

# **La théorie de la relativité d'échelle: réflexions pour une application à l'halieutique**

**Laurent Nottale**

UMR CNRS 8631. DAEC, Observatoire de Paris-Meudon. 92195 Meudon Cedex

*Résumé.* On montre que sous les trois hypothèses suivantes, (i) très grand nombre de trajectoires virtuelles, (ii) chaque trajectoire est fractale, (iii) irréversibilité microscopique, l'équation de la dynamique classique peut s'intégrer sous forme d'une équation de Schrödinger généralisée. Ceci conduit à proposer une nouvelle méthode d'approche des problèmes de morphogenèse, dans laquelle des structures hiérarchiques sont naturellement produites (en dépendance des conditions aux limites et des forces en présence) et sont décrites en terme de densité de probabilité. Un exemple d'application est donné dans le cas où la force appliquée est celle d'un oscillateur harmonique.

## **1. Introduction**

Dans le domaine de l'astrophysique extragalactique et de la cosmologie, un des principaux problèmes posé actuellement est celui de l'existence de structures sur une large gamme d'échelles. Un enjeu important de cette science est ainsi la construction d'une théorie de la formation et de l'évolution des grandes structures de l'univers.

Il est remarquable de rencontrer, dans le domaine de l'halieutique, qu'on pourrait penser si différent a priori, le même type de problèmes et de préoccupations (voir les communications du présent colloque), comme en témoignent certains des thèmes débattus ici:

"La prise en compte de la dimension spatiale des phénomènes est une des grandes préoccupations actuelles de l'ensemble des sciences halieutiques."

"Les hétérogénéités spatiales concernent en effet tous les aspects du système pêche."

"Étudier la diversité spatiale, son hétérogénéité et sa structuration, (..) s'avère ainsi de plus en plus incontournable pour analyser et comprendre la dynamique des systèmes halieutiques..."

"Du banc au stock et à l'écosystème: quelles dynamiques à quelles échelles ? Quelles échelles pertinentes pour la recherche halieutique ?"

"Du local au global..."

La physique est depuis longtemps confrontée au problème de la répartition spatiale très inhomogène de la matière dans l'univers. Cette répartition des structures spatiales est souvent hiérarchisée, que ce soit dans le domaine microscopique (quarks dans les nucléons, nucléons dans le noyau, noyau et électrons dans l'atome, atome dans la molécule, ...) ou macroscopique (étoiles et

leur système planétaire formant des amas, se regroupant avec la matière interstellaire, elle-même fractale, en galaxies, celles-ci formant à leur tour des paires, des groupes et des amas, qui appartiennent à des superamas de galaxies, eux-mêmes sous-ensembles des très grandes structures de l'univers). Ce qui frappe dans ces deux domaines est que c'est le vide et non la matière qui domine, même à de très grandes échelles où l'on pensait auparavant trouver une distribution homogène (il s'agit là d'une des grandes découvertes de cosmologie observationnelle de ces vingt dernières années).

Nous tenterons ici d'évoquer de nouvelles méthodes récemment proposées en physique pour résoudre ce type de problème, dans l'espoir que certaines d'entre elles puissent se révéler utiles en halieutique, bien sûr après réanalyse et réadaptation à la spécificité d'un autre domaine.

La théorie de la relativité d'échelle (Nottale, 1993) a été construite précisément pour traiter des questions de structuration en échelle. On y prend en compte une intervention explicite des échelles d'observation, ou plus généralement de celles qui sont caractéristiques des phénomènes étudiés, ainsi que des relations entre ces échelles. De plus on verra comment une description de structures à toutes les échelles (ou sur une large gamme) implique une dynamique nouvelle dont le comportement devient du type quantique plutôt que classique. Or une telle dynamique conduit naturellement à une morphogénèse, étant génératrice de structures organisées de manière hiérarchiques, en rapport avec les conditions extérieures (forces et conditions aux limites).

## **2. Principe de relativité d'échelle**

La théorie de la relativité d'échelle consiste à appliquer aux transformations d'échelle (en particulier aux résolutions spatio-temporelles qui caractérisent le système étudié) le principe de relativité, qui exige dans la formulation d'Einstein (1916) que les lois de la nature soient valides dans tout système de coordonnées, quel que soit son état. Depuis Galilée, ce principe avait été appliqué aux états de position (origine et orientation des axes) et de mouvement du système de coordonnées (vitesse, accélération), états qui ont la propriété de n'être jamais définissables de manière absolue, mais seulement pour un repère relativement à un autre. Il en est de même en ce qui concerne les problèmes d'échelle. L'échelle d'un système ne peut être définie que par rapport à un autre système (seuls des rapports d'échelle ont un sens, jamais une échelle absolue), et possède donc bien la propriété fondamentale de relativité. On ré-interprète alors les résolutions, non plus seulement comme propriété de l'appareil de mesure et/ou du système mesuré, mais comme propriété intrinsèque à l'espace-temps, caractérisant l'état d'échelle du référentiel au même titre que les vitesses caractérisent son état de mouvement. Le principe de relativité d'échelle consiste alors à demander que les lois fondamentales de la nature s'appliquent quel que soit l'état d'échelle du système de coordonnées.

Comment mettre en oeuvre un tel principe ? Seule une géométrie dans

laquelle les propriétés des divers objets dépendent explicitement des résolutions spatio-temporelle lui est naturellement adaptée. Or ceci est précisément l'essence de la géométrie fractale (Mandelbrot, 1975, 1982). On est donc conduit à généraliser une nouvelle fois le concept d'espace-temps et à travailler dans le cadre d'un espace-temps fractal (Ord, 1983; Nottale & Schneider, 1984; Nottale, 1989, 1993; El Naschie, 1995). On prend alors en compte des systèmes de coordonnées (et des trajectoires, en particulier les géodésiques de l'espace fractal) eux-mêmes fractals, c'est-à-dire possédant une structure interne. Nous ne nous concentrerons pas ici sur les descriptions possibles d'une telle structure, qui porte sur l'espace des échelles (voir Nottale, 1992, 1993, 1996), mais plutôt sur ses effets induits sur les déplacements dans l'espace ordinaire. Nous allons voir que la combinaison entre eux de ces effets conduit à l'introduction d'un outil de description du type de celui de la mécanique quantique (mais avec une interprétation différente). On y abandonne la description classique en terme de conditions initiales et de trajectoires individuelles déterministes, au bénéfice d'une description statistique en terme d'amplitudes de probabilité.

### 3. Dynamique induite

Rappelons l'essence de la méthode utilisée dans le cadre de la relativité d'échelle pour passer d'une dynamique classique à une dynamique de type quantique.

Les trois conditions qui permettent de transformer l'équation fondamentale de la dynamique en une équation de Schrödinger sont les suivantes:

- (i) il existe un très grand nombre (à la limite, une infinité) de trajectoires potentielles;
- (ii) chacune de ces trajectoires est une courbe fractale; on peut considérer successivement les cas: (i) d'une dimension fractale constante  $D_F = 2$  (Nottale, 1993), qui correspond par exemple au mouvement brownien, (ii) puis d'autres valeurs de la dimension (Nottale, 1995, 1996), (iii) d'une dimension variable, devenue la composante d'un vecteur dans le cadre des transformations d'échelle log-lorentziennes de la relativité d'échelle restreinte (Nottale, 1992, 1996); (iv) d'une dimension variable dans le cadre de transformations non-linéaires incluant une "dynamique d'échelle" (Nottale, 1997);
- (iii) il y a irréversibilité au niveau infinitésimal, c'est-à-dire non-invariance dans la réflexion de l'élément différentiel de temps  $dt \rightarrow -dt$ .

La première condition conduit à adopter une description de type "fluide", où l'on ne considérera plus seulement la vitesse d'une trajectoire individuelle, mais le champ de vitesse  $v[x(t),t]$  de toutes les trajectoires virtuelles.

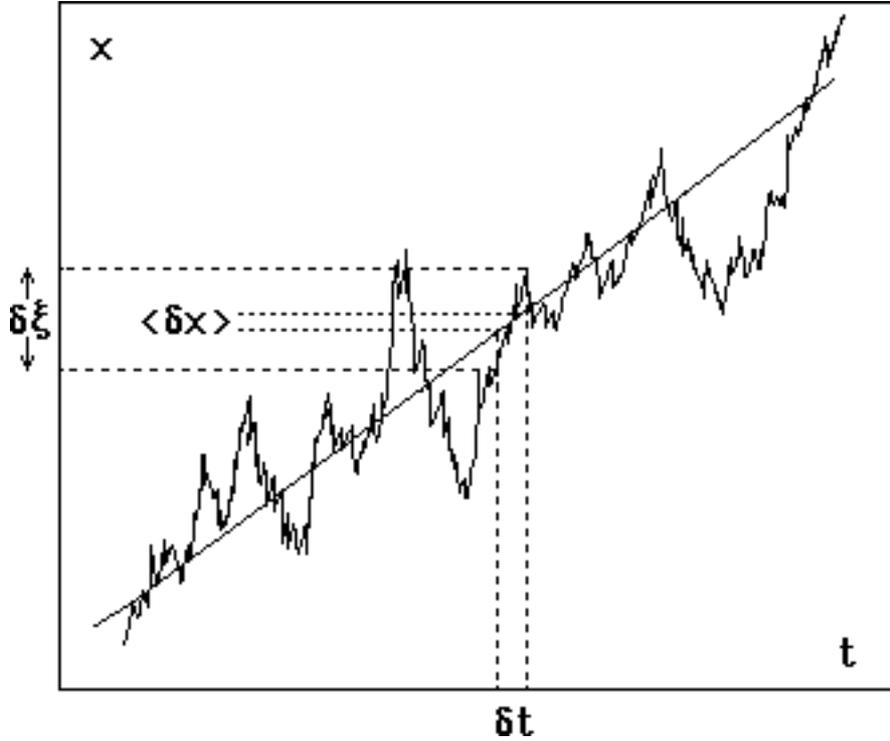
La deuxième condition mène à décomposer les déplacements élémentaires,

$$dX^i = dx^i + d\xi^i \quad . \quad (1)$$

sous forme d'une moyenne,  $dx = v dt$ , et d'une fluctuation  $d\xi$ , caractérisée par

une loi de comportement fractale (voir figure 1):

$$d\xi \propto dt^{1/D_F} . \quad (2)$$



**Figure 1.** Décomposition de la composante du mouvement sur un axe en terme d'une moyenne "classique" et d'une fluctuation fractale. Alors que le déplacement élémentaire moyen et l'écart temporel sont des infinitésimaux du même ordre,  $dx \propto dt$ , il n'en est plus de même de la fluctuation fractale, dont la relation à l'intervalle de temps,  $d\xi^{D_F} \propto dt$ , dépend de la dimension fractale  $D_F$ .

La troisième condition a pour conséquence un dédoublement des vitesses, y compris au niveau des vitesses moyennes et, plus généralement, un dédoublement de l'opérateur de dérivation par rapport au temps.

On est ainsi amené à introduire un double processus tridimensionnel

$$dX_{\pm}^i = dx_{\pm}^i + d\xi_{\pm}^i , \quad (3)$$

dans lequel  $dx_{\pm}^i = v_{\pm}^i dt$ ,  $\langle d\xi_{\pm}^i \rangle = 0$  et

$$\left\langle \frac{d\xi_{\pm}^i}{dt} \frac{d\xi_{\pm}^j}{dt} \right\rangle = \pm \delta^{ij} \left( \frac{2D}{dt} \right)^{2-2/D_F} . \quad (4)$$

(On a fait ici  $c = 1$  pour simplifier l'écriture;  $\delta^{ij}$  représente le symbole de Kronecker). Ici  $D$  est un paramètre d'échelle fondamental qui caractérise le comportement fractal des trajectoires. Ce paramètre détermine la transition essentielle qui apparaît dans un tel processus entre le comportement fractal à petite échelle (où les fluctuations dominent) et non fractal à grande échelle (où le

mouvement classique moyen redevient dominant). Le paramètre  $D_F$  dans l'exposant est la dimension fractale. Nous considèrerons dans un premier temps une dimension  $D_F = 2$ , puis nous évoquerons rapidement un cas plus général dans le prochain paragraphe.

Une représentation simple du dédoublement de variables dû à l'irréversibilité consiste en l'utilisation de nombres complexes. On définit un opérateur complexe de dérivation par rapport au temps,

$$\frac{d}{dt} = \frac{1}{2} \left( \frac{d_+ + d_-}{dt} - i \frac{d_+ - d_-}{dt} \right), \quad (5)$$

puis une vitesse moyenne complexe qui résulte de l'action de cet opérateur sur la variable de position:

$$V^i = \frac{d}{dt} x^i = V^i - i U^i = \frac{v_+^i + v_-^i}{2} - i \frac{v_+^i - v_-^i}{2}. \quad (6)$$

Ainsi, à la limite classique où  $v_+^i = v_-^i$ , la partie réelle de cette vitesse complexe s'identifie à la vitesse classique tandis que la partie imaginaire disparaît. Le choix ici d'un signe moins pour la partie imaginaire n'a rien d'essentiel: il permet, comme on le verra, d'obtenir une équation de Schrödinger portant sur la fonction d'onde  $\psi$  (qui sera définie à partir de l'action dans ce qui suit). Le choix inverse aurait fourni l'équation de sa complexe conjuguée  $\psi^*$ , ce qui serait équivalent sachant que les rôles de  $\psi$  et  $\psi^*$  sont symétriques dans la définition de la densité de probabilité  $P = \psi\psi^*$ .

Après avoir défini les lois des déplacements élémentaires dans un tel processus fractal et localement irréversible, il nous faut maintenant analyser les effets de ces déplacements sur d'autres grandeurs physiques. Considérons une fonction  $f(X(t), t)$ . Sa dérivée totale par rapport au temps s'écrit:

$$\frac{d f}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla f \cdot \frac{dX}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j} \frac{dX_i dX_j}{dt}. \quad (7)$$

On peut alors calculer les dérivées "avant" et "arrière" de  $f$ . Dans ce calcul, la valeur moyenne de  $dX/dt$  devient  $d_{\pm}x/dt = v_{\pm}$ , tandis que  $\langle dX_i dX_j \rangle$  se réduit à  $\langle d\xi_{\pm i} d\xi_{\pm j} \rangle$ , si bien que le dernier terme de l'Eq. (7) se transforme en un Laplacien du fait de l'Eq. (4). On obtient alors:

$$d_{\pm}f/dt = (\partial/\partial t + v_{\pm} \cdot \nabla \pm D \Delta) f. \quad (8)$$

En combinant enfin ces deux dérivées, on obtient l'expression de l'opérateur complexe de dérivation par rapport au temps:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V \cdot \nabla - i D \Delta. \quad (9)$$

Il contient deux termes imaginaires supplémentaires,  $-i U \cdot \nabla$  et  $-i D \Delta$ , par

rapport à l'opérateur de dérivation totale ordinaire,  $d/dt = \partial/\partial t + V \cdot \nabla$ .

Nous pouvons maintenant ré-écrire l'équation fondamentale de la dynamique en utilisant cet opérateur de dérivation: celle-ci prendra alors automatiquement en compte les nouveaux effets considérés. On obtient:

$$m \frac{d^2}{dt^2} x = -\nabla \phi . \quad (10)$$

où  $\phi$  est un terme de potentiel.

Plus généralement, on peut reprendre le déroulement de la construction de la mécanique lagrangienne avec ce nouvel outil (voir Nottale, 1993, 1996, 1997). Le caractère complexe de la vitesse  $V$  implique celui de la fonction de Lagrange, donc de l'action  $S$ .

Une fonction d'onde  $\psi$  s'introduit alors très simplement comme une ré-expression pour cette action complexe:

$$\psi = e^{iS/2mD} . \quad (11)$$

Elle est reliée à la vitesse complexe comme suit:

$$V = -2i D \nabla (\ln \psi) . \quad (12)$$

Nous pouvons maintenant changer d'outil de description et écrire l'équation d'Euler-Newton ci-dessus (10) en fonction de cette fonction d'onde:

$$2i m D \frac{d}{dt} (\nabla \ln \psi) = \nabla \phi . \quad (13)$$

Après quelques calculs, cette équation s'intègre sous forme d'une équation de Schrödinger (Nottale, 1993):

$$D^2 \Delta \psi + i D \frac{\partial}{\partial t} \psi - \frac{\phi}{2m} \psi = 0 , \quad (14)$$

On retrouverait l'équation de la mécanique quantique standard par le choix  $D = \hbar / 2m$ . En posant  $\psi \psi^* = \rho$ , on trouve que la partie imaginaire de cette équation est l'équation de continuité,

$$\partial \rho / \partial t + \text{div}(\rho V) = 0, \quad (15)$$

ce qui justifie l'interprétation de  $\rho$  comme une densité de probabilité.

#### 4. Dimension différente de 2

Le cas d'une dimension fractale  $D_F = 2$ , malgré son grand domaine d'application (il correspond aux processus de Wiener du mouvement brownien) peut se révéler n'être pas assez général. Il est aisé, en première approximation, de

traiter des dimensions peu différentes de 2. Comme remarqué par Mandelbrot et Van Ness (1968), en écrivant le carré de la fluctuation sous la forme  $\langle d\xi^2 \rangle = 2 D dt (\delta t/\tau)^{(2/D_F)-1}$ , on peut représenter les effets de l'écart à la dimension 2 sous forme d'une dépendance d'échelle explicite. Ceci peut se faire en introduisant un paramètre  $D$  dépendant d'échelle:

$$D(\delta t) = D_0 (\delta t/\tau)^{(2/D_F)-1}, \quad (16)$$

ce qui conduira à une équation de Schrödinger généralisée (14) ayant cette propriété de dépendance d'échelle (lente) explicite (Nottale, 1995, 1996). Une autre méthode envisageable consisterait à utiliser la dérivation fractionnaire, en particulier sa version locale établie par Kolwankar et Gangal (1998).

## 5. Modèle Hiérarchique

Le processus décrit dans les paragraphes précédents fournit naturellement une structuration hiérarchisée. En effet, l'équation de Schrödinger généralisée ci-dessus s'applique à la distribution de probabilité des positions de "particules" préalablement définies. Mais ce concept de "particule" consiste ici précisément à décrire le mouvement et la répartition d'objets ou de groupes d'objets indépendamment de leur structure interne. Le résultat obtenu (décrit par la densité de probabilité) est que de telles particules se regroupent elles-même en des structures. Autrement dit, elles forment un nouvel objet à une échelle supérieure. Dans un changement d'échelle, le nouvel objet peut être pris comme "particule", et si les conditions de base dont nous sommes partis restent respectées (grand nombre de trajectoires virtuelle, caractère fractal de chaque trajectoire, irréversibilité), une nouvelle équation de Schrödinger généralisée pourra lui être appliquée, ceci impliquant la formation d'un nouveau niveau hiérarchique. Il faut remarquer qu'il n'y aura pas forcément self-similarité stricte entre ces niveaux, car les conditions aux limites et/ou la forme des potentiels appliqués auront pu changer dans le changement d'échelle.

## 6. Application: oscillateur harmonique

Comme exemple d'application de cette méthode, le potentiel en  $r^2$  d'un oscillateur harmonique (c'est-à-dire d'une force proportionnelle à  $r$ ) est particulièrement instructif. En cosmologie, il correspond à la situation de la formation de structures à partir d'un milieu de densité constante, situation qui n'est pas structurante en cosmologie classique mais le devient dans la nouvelle approche. Plus généralement, ce type de potentiel apparaît naturellement dans toutes les situations de petits écarts par rapport à une position d'équilibre, et est donc une bonne première approximation pour de nombreux problèmes.

Considérons le cas d'une densité moyenne égale à  $\rho$ . (Dans une autre

situation, on remplacera simplement dans l'équation ci-après  $\pi G \rho / 3$  par une constante adaptée au problème posé). On obtient l'équation de Schrödinger suivante:

$$D^2 \Delta \psi + i D \frac{\partial}{\partial t} \psi - \frac{\pi}{3} G \rho r^2 \psi = 0 \quad . \quad (17)$$

Si l'on ne s'intéresse dans un premier temps qu'aux solutions stationnaires, l'équation indépendante du temps s'écrit:

$$D^2 \Delta \psi + \left[ \frac{E}{2m} - \frac{\pi}{3} G \rho r^2 \right] \psi = 0 \quad . \quad (18)$$

A la substitution près

$$\hbar \rightarrow 2 m D \quad , \quad (19)$$

c'est l'équation de Schrödinger de la mécanique quantique standard pour un oscillateur harmonique tridimensionnel isotrope de fréquence

$$\omega = \left( \frac{4\pi G \rho}{3} \right)^{1/2} \quad . \quad (20)$$

Les solutions sont bien connues. L'énergie est quantifiée comme:

$$E = 4 m D \left( \frac{\pi G \rho}{3} \right)^{1/2} \left( n + \frac{3}{2} \right) \quad , \quad (21)$$

où  $n = n_1 + n_2 + n_3$ , les  $n_i$  correspondant à trois oscillateurs linéaires pour les trois coordonnées. La densité de probabilité de l'état stationnaire s'écrit:

$$|\psi_{n_1 n_2 n_3}|^2 \propto e^{-(r/a)^2} [ H_{n_1}(x/a) H_{n_2}(y/a) H_{n_3}(z/a) ]^2 \quad (22)$$

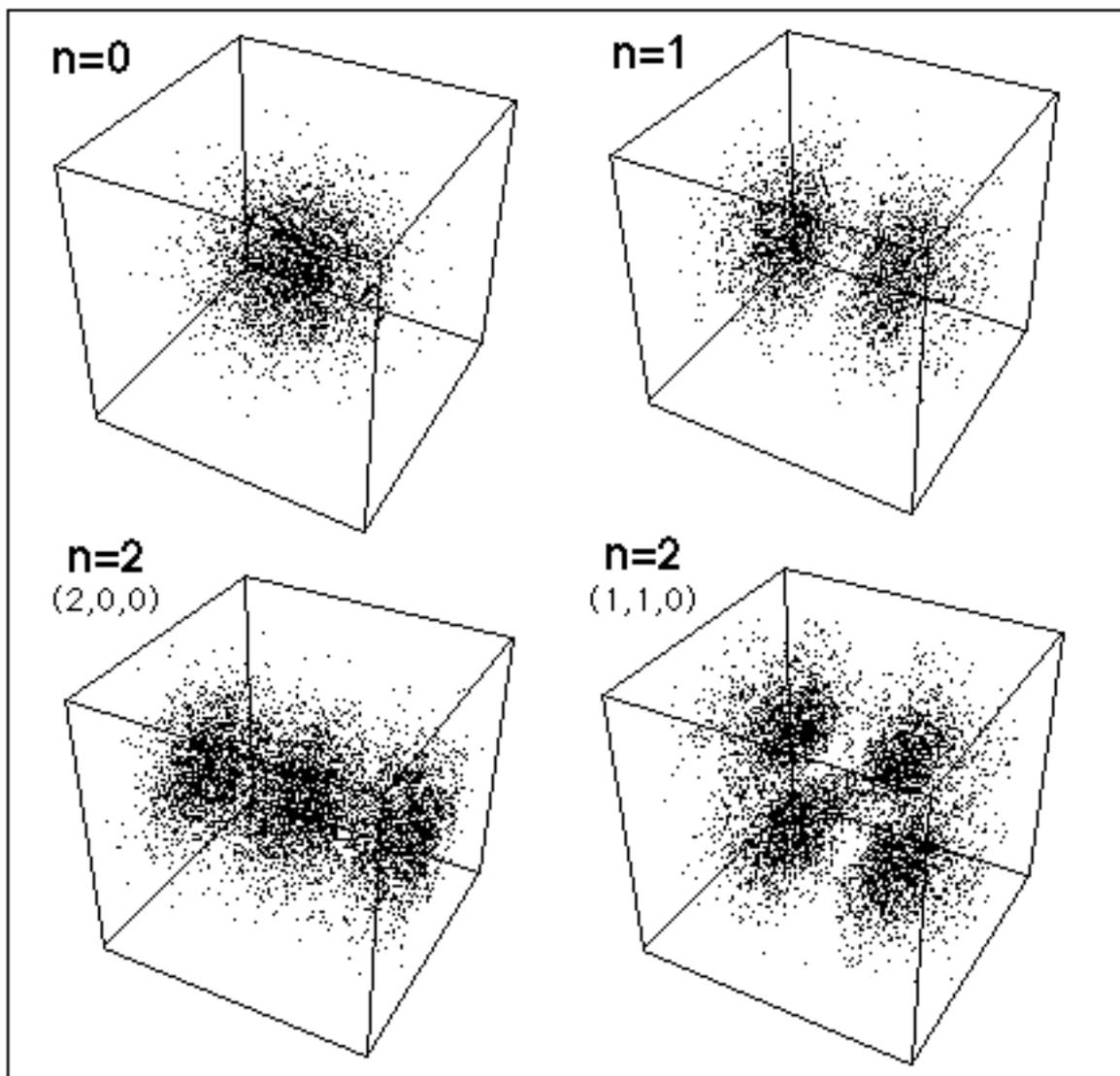
où les  $H_n$ 's sont les polynômes d'Hermite, et où  $a$  est une échelle de longueur caractéristique donnée par:

$$a = \sqrt{2 D / \omega} = (D)^{1/2} (\pi G \rho / 3)^{-1/4} \quad . \quad (23)$$

On rappelle que les premiers polynômes d'Hermite sont:

$$H_0 = 1 ; H_1 = 2 x ; H_2 = 4 x^2 - 2 ; H_3 = 8 x^3 - 12 x ; \dots \quad (24)$$

On prédit donc une formation de structures suivant les divers modes de l'oscillateur harmonique quantifié (voir figure 1). Le mode zéro est une Gaussienne de dispersion  $\sigma_0 = a / \sqrt{2}$ . Le mode  $n = 1$  est une structure double dont les pics sont situés en  $x_{\text{pic}} = \pm a$ . Le mode  $n = 2$  est dégénéré en deux types de structures, une structure linéaire à trois pics en  $0, \pm \sqrt{5/2} a \approx \pm 1.58 a$  et une structure en carré. Pour  $n = 3$ , on trouve  $x_{\text{pic}} = \pm 0.602 a$  et  $\pm 2.034 a$  pour la structure linéaire, etc...



**Figure 2.** Représentation (en densité de points) des solutions de l'équation de Schrödinger (Eq. 18) pour le potentiel de l'oscillateur harmonique tridimensionnel isotrope. Pour obtenir cette figure, on a jeté des particules au hasard dans la densité de probabilité donnée par le carré du module de l'amplitude de probabilité  $\psi$ . On voit que les particules s'organisent naturellement en amas et ensembles d'amas.

Noter que Hermann (1997) a montré par ailleurs qu'une simulation numérique des équations de la dynamique écrites sous leur forme "classique" (Eq. 10) génèrait bien les solutions de l'équation de Schrödinger. On voit effectivement sur la figure 2 que les particules s'organisent en structures simples ( $n = 0$ ), doubles ( $n = 1$ ), multiples (chaîne triple ou quadrilatère pour  $n = 2$ ), etc., c'est-à-dire déjà sur deux niveaux de hiérarchie.

## 7. Discussion et conclusion

En conclusion, nous avons montré sur un exemple simple que, dans la nouvelle approche fondée sur la fractalité et la non-différentiabilité, la dynamique

de type classique se transformait en une dynamique nouvelle ayant un caractère quasi-quantique, naturellement capable de morphogénèse. En effet, on trouve que les particules-tests auxquelles on applique cette méthode constituent des structures finies qui, à une échelle grande devant leur taille caractéristique, pourront elles-mêmes être traitées comme particules. On est ainsi ramené au problème précédent (mais en tenant compte du fait que l'unité naturelle d'échelle, et éventuellement les conditions aux limites et le potentiel ont pu varier), et la même méthode peut alors être appliquée. Une hiérarchie de structures se met ainsi en place, qui combinera des propriétés universelles invariantes d'échelle avec d'autres propriétés spécifiques de l'échelle (relative) particulière considérée. Appliquée à notre système solaire, cette méthode a permis de mettre en évidence cinq niveaux de structuration imbriqués les uns dans les autres (Nottale, Schumacher & Gay, 1997) et de prédire théoriquement l'existence de distances privilégiées à leur étoiles pour les planètes extrasolaires récemment découvertes (Nottale, 1996).

Il reste bien sûr à vérifier si une telle méthode est applicable aux problèmes d'écologie marine. Cette méthode consiste à construire une théorie de la morphogénèse de structures allant au delà de la description des trajectoires individuelles des "particules" qui forment ces structures. Il semble qu'il en soit bien ainsi pour les poissons de haute mer: que tel ou tel individu soit dans tel banc, que tel ou tel banc participe de tel amas, etc... n'a pas d'importance en soi du point de vue de la structure. De plus, les trois hypothèses dont nous sommes partis, (infinité de trajectoires potentielles, chaque trajectoire est fractale, elles sont localement irréversibles) semblent bien adaptées au comportement d'espèces marines. La structuration obtenue comme solution d'équations de Schrödinger généralisées (existence de pics bien marqués de la densité de probabilité, hiérarchie de structures) semble en bon accord avec ce comportement observé des poissons qui, plutôt que de remplir l'espace, s'agglomèrent en bancs, clusters etc...

Remarquons pour finir que l'équation de base qui se transforme en équation de Schrödinger est (en l'absence de potentiel) l'équation d'une géodésique, c'est-à-dire du mouvement localement libre: en d'autres termes, dans une telle description, le poisson va toujours "tout droit" dans son propre repère, puis il en est encore de même du point de vue du banc pris comme objet, et ainsi de suite à toutes les échelles.

*Remerciements.* Tous mes remerciements à Nicolas Bez et aux autres organisateurs de ce colloque pour leur invitation, ainsi qu'aux participants pour les intéressantes et stimulantes discussions.

## **Références**

Einstein A., 1916, The foundation of the general theory of relativity, *Annalen der Physik* **49**, 769. English translation in "The Principle of Relativity", (Dover

- publications), p. 109-164.
- El Naschie M.S., 1995, in *Quantum Mechanics, Diffusion and Chaotic Fractals*, Eds. M.S. El Naschie, O.E. RöSSLer and I. Prigogine, pp. 93, 185 and 191, Pergamon.
- Hermann R., 1997, Numerical simulation of a quantum particle in a box. *J. Phys.* **A 30**,3967
- Kolwankar K.M. et Gangal A.D., 1998, Local Fractional Fokker-Planck Equation. *Phys. Rev. Lett.* **80**, 214.
- Mandelbrot B, 1975, *Les Objets Fractals*. Flammarion, Paris; *The Fractal Geometry of Nature*. Freeman, San Francisco (1982).
- Mandelbrot B. & Van Ness J.W., 1968 . Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Review* **10**, 422.
- Nottale L. & Schneider J., 1984, Fractals and Non Standard Analysis, *J. Math. Phys.* **25**, 1296-1300.
- Nottale L., 1992, The theory of scale relativity, *Int. J. Mod. Phys.* **A7**, 4899-4936.
- Nottale L., 1993, *Fractal Space-Time and Microphysics: Towards a Theory of Scale Relativity*. World Scientific.
- Nottale L., 1995, Scale-relativity: from Quantum Mechanics to Chaotic Dynamics. *Chaos, Solitons and Fractals*, **6**, 399-410.
- Nottale L., 1996, Scale Relativity and Fractal Space-Time: Applications to Quantum Physics, Cosmology and Chaotic Systems. *Chaos, Solitons and Fractals* **7**, 877.
- Nottale L., 1996, Scale relativity and quantization of extrasolar planetary systems. *Astronomy and Astrophysics* **315**, L9.
- Nottale L., 1997, Scale relativity and quantization of the universe. I. Theoretical framework. *Astronomy and Astrophysics* **327**, 867.
- Nottale L., 1989, Fractals and the quantum theory of space-time, *Int. J. Mod. Phys.* **A4**, 5047-5117.
- Nottale L. , Schumacher G. & Gay J., 1997, Scale relativity and quantization of the solar system. *Astron. Astrophys.* **322**, 1018
- Ord G.N., 1983, Fractal space-time: a geometric analogue of relativistic quantum mechanics, *J. Phys. A: Math. Gen.* **16**, 1869-1884.