d'autre part, un terme constant de nature géométrique ayant le sens de l'inverse du carré d'une longueur cosmique invariante, longueur que nous identifions avec la constante L décrite plus haut. Autrement dit, au-dessous d'une certaine échelle r_0, la constante comologique est variable et dominée par les fluctuations quantiques, tandis qu'au-dessus de cette échelle, elle est constante et d'origine géométrique.

Nous avons postulé que l'échelle de transition r_0 a été franchie par l'Univers à la fin d'une période que les astrophysiciens nomment la transition quark-hadrons. Cette période a vu le plasma de quarks et de gluons libres qui emplissait le cosmos se transformer en soupe de nucléons (protons et neutrons) et de mésons, en même temps que les propriétés des électrons changeaient profondément. Cette échelle est caractéristique de la physique des particules. Dans ce cas, on peut déterminer la constante cosmologique à grande échelle : elle est égale à la partie variable à l'échelle r_0 *(voir la figure 7)*. On en déduit que la longueur cosmique L vaut environ 2,9 milliards de parsecs (un parsec égale 3,26 années-lumière). La constante cosmologique serait alors équivalente, à grande échelle, à une densité d'énergie égale à 0,75 fois la densité critique nécessaire pour que l'espace cosmique soit euclidien. Sept ans après cette prédiction, des mesures sur les supernovae lointaines – désormais confirmées par d'autres méthodes – ont établi une valeur de la densité d'énergie associée à la constante cosmologique comprise entre 0,69 et 0,77, en bon accord avec les prédictions de la relativité d'échelle.

Les conséquences de l'abandon de l'hypothèse de différentiabilité de l'espace-temps sont sloin d'être toutes explorées. La construction de la théorie de la relativité d'échelle se poursuit en suivant pas à pas le chemin déjà parcouru lors du développement de la relativité du mouvement, mais en faisant également face à des problèmes spécifiques nouveaux. Les indéniables succès déjà remportés par ce programme constituent la meilleure des invitations au voyage.



7. La constante cosmologique effective, proportionnelle à une densité d'énergie du vide, varie en fonction de la résolution *(en blanc)*. Elle est la somme d'une constante géométrique *(en bleu pâle)* due à l'existence d'une échelle fondamentale L jouant un rôle symétrique à celui de la limite de Planck vers les petites échelles, et d'une densité d'énergie due aux fluctuations du vide quantique *(en rose)*. En postulant que ces deux termes se croisent à une échelle caractéristique des particules élémentaires, on prédit la valeur de la constante géométrique.

Auteur & Bibliographie

Laurent NOTTALE mène ses recherches au Laboratoire de l'Univers et ses théories (LUTH) de l'Observatoire de Paris-Meudon.

G. Lemaître, *Proceedings of the National Academy of Science*, vol. 20, 1934.
L. Nottale, *Fractal Space-Time and Microphysics*, World Scientific, 1993.
A. Agnese, et R. Festa, *Clues to discretization on the cosmic scale*, in *Physical Review Letters A*, vol. 227, p. 165, 1997.
L. Nottale, G. Schumacher, et J. Gay, *Scale relativity and quantization of the solar system*, in *Astronomy and Astrophysics*, vol. 332, p. 1018, 1997.
L. Nottale, G. Schumacher et E. Lefèvre, *Scale relativity and quantization of exoplanet orbital semi-major axes*, in *Astronomy and Astrophysics*, vol. 361, p.379, 2000.
D. Da Rocha et L. Nottale, *Gravitational structure formation in scale relativity*, in *Chaos, Solitons and Fractals*, n° 16, pp. 565-595, 2003.