Si ce n'est toi c'est donc ton frère ?

Jean-Pierre Luminet

Version adaptée de l'article paru dans Sciences & Avenir Hors Série Juillet 2003
(co-signé par E. Brune)

Résumé

Le paradoxe des jumeaux est l'une des plus célèbres pierres d'achoppement de la théorie de la relativité d'Einstein. Semblant contredire l'idée de base selon laquelle les points de vue de différents observateurs doivent être symétriques, il met violemment en lumière les conditions mêmes de cette symétrie. Mais ce n'est qu'après avoir été résolu une première fois que ce paradoxe devient réellement intéressant, car il se repose à nouveau, plus puissant, dans un contexte élargi.

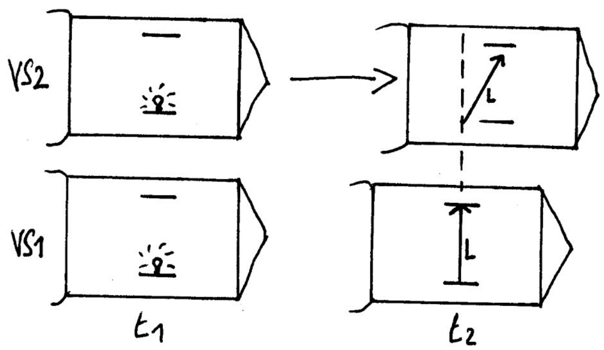
Playtime

En relativité restreinte, les notions d'espace et de temps perdent leur statut absolu au profit de deux nouveaux invariants : la vitesse de la lumière dans le vide, et "l'intervalle d'espace-temps". La vitesse de la lumière dans le vide est la même pour tous les observateurs, quel que soit leur état de mouvement – il s'agit d'un fait observé dont Einstein est parti pour construire sa théorie. Combiné au principe de relativité (les lois de la physique sont les mêmes dans tous les systèmes de référence inertiels, c'est-à-dire en mouvement rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres), ce postulat mène à divers effets curieux tels que la dilatation du temps et la contraction des longueurs. L'horloge d'un système en mouvement paraît retarder par rapport à celle d'un système au repos, tandis que les distances paraissent raccourcir. Mais comme la notion de mouvement est une notion relative, ces effets sont totalement symétriques. L'observateur « en mouvement » se considère, lui, au repos, et voit l'autre système se mouvoir par rapport à lui. Il voit donc les horloges de l'autre système ralentir (donc le temps s'allonger) et ses distances rétrécir. Jusqu'ici, il n'y a pas paradoxe, même s'il paraît curieux que chacun puisse voir l'autre plus « jeune » et plus petit qu'il ne se voit lui-même.

Dilatation du temps en relativité restreinte

La dilatation apparente du temps est une conséquence directe de l'invariance de la vitesse de la lumière. Pour s'en convaincre, il suffit de comparer deux horloges identiques fonctionnant grâce à des impulsions lumineuses qui voyagent entre deux miroirs parallèles. L'une des horloges est en mouvement rectiligne uniforme par rapport à l'autre (dans une direction parallèle à celle des miroirs). Soit un moment t=0 où les deux horloges sont l'une en face de l'autre et où l'impulsion lumineuse est envoyée dans chacune d'elles. Au temps t, l'observateur de l'horloge au repos observe que le rayon lumineux parvient sur le deuxième miroir – ce moment correspond au premier « tic », du tic-tac de l'horloge. La deuxième horloge, pendant ce temps, s'est déplacée, et le rayon lumineux n'a pas encore eu le temps d'y atteindre le deuxième miroir. Elle a donc l'air de fonctionner plus lentement, puisque le tic-tac

n’est pas synchronisé avec celui de l’horloge au repos. Cependant, ce raisonnement est parfaitement réversible, puisque l’observateur lié à l’horloge en mouvement considère que c’est lui qui est au repos. Dans son système de référence, le « tic » de sa propre horloge arrive en premier, l’autre étant retardé. Autrement dit, les deux observateurs font des observations qui semblent contradictoires. Elles ne sont cependant pas incompatibles. On parle précisément de dilatation *apparente* du temps, parce qu’il s’agit d’un effet lié à l’observation, et qu’il est possible de passer d’un point de vue à l’autre au moyen des équations de Lorentz, sans aucune incohérence mathématique. Le coefficient de dilatation du temps est donné par une simple application du théorème de Pythagore au schéma des horloges à lumière décrit ci-dessus. On obtient : $t^* = t\sqrt{(1 - v^2/c^2)}$, où t*, le temps lu sur l’horloge en mouvement par l’observateur immobile, est plus petit que t.
Cependant, le temps propre[1] des deux horloges reste, dans tous les cas de mouvement rectiligne uniforme, parfaitement identiques. Elles « vieillissent » à la même allure. Seules les mesures des deux observateurs divergent, chacun voyant l’autre horloge battre plus lentement que la sienne. C’est cette symétrie qui est battue en brèche par le paradoxe des jumeaux, où il est question d’une différence entre les temps propres de deux horloges en mouvement.



Deux vaisseaux spatiaux se croisent au temps t1 et synchronisent leurs horloges. Au temps t2, le vaisseau 1 voit son horloge marquer le premier « tic », tandis que l’horloge du vaisseau 2 ayant avancé, il voit le rayon lumineux encore loin d’atteindre le miroir. L’horloge du vaisseau 2 lui semble battre plus lentement que la sienne.

Le paradoxe des jumeaux en Relativité Restreinte

Prenons maintenant deux horloges qui sont synchronisées dans le même système de référence. Que se passe-t-il si l’une des deux part à bord d’un vaisseau spatial et revient au terme d’un long voyage ? Einstein montre, dans son article de 1905, qu’à son retour l’horloge voyageuse retarde sur l’horloge au repos. Autrement dit la symétrie est brisée, les deux points de vue ne sont pas équivalents. Cette conclusion, apparemment paradoxale, a été popularisée en 1911 par le physicien français Paul Langevin au moyen d’un exemple célèbre. Prenons deux jumeaux dont l’un part vers une planète lointaine à une vitesse proche de celle de la lumière. A son retour, le voyageur lit sur sa montre qu’il est parti six ans, alors que son frère resté sur terre a vieilli de quarante ans. Parler d’horloges ou de vieillissement est en l’occurrence

[1] On appelle temps propre de l’horloge le temps qui s’écoule dans le système de référence où l’horloge est au repos.

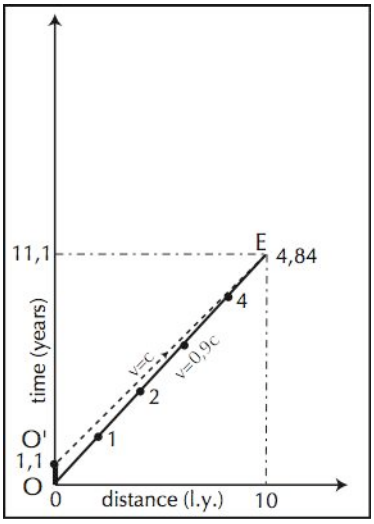
équivalent, puisque les horloges biologiques se réduisent en dernière analyse à des horloges atomiques. Le jumeau sédentaire est réellement plus jeune que son frère.

Y a-t-il pour autant violation du principe de relativité ? Non, car ce principe vaut pour des systèmes inertiels, c'est-à-dire en mouvement rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres. Le voyageur qui prend le départ subit une accélération. Pour faire demi-tour, il décélère et accélère. A son retour, il décélère à nouveau. Cela signifie que, par rapport à son frère, il change autant de fois de système de référence (passant d'un système au repos à un système à vitesse v, puis de ce système à un autre système à vitesse –v, avant de revenir au système initial). Il ne se trouve donc plus dans une situation d'équivalence. Langevin le premier a montré que parmi toutes les lignes d'univers qui relient deux événements dans l'espace-temps, celle qui possède le temps propre le plus long (et induit donc le vieillissement le plus rapide) est la trajectoire sans accélération, c'est-à-dire celle du frère sédentaire (voir encadré 2).
Dans ce contexte, l'histoire des jumeaux de Langevin, loin d'être un réel paradoxe, souligne simplement la limitation du principe de relativité. La symétrie des points de vue n'est vraie que pour les systèmes de référence ne subissant aucune accélération.

La réalité de « l'effet Langevin » a été mesurée avec précision grâce aux accélérateurs de particules du CERN. Des muons, particules instables qui se désintègrent normalement au bout de 1,5 microsecondes, ont été accélérés jusqu'à atteindre 0,9994 fois la vitesse de la lumière. Leur temps de vie apparent (dans le référentiel du laboratoire) atteint alors 44 microsecondes, soit trente fois plus que leurs « jumeaux » non accélérés – ceci en parfait accord avec la relativité restreinte.

Un exemple en chiffres

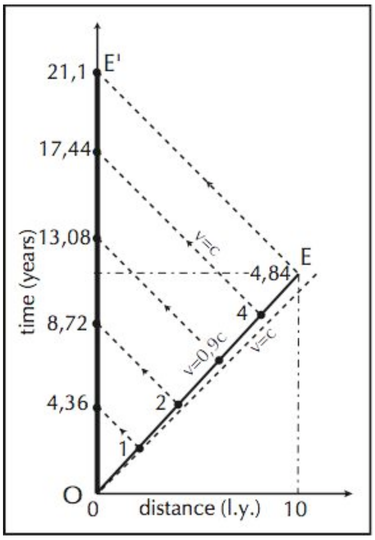
Imaginons que Sédentaire et Voyageur soient nos jumeaux. Sédentaire reste sur terre tandis que Voyageur part vers une étoile E située à dix années-lumière en voyageant à 90% de la vitesse de la lumière, soit 270 000 km/s, puis il revient sur terre à la même vitesse.
Le coefficient de dilatation du temps dans cet exemple vaut $\sqrt{}(1 - 0{,}9^2) = 0{,}436$, c'est-à-dire que lorsque Sédentaire lit « une seconde » sur son horloge, il lit « 0,436 seconde » sur l'horloge de Voyageur qui s'éloigne à 0,9c. Et vice versa (voir encadré 1).
En fait, les diagrammes d'espace-temps permettent de résoudre graphiquement le problème, sans aucun calcul numérique! Il suffit en effet de prendre pour unité de distance l'année-lumière et pour unité de temps l'année. Les trajets des rayons lumineux sont alors les droites inclinées à 45° (pointillés rouge). Ils définissent ce que l'on appelle le "cône de lumière". Toutes les autres trajectoires possibles (en bleu pour celle de Voyageur, en vert pour celle de Sédentaire) sont inclinées de moins de 45° par rapport à la verticale.



ALLER : CE QUE MESURE VOYAGEUR

En principe, il "faut" 11,1 ans pour parcourir 10 a.l. à la vitesse de 0,9 c. Cependant, d'après son horloge, Voyageur parvient en E au bout de seulement 4,84 années (11,1 x 0,436). En outre, arrivé en E, Voyageur voit la Terre telle qu'elle était en 0', c'est-à-dire 1,1 année après son départ dans l'horloge de Sédentaire.

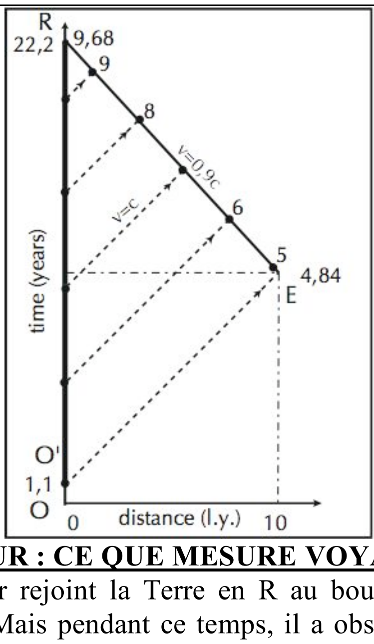
Conclusion : Voyageur a vu l'horloge de Sédentaire battre 4,36 fois plus lentement.



ALLER : CE QUE MESURE SEDENTAIRE

Sédentaire sait qu'au bout de 11,1 années, Voyageur a dû arriver en E. Toutefois, les rayons lumineux envoyés de E mettent 10 ans à lui parvenir, en E'. Sédentaire ne voit donc Voyageur arriver en E qu'au bout de 21,1 années.

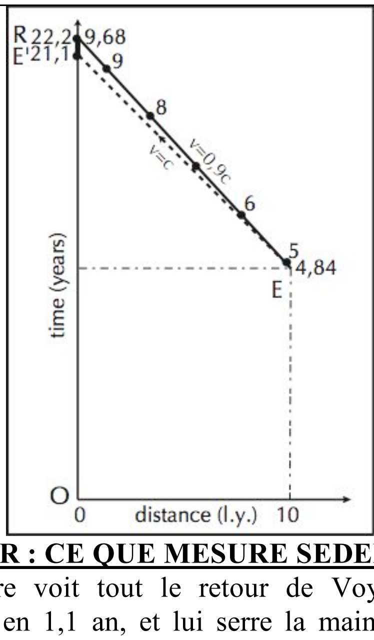
Conclusion : Sédentaire a vu l'horloge de Voyageur battre 4,36 fois plus lentement.



RETOUR : CE QUE MESURE VOYAGEUR

Voyageur rejoint la Terre en R au bout de 4,84 années. Mais pendant ce temps, il a observé 21,1 années s'écouler sur la terre.

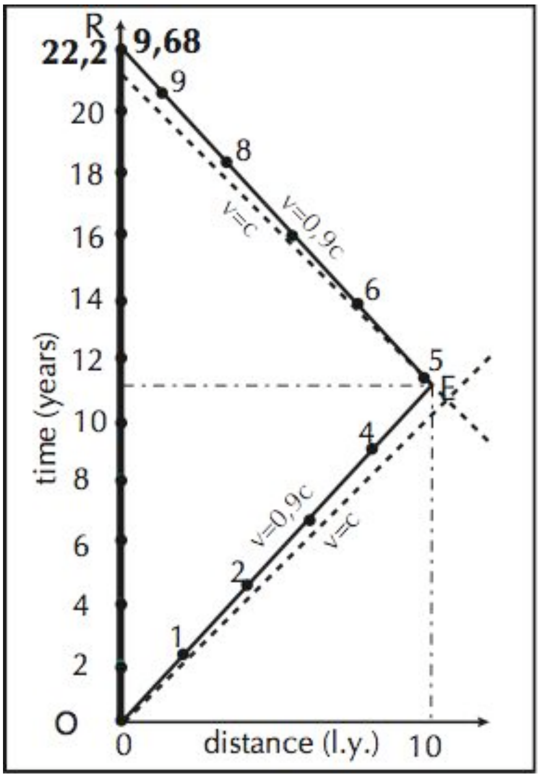
Conclusion : Voyageur a vu l'horloge de Sédentaire battre 4,36 fois plus vite



RETOUR : CE QUE MESURE SEDENTAIRE

Sédentaire voit tout le retour de Voyageur se dérouler en 1,1 an, et lui serre la main en R au bout de 22,2 ans

Conclusion : Sédentaire a vu l'horloge de Voyageur battre 4,36 fois plus vite



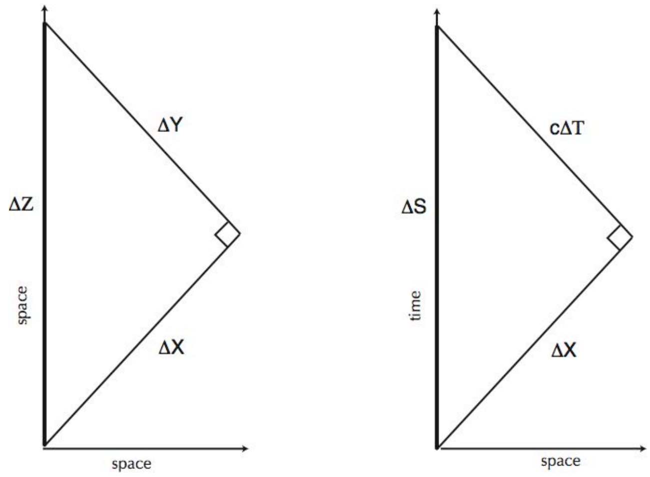
Voyage complet : lorsque Sédentaire et Voyageur se retrouvent en R, l'horloge de Sédentaire a battu 22,2 ans et l'horloge de Voyageur a battu 9,68 ans.

Ainsi, les deux aspects du paradoxe sont résolus de façon évidente par ces diagrammes d'espace-temps:

1/ pourquoi la situation globale n'est-elle pas symétrique ?
Fig. 1 & 2 : Durant le voyage aller les situations sont parfaitement symétriques car les deux référentiels inertiels de Voyageur et Sédentaire sont en translation uniforme à vitesse relative v.
Fig. 3 & 5 : De même, durant le voyage retour les situations sont parfaitement symétriques car les deux référentiels inertiels de Voyageur et Sédentaire sont en translation uniforme à vitesse relative - v.
Fig. 5 : Mais si l'on considère le voyage complet, les trajectoires sont physiquement asymétriques car en E, Voyageur a changé de référentiel inertiel (pour cela il a dû nécessairement changer de vitesse, donc subir une accélération).

2/ Pourquoi le temps propre de Voyageur est-il plus court que celui de Sédentaire?
On dit souvent que c'est à cause des accélérations et décélérations que doit subir Voyageur pour quitter Sédentaire en O, faire demi-tour en E et retrouver Sédentaire en R. Notons toutefois que les phases d'accélération en O et de décélération en R peuvent être supprimées si l'on considère que les trajectoires de Voyageur et de Sédentaire se croisent sans s'arrêter, leurs horloges étant comparées juste lors de leurs croisements. Reste le nécessaire changement de direction en E, se traduisant par une accélération du Voyageur. Mais c'est plutôt la géométrie particulière de l'espace-temps relativiste qui est responsable de la différence des temps propres. Voyons pourquoi.
Dans l'espace ordinaire, il est évident que dans n'importe quel triangle rectangle, le théorème de Pythagore indique de $\Delta Z^2 = \Delta X^2 + \Delta Y^2$, ce qui implique que $\Delta Z < \Delta X + \Delta Y$.

Dans l'espace-temps de la relativité restreinte (dit espace-temps de Minkowski), le théorème de Pythagore devient $\Delta S^2 = \Delta X^2 - c^2 \Delta T^2$, de sorte que ΔS est toujours plus long que $\Delta X + c\Delta T$! ΔS mesure justement le temps propre, et l'on voit bien qu'il s'annule pour $\Delta X = c\Delta T$, autrement dit pour $v = \Delta X/\Delta T = c$ (en ce sens, le photon, grain de lumière, ne vieillit jamais...).



Le paradoxe des jumeaux en Relativité Générale

Bien évidemment, le traitement complet du problème des jumeaux dans le cadre de la relativité générale donne les mêmes résultats[2]. En effet, le principe de relativité assure toujours que les lois de la physique gardent la même forme dans les systèmes de référence inertiels, et qu'il existe donc des transformations mathématiques permettant de passer d'un système inertiel à un autre. En relativité générale, c'est-à-dire en présence d'accélérations et de champs gravitationnels, les référentiels inertiels sont les systèmes en chute libre, et les équations qui permettent de passer d'un système à l'autre ne sont plus celles de Lorentz mais celles de Poincaré. Dans le cas du problème des jumeaux, cela implique, comme en relativité restreinte, que la situation n'est jamais symétrique. C'est toujours le voyageur ayant changé de référentiel inertiel qui aura vieilli moins vite que celui n'en ayant pas changé.
Avec la relativité générale, le temps acquiert une élasticité supplémentaire. Puisque les accélérations ralentissent les horloges, la gravitation ralentit aussi les horloges. Par exemple, une horloge au rez-de-chaussée bat plus lentement qu'une horloge au premier étage, mais la différence est infime. On a su fabriquer des horloges suffisamment précises pour mesurer l'élasticité du temps dans un champ de gravité aussi faible que celui de la Terre. En 1971, l'US Naval Observatory a fait embarquer des horloges au césium extrêmement précises à bord de deux avions, l'un volant vers l'Ouest, l'autre vers l'Est. Au retour, les horloges volantes ont été comparées à des horloges strictement identiques restées au sol. Dans cette expérience, deux effets entraient en jeu : un effet de relativité restreinte dû à la vitesse des avions (environ 1000 km/h), et un effet de relativité générale dû à la plus faible pesanteur en altitude. L'horloge qui avait voyagé vers l'Ouest avançait ainsi de 273 milliardièmes de seconde, celle qui avait voyagé vers l'Est retardait de 59 milliardièmes de seconde - en parfait accord avec les calculs relativistes.

[2] Contrairement à ce qui est malheureusement affirmé dans l'encyclopédie multimédia Hachette utilisée par de nombreux étudiants et professeurs de physique du secondaire!

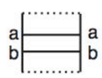
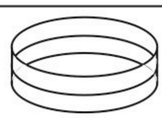
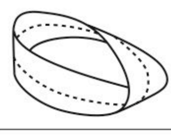
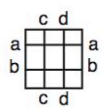
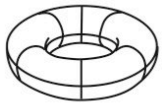
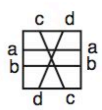
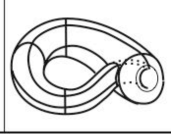
Play Space

Le paradoxe semble ainsi résolu pour de bon. Sauf si surgit une question bizarre : que se passe-t-il si le jumeau rejoint son frère sans jamais subir d'accélération ? Il suffirait pour cela que l'espace soit fermé, tel un cylindre ou un tore, pour prendre un exemple d'espace à deux dimensions, plus facile à visualiser. Ce type d'espace est parfaitement euclidien, accepte une physique en tous points décrite par la relativité restreinte et ne peut a priori être exclu comme modèle de l'espace cosmique. Or il repose, et avec acuité, le paradoxe des jumeaux.

Mais avant d'approfondir la question, penchons-nous sur la structure globale des espaces, autrement dit donnons quelques éléments de topologie. La topologie est une discipline vaste et variée qui étudie les espaces du point de vue de leurs caractéristiques globales, telles que : nombre de dimensions, courbure, caractère ouvert ou fermé, connexité, orientabilité…

Pour ne parler que des espaces à trois dimensions de type euclidien (c'est-à-dire non courbés), il en existe dix-huit variétés différentes, toutes construites à partir de l'espace euclidien infini bien connu R^3. Les variantes s'obtiennent en identifiant bord à bord de diverses façons une portion donnée de cet espace.

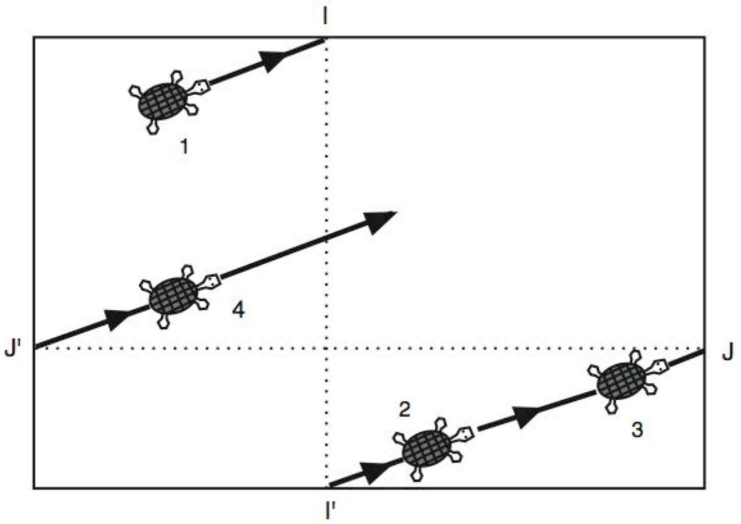
Afin de faciliter les descriptions, il est utile de se placer plutôt dans un contexte visualisable, c'est-à-dire dans les espaces à deux dimensions. Il existe quatre variétés de surfaces euclidiennes en plus du plan euclidien infini bien connu R^2, toutes construites à partir de lui. Le cylindre s'obtient par identification (on peut penser à un « collage ») bord à bord des côtés opposés d'une bande infinie à bords parallèles, et le ruban de Möbius en inversant les points (en tordant un bord) avant ce même collage. Le tore s'obtient en procédant à un collage des bords opposés d'un rectangle, et la bouteille de Klein en tordant ce deuxième bord avant le collage.

Name	Fundamental domain and identifications	Shape	Closed	Orientable
cylinder			NO	YES
Möbius band			NO	NO
torus			YES	YES
Klein bottle			YES	NO

Les quatre surfaces euclidiennes multiconnexes

La deuxième colonne indique la forme du polygone fondamental et les identifications de points possibles, la troisième colonne indique le caractère fermé (aire finie) ou ouvert (aire infinie) de la surface, la quatrième colonne sa propriété d'être orientable ou non. Quand le domaine fondamental est un digone (cylindre, bande de Möbius), la surface est ouverte ; sinon elle est fermée.

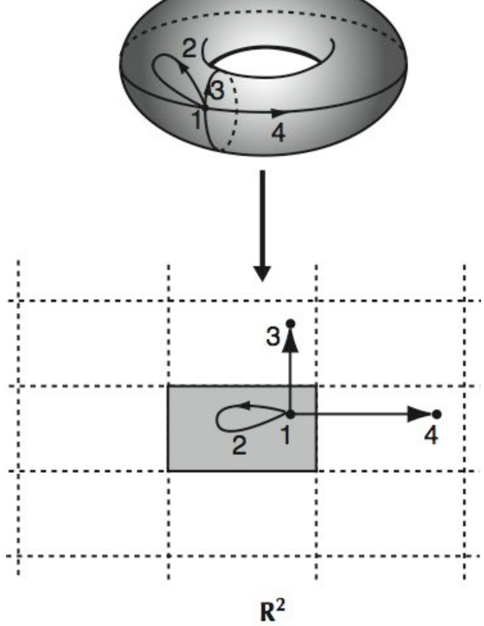
Contrairement à ce qu'on pourrait croire, toutes ces surfaces n'ont pas de courbure intrinsèque. La somme des angles d'un triangle y est toujours égale à 180° et elles ne sont courbées que dans une troisième dimension, impossible à percevoir pour un être qui vivrait dans le plan. On dit qu'elles sont localement euclidiennes.
Le rectangle de départ est nommé « domaine fondamental ». Les transformations géométriques qui identifient les points bord à bord définissent la façon dont les objets vont se déplacer de manière continue dans cet espace, quittant le rectangle par un bord pour aussitôt réapparaître d'un autre côté.



Promenade sur un tore

Comme dans ces jeux d'arcade où les personnages qui sortent par un côté rentrent par le côté opposé, la tortue traverse le côté supérieur du carré en *I*, réapparaît par le côté inférieur, au point équivalent *I'*, poursuit son chemin en ligne droite, atteint le côté droit en *J*, réapparaît en *J'*, et ainsi de suite. Le tore est donc équivalent à un rectangle dont les bords opposés sont « identifiés » deux à deux.

On peut également visualiser l'espace de manière continue en répétant un grand nombre de fois le domaine fondamental. On engendre ainsi l'espace de revêtement universel, dans lequel chaque point est répété autant de fois que le domaine lui-même. On peut ainsi tracer dans l'espace de revêtement les différents trajets reliant un point à lui-même, soit en sortant du domaine fondamental pour rejoindre une réplique, et il s'agit d'un trajet qui « fait le tour » de l'espace, soit en revenant vers le point original dans le domaine fondamental, et il s'agit d'un trajet en forme de lacet qu'on pourrait resserrer.



De l'espace multiconnexe à l'espace de revêtement universel.

Le tore a pour domaine fondamental un rectangle. En répétant de proche en proche le rectangle on engendre l'espace de revêtement universel — ici le plan euclidien R^2. Les trajets 2,3,4 relient tous le point 1 à lui-même. 2 est un lacet resserrable, 3 et 4 ne le sont pas car ils font le tour de l'espace.

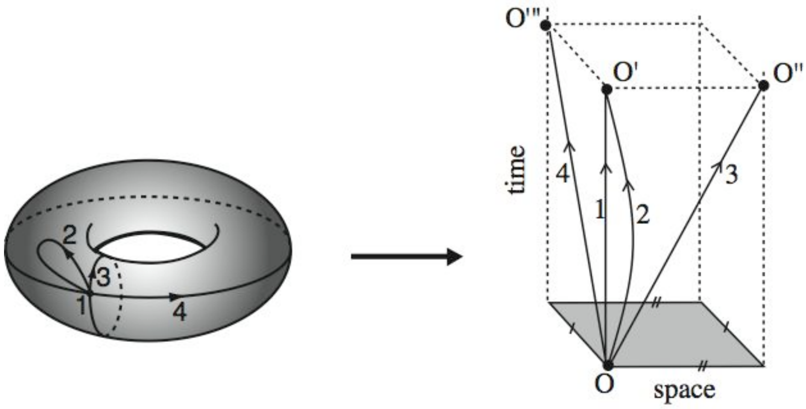
Le paradoxe des jumeaux dans un espace fini

Revenons à notre hypothèse où l'expérience des jumeaux se déroule dans un espace fermé dans au moins une direction. Dans un tel espace, les deux frères sont susceptibles de se retrouver au même endroit non parce que le voyageur est revenu sur ses pas, mais parce qu'il a fait le tour de l'univers sans changer de direction. La situation devrait donc rester symétrique et leurs points de vue se montrer réversibles. Or il n'en est rien. Le voyageur, à nouveau, est plus jeune que son frère. Et ce n'est toujours pas un paradoxe. Mais il faut, pour le comprendre, envisager d'une manière plus large la notion de symétrie.

Pour la facilité du raisonnement, on peut visualiser la situation dans un espace à deux dimensions seulement (plus le temps). Il existe cinq variétés de surfaces à géométrie euclidienne, et nous choisirons d'illustrer le propos dans un tore, qui se trouve être une surface fermée dans les deux directions. Les conclusions seront exactement transposables dans le cas de l'espace-temps à quatre dimensions (trois spatiales plus une temporelle). Afin d'illustrer tous les scénarios possibles, élargissons l'exemple des jumeaux à une famille de quadruplés. Le frère n°1 reste chez lui, au point O, et sa ligne d'univers peut être identifiée avec l'axe du temps, de sorte qu'il arrive en O' sur le diagramme d'espace-temps. Le frère n°2 quitte la maison au temps t=0, voyage en fusée, rebrousse chemin et vient rejoindre le frère n°1 en O'. Les frères n° 3 et 4 partent également au temps t=0 mais voyagent toujours en ligne droite selon des lignes d'univers non accélérées s'éloignant de O. Au bout d'un certain temps (respectivement O'' et O'''), tous deux se retrouvent en O', parce que l'espace est fermé. L'un a bouclé une circonférence autour du grand axe du tore, et l'autre autour du petit axe[3]. Quel est maintenant l'âge comparé de nos quadruplés ?

---

[3] Pour simplifier la démonstration nous avons supposé que les voyageurs 3 et 4 connaissaient par avance la longueur de leur trajet, et qu'en fonction de cela ils ont adapté leur vitesse de façon à arriver ensemble en O'. Pour cela, il ne faut pas que le "tour de l'espace" soit trop grand, de façon à ce qu'ils puissent effectuer leur boucle à une vitesse inférieure à celle de la lumière! Dans le cas général, partant dans des directions arbitraires et



De l'espace à l'espace-temps

Le frère n°2 ne pose guère de problème, puisqu'il tombe sous le coup du paradoxe standard. Il a suivi une ligne d'univers accélérée, il est donc plus jeune que son frère. Mais les frères 3 et 4, eux, n'ont à aucun moment changé de système de référence[4]. Et pourtant, ils sont plus jeunes également. C'est que leur état de mouvement, bien que non accéléré, n'est pas pour autant équivalent à celui du frère n°1. Cette asymétrie s'explique par des raisons topologiques profondes qui mettent en jeu la notion de multiconnexité.

Si l'on dessine des courbes fermées sur une surface quelconque, deux cas de figure sont possibles. Soit le « lacet » ainsi tracé peut être resserré sans rencontrer d'obstacle et se résorber en un point, c'est le cas de toutes les courbes fermées sur le plan euclidien ou sur une sphère, par exemple. Soit le lacet ne peut être resserré jusqu'au bout parce qu'il entoure un « trou », comme dans le cas du cylindre ou du tore. Ces surfaces ont une topologie dite « multiconnexe ». Les trajectoires (ou lacets) dans un tel espace sont dites homotopiques ou non, selon qu'on peut les réduire ou non l'une à l'autre au moyen d'une transformation continue. Dans notre exemple, les trajectoires des frères n°1 et n°2 sont homotopiques, car la boucle du frère n°2 ne « fait pas le tour » de l'univers, et peut donc être resserrée en un point. Pour autant, elles ne sont pas équivalentes car seul le frère n°1 est resté dans un référentiel inertiel. On peut montrer que parmi toutes les courbes homotopiques allant de O à O', une seule correspond à un observateur inertiel, et que c'est donc lui qui vieillira le plus, comme prévu dans le paradoxe standard.
Mais qu'en est-il des frères n°3 et n°4 ? Ils suivent des trajectoires qui bouclent autour de l'une des deux directions du tore. D'un point de vue topologique, on peut leur assigner un indice d'enroulement, c'est-à-dire un nombre entier qui compte le nombre d'enroulements autour de la surface. Dans le cas d'un tore, l'indice d'enroulement est un couple d'entiers, le premier comptant le nombre de tours autour du petit axe, et le second autour du grand axe. Les frères n°3 et n°4 possèdent respectivement les indices d'enroulement (1,0) et (0,1). L'indice d'enroulement ainsi défini est un invariant topologique pour chaque voyageur. Aucun changement de coordonnées ou de cadre de référence ne peut en modifier la valeur. Les voyageurs qui empruntent des chemins possédant un indice d'enroulement différent se trouvent dans des classes d'homotopie différentes, c'est-à-dire dans des situations

---

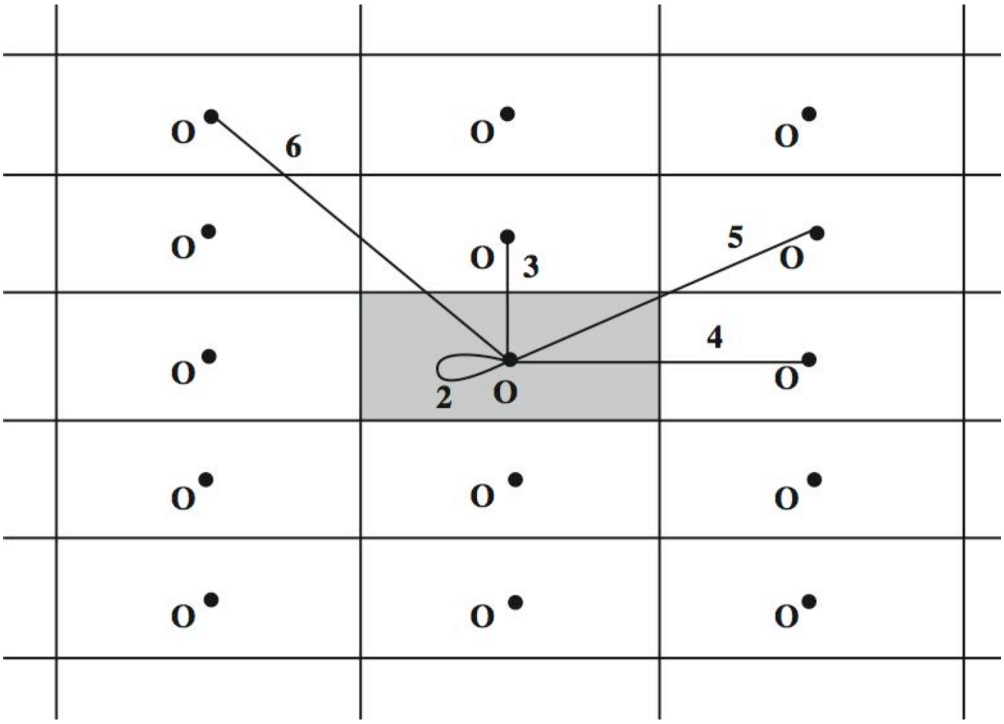
sans connaître a priori la taille et la forme de l'espace, il n'y a aucune chance pour que 3 & 4 arrivent en même temps que 2!

[4] . L'accélération de départ peut être négligée si l'on considère que les trajectoires de 1 & 2 se croisent sans s'arrêter, leurs horloges étant comparées juste lors de leurs croisements; voir encadré 2.

topologiquement non symétriques, ce qui explique que le frère n°1 puisse être plus âgé que les frères n°3 et n°4. Et le paradoxe est levé. Les jumeaux vieillissent différemment même sans être accélérés, parce que toutes les trajectoires d'un espace multiconnexe ne sont pas équivalentes. Ainsi, pour que le temps propre des jumeaux soit équivalent, il ne suffit pas que leur mouvement soit équivalent en termes d'accélération, il faut aussi que leurs lignes d'univers se trouvent inscrites de manière équivalente dans l'espace-temps, cette dernière symétrie étant réalisée à travers les classes d'homotopie. La topologie de l'espace impose donc, parmi les référentiels inertiels, des référentiels privilégiés, et même si le principe de relativité reste valide localement, il ne l'est plus à l'échelle globale. C'est bien le signe que la théorie de la relativité n'est pas une théorie globale de l'espace-temps.

La solution complète

Mais l'on voudrait encore préciser la description. Est-il possible de comparer non seulement l'âge des voyageurs avec celui du frère sédentaire, mais également l'âge des voyageurs entre eux ? Il est clair que l'indice d'enroulement à lui seul ne fournit pas suffisamment d'information, sauf dans le cas du cylindre, dont l'indice d'enroulement se réduit à un seul nombre, et où l'on peut dire que, pour un parcours reliant deux points donnés, plus l'indice d'enroulement est grand, plus le temps propre (donc le vieillissement) est ralenti. Mais pour un tore, dont les deux axes sont de longueur inégale, le résultat dépend du rapport de ces longueurs. Si le petit axe est beaucoup plus petit que le grand, un voyageur pourrait faire plusieurs fois le tour du petit axe, avec une indice d'enroulement (n,0), tout en vieillissant plus que celui qui ne ferait qu'un tour du grand axe, avec un indice d'enroulement (0,1). La situation serait encore beaucoup plus complexe dans le cas d'un double tore (qui n'est plus une surface euclidienne mais hyperbolique) pour lequel l'indice d'enroulement prend la forme d'un quadruplet d'entier, rendant très difficile la comparaison des âges des voyageurs. Pour résoudre la question complètement, il est indispensable d'introduire des informations métriques. Il existe en fait un critère très simple pour procéder à des comparaisons chiffrées entre les différents frères. Il suffit, pour l'extraire facilement, de représenter l'espace de départ sous la forme de son *espace de revêtement universel*. Comme on l'a vu, le tore est construit à partir d'un rectangle dont on « colle » les côté opposés deux à deux. Si l'on recopie ce rectangle de façon à couvrir le plan, on symbolise l'espace tel qu'il apparaît à l'observateur situé en O, c'est-à-dire infini dans toutes les directions. Tous les points O sont cependant identiques, comme peuvent l'être deux points géographiques qui se répètent aux deux extrémités d'un planisphère. Dans cette représentation, le trajet du frère n°2 apparaît comme une boucle qui revient au point O initial, sans passer par l'une de ses répliques, tandis que les trajets des frères n°3 et n°4 sont des géodésiques qui relient le point O à une réplique de lui-même, avec des indices d'enroulement de (1,0) et (0,1) respectivement. Il y a bien des façons de décrire une boucle dans un espace fermé, et on pourrait ajouter les trajectoires n°5 et n°6, avec les indices (1,1) et (2,1) par exemple. Pour comparer les âges des différents frères (entre-temps devenus sextuplés), il suffit maintenant de comparer la longueur des segments qui relient la position de O dans son domaine fondamental, avec sa position au bout des différent trajets empruntés par les voyageurs. Plus ce segment est long, plus le voyageur vieillit lentement (figure). Voilà un moyen simple de résoudre un problème en le transposant de la topologie multiconnexe à son espace de revêtement universel.



En conclusion, le paradoxe des jumeaux peut se ramener à deux cas de figure :

1) Les jumeaux appartiennent à la même classe d'homotopie (frères n°1 et n°2 dans l'exemple) et possèdent donc le même indice d'enroulement. Néanmoins, seul l'un des deux (n°1) peut parcourir dans l'espace-temps un trajet qui relie le point de départ et le point d'arrivée tout en restant dans un seul système inertiel. Le frère n°2, lui, change de système de référence via une accélération locale qui rend sa situation non symétrique par rapport au premier. Il vieillit moins vite.
2) Les jumeaux peuvent se retrouver en un même point sans qu'aucun des deux ait changé de système d'inertie, mais dans ce cas ils ont suivi des trajets qui ne présentent pas le même degré d'enroulement. Leur situation ne sont pas symétriques parce qu'il n'appartiennent pas à la même classe d'homotopie et le jumeau le plus vieux est celui qui a effectué le trajet le plus court.

Le paradoxe des jumeaux, selon qu'il est invoqué en relativité restreinte "standard" ou dans un espace multiconnexe permet donc de traquer deux erreurs de raisonnement différentes. La première tient à la définition du système de référence inertiel. Celle-ci est mal comprise lorsque l'on affirme qu'un jumeau ne peut pas vieillir plus vite que l'autre. La seconde tient à la notion de brisure de symétrie d'espace-temps, qui ne peut pas se limiter au cas des systèmes accélérés mais doit tenir compte des classes d'homotopie lorsque l'on raisonne dans une topologie complexe.

A lire :

Jean-Pierre Luminet, L'univers chiffonné, Fayard, 2001
Jean-Philippe Uzan et al., Twin paradox and Space Topology, European Journal of Physics (2002), **23**, 277-284