

Observatoire de Paris, Universités Paris VI, Paris VII et Paris XI  
Fédération des enseignements d'Astronomie et d'Astrophysique  
d'Ile-de-France

Master *Sciences de l'Univers et Technologies Spatiales*  
Année M2 - Parcours Recherche

2004 - 2005

UE thématique F1

# Objets compacts

Éric Gourgoulhon

Laboratoire de l'Univers et de ses THéories (LUTH)  
(CNRS / Observatoire de Paris)  
*eric.gourgoulhon@obspm.fr*

Naines blanches

Supernovæ

Étoiles à neutrons

Binaires X

Trous noirs

Ondes gravitationnelles



# Chapitre 1

## Introduction

version 2004-2005

### Sommaire

---

1.1	Définition des astres compacts . . . . .	3
1.2	Relation avec l'astrophysique des hautes énergies . . . . .	5

---

### 1.1 Définition des astres compacts

Les *objets compacts* se divisent en trois catégories, par ordre de compacité croissante :

- naines blanches ;
- étoiles à neutrons ;
- trous noirs.

Ils ont en points communs :

- leur position dans l'évolution stellaire comme stade final de la vie des étoiles ; en particulier, ils ne sont plus le siège de réactions thermonucléaires ;
- leur petite taille pour leur classe de masse ( $\sim 1 M_{\odot}$ ) : ils sont bien plus petits qu'une étoile sur la Séquence Principale ou même une planète géante ; cela implique une densité de matière sans équivalent dans les autres objets astrophysiques ;
- un champ gravitationnel important, dont la description correcte doit faire appel à la théorie relativiste de la gravitation, la relativité générale (tout au moins pour les étoiles à neutrons et les trous noirs).

Ce dernier point peut être quantifié en comparant l'énergie potentielle gravitationnelle de ces objets à leur énergie de masse. Rappelons tout d'abord que pour un astre auto-gravitant à symétrie sphérique l'énergie potentielle gravitationnelle est donnée, en théorie newtonienne, par

$$E_{\text{grav}} = - \int_0^R \frac{Gm(r) dm}{r} = -4\pi G \int_0^R m(r)\rho(r) r dr , \quad (1.1)$$

où  $R$  désigne le rayon de l'objet,  $\rho(r)$  la densité de masse,  $m(r)$  la masse incluse jusqu'à une distance  $r$  du centre ( $dm/dr = 4\pi r^2 \rho(r)$ ) et où on a choisi par convention  $E_{\text{grav}} = 0$  lorsque toutes les particules qui constituent l'objet sont dispersées à l'infini.  $E_{\text{grav}}$  est le travail que fourniraient au milieu extérieur les forces gravitationnelles lors d'une dispersion du système à l'infini. Comme  $E_{\text{grav}} < 0$  cela signifie qu'il faut en fait fournir de l'énergie au système pour contre-balancer les forces gravitationnelles lors d'une dispersion à l'infini.

Pour obtenir des ordres de grandeur, nous pouvons faire l'approximation d'un corps homogène :  $\rho(r) = \text{const.}$  L'équation (1.1) donne alors immédiatement

$$\boxed{E_{\text{grav}} = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}} \quad , \quad (1.2)$$

où  $M$  est la masse totale de l'objet. Formons alors le rapport de  $E_{\text{grav}}$  à l'énergie de masse de l'objet,  $Mc^2$  :

$$\frac{E_{\text{grav}}}{Mc^2} = -\frac{3}{5} \frac{GM}{Rc^2} \quad . \quad (1.3)$$

Il apparaît ainsi la quantité sans dimension

$$\boxed{\Xi := \frac{GM}{Rc^2}} \quad , \quad (1.4)$$

que nous définirons comme le *paramètre de relativité* de l'objet. On qualifie également  $\Xi$  de *paramètre de compacité*.  $\Xi$  est une bonne mesure du degré de relativité du champ gravitationnel de l'objet considéré. En ordre de grandeur

$$\boxed{\Xi \sim \frac{|E_{\text{grav}}|}{Mc^2} \sim \frac{|\Phi_{\text{surf}}|}{c^2} \sim \frac{R_s}{R}} \quad , \quad (1.5)$$

où  $\Phi_{\text{surf}}$  est le potentiel gravitationnel à la surface de l'objet (pour un corps à symétrie sphérique,  $\Phi_{\text{surf}} = -GM/R$ ) et  $R_s$  est le *rayon de Schwarzschild*, encore appelé *rayon gravitationnel*, associé à la masse  $M$  :

$$R_s := \frac{2GM}{c^2} \quad . \quad (1.6)$$

$R_s$  est le rayon de l'horizon du trou noir qui aurait la masse  $M$ . Ainsi  $\Xi$  mesure, outre l'importance de l'énergie potentielle gravitationnelle, le degré de proximité du rayon effectif de l'objet par rapport à son rayon de Schwarzschild.

Les valeurs de  $\Xi$  pour différents objets astrophysiques sont regroupées dans le tableau 1.1. Les *astres compacts* peuvent être définis comme les objets pour lesquels  $\Xi > 10^{-4}$ . Remarquons que pour un trou noir, l'énergie potentielle gravitationnelle newtonienne  $E_{\text{grav}}$  n'a pas de sens. On utilise alors la relation  $\Xi \sim R_s/R$  pour poser  $\Xi = 1$  pour les trous noirs.

astre	contre-poids de la gravitation	masse $M$ [ $M_\odot$ ]	rayon $R$ [km]	densité $\rho$ [ $\text{kg m}^{-3}$ ]	paramètre de relativité $\Xi$
Terre	forces électromag. (structure cristalline)	$3 \times 10^{-6}$	$6 \times 10^3$	$5 \times 10^3$	$10^{-10}$
Soleil	pression thermique pression de radiation	1	$7 \times 10^5$	$10^3$	$10^{-6}$
naine blanche	press. de dégénéresc. des électrons (Pauli)	0.1 à 1.4	$\sim 10^4$	$\sim 10^{10}$	$10^{-4}$ à $10^{-3}$
étoile à neutrons	interaction forte entre les baryons	1 à $\sim 3$	$\sim 10$	$\sim 10^{18}$	$\sim 0.2$
trou noir stellaire	pas de contre-poids	$> \sim 3$	$(M = 3 M_\odot)$	0	1
trou noir massif	pas de contre-poids	$\sim 10^9$	20 UA	0	1

TAB. 1.1 – Caractéristiques moyennes de divers objets astrophysiques et leurs paramètres de relativité  $\Xi \sim |E_{\text{grav}}|/Mc^2 \sim R_s/R$ .

## 1.2 Relation avec l’astrophysique des hautes énergies

Les astres compacts sont intimement liés à l’astrophysique des hautes énergies par un mécanisme de libération de l’énergie de masse  $E = mc^2$  très efficace : *l’effondrement gravitationnel* vers un objet compact. Cet effondrement peut prendre deux formes différentes : il peut s’agir de *l’accrétion* de matière par un astre compact ou bien d’un phénomène beaucoup plus violent : l’effondrement d’une étoile entière sur elle-même.

### 1.2.1 Accrétion sur un objet compact

Une masse  $m$  qui tombe depuis l’infini sur un objet compact de masse  $M$  et de rayon  $R$  acquiert l’énergie cinétique suivante (on peut dire de manière équivalente “perd l’énergie potentielle gravitationnelle suivante”)

$$\Delta E = \frac{GMm}{R}, \quad (1.7)$$

que l’on peut écrire, en introduisant le paramètre de relativité de l’objet compact donné par (1.4),

$$\Delta E = \Xi mc^2. \quad (1.8)$$

Ainsi l’accrétion libre (sous forme d’énergie cinétique, qui peut être transformée en chaleur, puis en rayonnement) la fraction  $\Xi$  de l’énergie de masse de la matière accrétée. Par exemple, l’accrétion sur une étoile à neutrons dégage  $\Xi \sim 20\%$  de l’énergie de masse. Pour un trou noir en rotation rapide, cette fraction peut même atteindre 42%. Il est intéressant de comparer ce “rendement” à celui d’une réaction nucléaire. La réaction thermonucléaire

la plus efficace (et la plus courante en astrophysique) est la fusion de l'hydrogène en hélium, qui libère

$$\Delta E_{\text{nuc}} = 7 \times 10^{-3} mc^2 . \quad (1.9)$$

Il apparaît donc que l'accrétion sur une étoile à neutrons est un mécanisme de libération d'énergie bien plus efficace qu'une réaction thermonucléaire. Cela explique pourquoi un disque d'accrétion autour d'une étoile à neutrons ou d'un trou noir est invoqué pour expliquer les quantités d'énergies colossales émises par certains objets astrophysiques, comme les binaires X, les AGN ou les quasars.

### 1.2.2 Effondrement gravitationnel d'une étoile

Nous verrons dans ce cours que la source d'énergie à l'origine des supernovæ de type II est l'effondrement gravitationnel du cœur d'une étoile massive en une étoile à neutrons. L'énergie potentielle gravitationnelle libérée par cet événement est

$$\Delta E = E_{\text{grav}}(\text{cœur de la présupernova}) - E_{\text{grav}}(\text{étoile à neutrons}) . \quad (1.10)$$

Le premier terme étant négligeable devant le second, on peut écrire, en utilisant (1.5),

$$\Delta E = \Xi Mc^2 , \quad (1.11)$$

où  $M \sim 1.4 M_{\odot}$  est la masse de l'étoile à neutrons résidu et  $\Xi \sim 0.2$  son paramètre de relativité. L'application numérique donne

$$\Delta E \sim 10^{46} \text{ J} . \quad (1.12)$$

Cette énergie correspond au rayonnement électromagnétique d'une galaxie entière ( $\sim 10^{11}$  étoiles à  $\sim 10^{26}$  W chacune) pendant une trentaine d'années!

# Chapitre 2

## Équilibre des objets froids et théorie des polytropes

version 2004-2005

### Sommaire

---

2.1	Introduction . . . . .	7
2.2	Équation d'état de la matière froide . . . . .	8
2.3	Équations de l'hydrostatique . . . . .	9
2.4	Théorie des polytropes . . . . .	11

---

### 2.1 Introduction

Dans cette première partie du cours, nous examinons les configurations d'équilibre des objets *froids*, c'est-à-dire des corps pour lesquels la pression thermique est négligeable devant les autres formes de pression. Cette catégorie concerne les étoiles compactes, naines blanches et étoiles à neutrons, puisque l'essentiel de la pression y est d'origine non thermique :

- pour les naines blanches : la pression est issue du principe d'exclusion de Pauli appliqué aux électrons (*pression de dégénérescence*)
- pour les étoiles à neutrons : la pression est fournie par *l'interaction forte* entre les nucléons qui constituent l'étoile.<sup>1</sup>

Dans ce chapitre, nous nous limiterons à la théorie newtonienne de la gravitation, ce qui constitue une très bonne approximation pour l'étude des naines blanches (puisque leur paramètre de relativité  $\Xi$  ne dépasse pas  $10^{-3}$ , cf. Table 1.1). On établira le système

---

<sup>1</sup>On lit souvent que les étoiles à neutrons sont en équilibre grâce à la pression de dégénérescence des neutrons ; c'est en fait faux : la pression de dégénérescence des neutrons est bien inférieure à celle qui résulte de l'interaction forte (l'essentiel de l'étoile étant à des densités super-nucléaires). C'est cette dernière qui s'oppose efficacement à la gravitation.

d'équations qui régissent l'équilibre des objets froids dans l'hypothèse de la symétrie sphérique. On examinera ensuite un type de solution, appelé *polytrophe* et construit sur une équation d'état très simple :  $P = \kappa\rho^\gamma$ , ce qui constitue une assez bonne approximation de certains types de matière froide.

## 2.2 Équation d'état de la matière froide catalysée au point final de l'évolution thermonucléaire

Dans le cadre de ce cours nous modéliserons la matière par un *fluide parfait*, ce qui constitue une excellente approximation pour les naines blanches et les étoiles à neutrons. La dynamique d'un fluide parfait est entièrement décrite par sa pression  $P$  (isotrope par définition du fluide parfait) et sa densité d'énergie<sup>2</sup>  $\rho c^2$ .

Si on suppose que le fluide est composé de  $N$  espèces différentes de particules, la micro-physique est encapsulée dans *l'équation d'état* de la matière, qui s'écrit sous la forme générale

$$P = P(T, n_1, \dots, n_N) \quad \text{et} \quad \rho c^2 = \rho(T, n_1, \dots, n_N) c^2, \quad (2.1)$$

où  $T$  est la température, et  $n_i$  ( $i \in \{1, \dots, N\}$ ) la densité numérique de particules de l'espèce numéro  $i$ . L'hypothèse de matière froide permet d'éliminer  $T$  dans l'équation d'état (2.1). De plus, nous supposons que toutes les réactions nucléaires sont à l'équilibre. On parle alors de *matière froide catalysée au point final de l'évolution thermonucléaire* (Harrison, Thorne, Wakano & Wheeler 1965). Cela implique des relations entre les différentes densités particulières  $n_i$ . Toutes les variables d'état sont alors des fonctions d'un seul paramètre, que nous choisirons être la densité baryonique  $n$ , qui est le nombre de baryons (protons, neutrons et hypérons) par unité de volume dans le référentiel du fluide. Par exemple, pour un mélange de neutrons, protons et électrons à température nulle, la densité électronique  $n_e$  se déduit entièrement de la densité baryonique  $n$  par (i) la relation  $n = n_p + n_n$ , (ii) la condition de neutralité électrique  $n_p = n_e$  et (iii) par l'égalité des potentiels chimiques  $\mu_n = \mu_p + \mu_e$ , qui traduit l'équilibre des réactions nucléaires faibles du type  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$  (désintégration  $\beta$ ) et  $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$  (capture électronique).

Pour la matière froide catalysée au point final de l'évolution thermonucléaire, l'équation d'état (2.1) se réduit donc à

$$P = P(n) \quad \text{et} \quad \rho c^2 = \rho(n) c^2, \quad (2.2)$$

où  $n$  désigne la densité numérique de baryons. En général, on peut inverser la relation  $\rho = \rho(n)$  et écrire la pression sous la forme

$$\boxed{P = P(\rho)}. \quad (2.3)$$

Une telle équation d'état est qualifiée de *barotropique*.

<sup>2</sup>nous notons la densité d'énergie  $\rho c^2$ , de sorte que  $\rho$  a la dimension d'une densité de masse.



## 2.3 Équations de l'hydrostatique

### 2.3.1 Forme générale

Dans la théorie newtonienne, l'équilibre d'un corps fluide parfait autogravitant et sans rotation par rapport à un repère inertiel est décrite par

- l'équation de Poisson pour le potentiel gravitationnel  $\Phi$  :

$$\boxed{\Delta\Phi = 4\pi G \rho}, \quad (2.4)$$

- l'équation de l'hydrostatique (limite statique de l'équation d'Euler qui régit la dynamique d'un fluide parfait, cf. par exemple Rieutord (1997)) :

$$\boxed{-\nabla P + \rho \mathbf{g} = 0}, \quad (2.5)$$

où  $\mathbf{g}$  désigne le champ gravitationnel.

Ces deux équations fondamentales doivent être complétées par l'équation d'état  $P = P(\rho)$  [Eq. (2.3)] et par la relation entre le champ et le potentiel gravitationnel :

$$\mathbf{g} = -\nabla\Phi. \quad (2.6)$$

On obtient alors un système fermé.

### 2.3.2 Cas de la symétrie sphérique

Pour un objet à symétrie sphérique, on utilise bien évidemment des coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$ . Les différents champs sont alors des fonctions de  $r$  seulement. On peut expliciter aisément le laplacien qui intervient dans l'équation de Poisson (2.4) et obtenir

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 4\pi G \rho, \quad (2.7)$$

d'où

$$r^2 \frac{d\Phi}{dr} = 4\pi G \int_0^r \rho(r') r'^2 dr', \quad (2.8)$$

la constante d'intégration ayant été fixée pour assurer  $(r^2 d\Phi/dr)|_{r=0} = 0$ . Dans cette expression apparaît la fonction

$$m(r) := 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr', \quad (2.9)$$

qui n'est autre que la masse incluse dans le rayon  $r$  (*masse lagrangienne*). Ainsi on obtient

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{Gm(r)}{r^2}. \quad (2.10)$$

On retrouve le théorème de Gauss : le champ gravitationnel

$$g(r) = -d\Phi/dr \quad (2.11)$$

est identique à celui d'une masse ponctuelle de valeur  $m(r)$  et située en  $r = 0$ . En combinant (2.9), (2.10), (2.5) et (2.11), on obtient le système qui régit l'équilibre hydrostatique des fluides autogravitants à symétrie sphérique :

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (2.12)$$

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{Gm(r)}{r^2} \quad (2.13)$$

$$\frac{dP}{dr} = -\rho(r) \frac{d\Phi}{dr} . \quad (2.14)$$

Si on se donne l'équation d'état sous la forme  $P = P(\rho)$ , on peut réécrire le système comme

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (2.15)$$

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{Gm(r)}{r^2} \quad (2.16)$$

$$\frac{d\rho}{dr} = -\rho(r) \left( \frac{dP}{d\rho} \right)^{-1} \frac{d\Phi}{dr} . \quad (2.17)$$

D'après le théorème de Cauchy, ce système d'équations différentielles d'ordre un admet une solution unique vérifiant les conditions "initiales" suivantes :

$$m(0) = 0 \quad (2.18)$$

$$\Phi(0) = \Phi_c \quad (2.19)$$

$$\rho(0) = \rho_c, \quad (2.20)$$

où  $\rho_c$  désigne la densité centrale. La condition  $m(0) = 0$  est une condition de régularité, signifiant qu'il n'y pas de masse concentrée à l'origine. Remarquons de plus que la valeur centrale  $\Phi_c$  du potentiel gravitationnel peut être choisie arbitrairement, sans changer la solution globale, car seule la dérivée  $d\Phi/dr$  intervient dans le système (2.15)-(2.17). Par exemple, on peut, ayant obtenu une solution, changer  $\Phi_c$  pour assurer  $\Phi(r = +\infty) = 0$ . Ainsi, pour une équation d'état barotropique donnée, il n'y a qu'un seul modèle stellaire correspondant à une valeur fixée de la densité centrale  $\rho_c$ . L'intégration du système (2.15)-(2.17), soumis aux conditions initiales (2.18)-(2.20), peut être menée à bien par une méthode de Runge-Kutta (cf. le cours de Méthodes Numériques ou Quarteroni et al. 2000). L'intégration doit s'arrêter lorsqu'on atteint la surface de l'étoile, définie comme le lieu où la pression s'annule (équilibre avec le vide) :

$$P(r = R) = 0. \quad (2.21)$$

Cette équation fournit le rayon  $R$  de l'étoile, que l'on ne peut pas fixer a priori. Une fois obtenu  $R$ , la masse totale de l'étoile n'est autre que

$$M = m(R). \quad (2.22)$$

## 2.4 Théorie des polytropes

### 2.4.1 Définition

La forme la plus simple de l'équation d'état barotropique (2.3) à laquelle on puisse penser est celle d'une loi de puissance :

$$\boxed{P = \kappa \rho^\gamma}, \quad (2.23)$$

où  $\kappa$  et  $\gamma$  sont des constantes.  $\gamma$  est alors l'*indice adiabatique*, puisqu'il satisfait à la relation

$$\gamma = \frac{d \ln P}{d \ln \rho}. \quad (2.24)$$

La relation (2.23) est appelée *équation d'état polytropique* et les modèles stellaires basés dessus sont dénommés *polytropes*. Il se trouve que pour les naines blanches, l'équation d'état polytropique est loin d'être académique, puisqu'elle correspond à deux cas limites : celui des électrons non relativistes (naines blanches de faible masse) :  $\gamma = 5/3$  et celui des électrons ultra-relativistes (naines blanches de grande masse) :  $\gamma = 4/3$ , ainsi que nous le verrons au § 3.3.

Dans la théorie des polytropes, on représente souvent  $\gamma$  par le nombre réel  $n$  (pas nécessairement entier !) tel que

$$\boxed{\gamma = 1 + \frac{1}{n}}. \quad (2.25)$$

$n$  est appelé l'*indice polytropique* (à ne pas confondre avec *indice adiabatique*, qui lui désigne  $\gamma$ ).

### 2.4.2 Équation de Lane-Emden

Plutôt que de partir des équations de l'hydrostatique sous la forme du système du premier ordre (2.15)-(2.17), considérons l'équation de Poisson (2.7), dans laquelle on remplace  $d\Phi/dr$  par son expression en terme de  $d\rho/dr$  déduite de (2.17) avec dans le cas présent  $dP/d\rho = \kappa\gamma\rho^{\gamma-1}$  :

$$-\frac{\kappa\gamma}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \rho^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dr} \right) = 4\pi G \rho. \quad (2.26)$$

On obtient ainsi une équation différentielle qui ne dépend que de  $\rho$ . Pour se ramener à une équation adimensionnée, on effectue les changements de variable suivants (en supposant  $\gamma \neq 1$ ) :

$$x := \frac{r}{a} \iff r = a x \quad (2.27)$$

$$y := \left( \frac{\rho}{\rho_c} \right)^{\gamma-1} \iff \rho = \rho_c y^n, \quad (2.28)$$

où  $a$  est une constante de la dimension d'une longueur et dépendant de  $\kappa$ ,  $\gamma$  et  $\rho_c$  :

$$a := \left[ \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\kappa}{4\pi G} \rho_c^{\gamma-2} \right]^{1/2} = \left[ (n+1) \frac{\kappa}{4\pi G} \rho_c^{1/n-1} \right]^{1/2} = \left[ (n+1) \frac{P_c}{4\pi G \rho_c^2} \right]^{1/2}. \quad (2.29)$$

L'équation (2.26) devient alors

$$\boxed{\frac{d}{dx} \left( x^2 \frac{dy}{dx} \right) = -x^2 y^n}, \quad (2.30)$$

ou encore

$$y'' + \frac{2}{x} y' = -y^n. \quad (2.31)$$

Cette équation différentielle d'ordre deux, non linéaire si  $n \neq 1$ , est appelée *équation de Lane-Emden d'indice  $n$* . D'après le théorème de Cauchy, elle admet une solution unique  $y = \theta_n(x)$  vérifiant

$$\theta_n(0) = 1 \quad (2.32)$$

$$\theta'_n(0) = 0. \quad (2.33)$$

La condition (2.32) assure de retrouver  $\rho(0) = \rho_c$  [cf. (2.27) et (2.28)]. Quant à la condition (2.33), il s'agit d'une condition de régularité à l'origine, qui est équivalente à  $d\rho/dr = 0$  (en symétrie sphérique  $\rho$  doit en effet être une fonction paire de  $r$ , sinon le champ de densité aurait une singularité de type conique en  $r = 0$ ). La fonction  $\theta_n$  est appelée *fonction de Lane-Emden d'indice  $n$* . En général,  $\theta_n$  ne se réduit pas à des fonctions connues, sauf dans trois cas<sup>3</sup> :

- $n = 0$  ( $\gamma = \infty$ ) :  $\theta_0(x) = 1 - \frac{x^2}{6}$  ;
- $n = 1$  ( $\gamma = 2$ ) :  $\theta_1(x) = \frac{\sin x}{x}$  ;
- $n = 5$  ( $\gamma = 1.2$ ) :  $\theta_5(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2/3}}$ .

Les cas  $n = 0$  et  $n = 1$  sont particulièrement simples, puisque l'équation de Lane-Emden (2.30) est alors linéaire. Il n'est donc pas surprenant de trouver une solution sous la forme d'une fonction connue. Pour les valeurs de  $n$  différentes de 0, 1 et 5, il faut se rapporter à des tables (cf. par exemple Chandrasekhar 1939 ou bien Horedt 2004). La fonction  $\theta_n(x)$  est représentée sur la Fig. 2.1 pour une sélection de valeurs de  $n$ .

Une fois obtenue la solution  $y = \theta_n(x)$  de l'équation de Lane-Emden, le profil de densité dans l'étoile s'obtient à partir de (2.27)-(2.28) :

$$\rho(r) = \rho_c [\theta_n(r/a)]^n, \quad (2.34)$$

où  $a$  est la fonction de  $\kappa$ ,  $\gamma$  et  $\rho_c$  donnée par l'Eq. (2.29).

<sup>3</sup>Le cas  $n = 0$  est un cas dégénéré de la théorie des polytropes car il correspond à  $\gamma = \infty$ , autrement dit à un fluide incompressible :  $\rho = \text{const}$  ; la variable  $y$  est alors définie comme la pression (qui elle n'est pas constante) rapportée à la pression centrale :  $y = P/P_c$ , plutôt que par (2.28).

## Fonctions de Lane-Emden

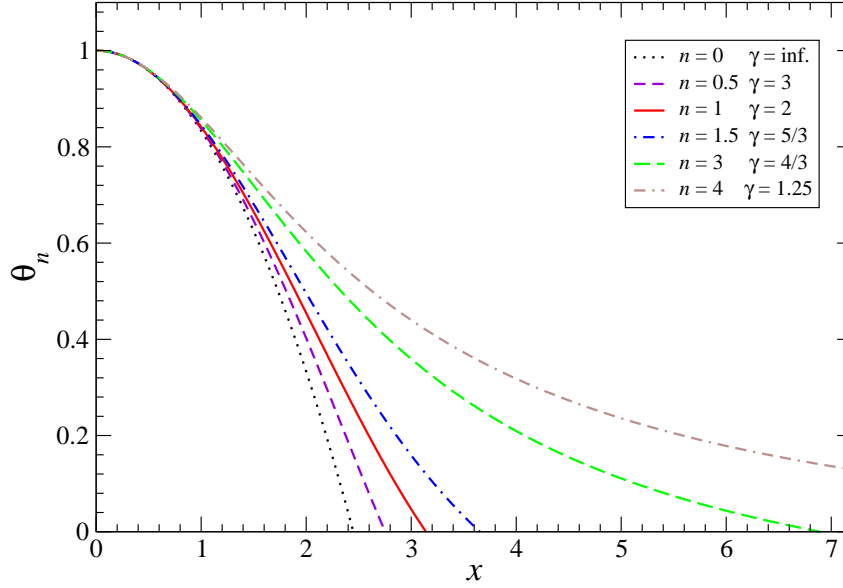


FIG. 2.1 – Fonctions de Lane-Emden  $\theta_n(x)$  pour quelques valeurs de  $n$ . La courbe pour  $n = 0$  est une arche de parabole, alors que celle pour  $n = 1$  est une arche de sinus cardinal.

## 2.4.3 Quantités globales

## Rayon de l'étoile

En partant de  $x = 0$  où elle vaut 1, la fonction de Lane-Emden  $\theta_n$  est toujours strictement décroissante (cf. Fig. 2.1). Pour  $n < 5$  ( $\gamma > 1.2$ ), elle s'annule pour une valeur finie de  $x$ , que nous noterons  $X_n$  :

$$\theta_n(X_n) = 0. \quad (2.35)$$

Tout comme  $\theta_n$ , le nombre  $X_n$  n'a pas d'expression simple en général, sauf pour  $n = 0$  et  $n = 1$  :  $X_0 = \sqrt{6}$  et  $X_1 = \pi$ . Des valeurs numériques approchées sont

$$X_0 = 2.449 (\sqrt{6}), \quad X_1 = 3.142 (\pi), \quad X_{1.5} = 3.654, \quad X_3 = 6.897. \quad (2.36)$$

En vertu de (2.27),  $X_n$  définit le rayon de l'étoile :

$$R = aX_n. \quad (2.37)$$

En remplaçant dans  $a$  par sa définition (2.29), on obtient l'expression de rayon de l'étoile en fonction de la densité centrale :

$$R = X_n \left( \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\kappa}{4\pi G} \right)^{1/2} \rho_c^{(\gamma-2)/2}. \quad (2.38)$$

Pour  $n \geq 5$  ( $\gamma \leq 1.2$ ), la fonction  $\theta_n$  ne s'annule jamais (cf. par exemple  $\theta_5$  donnée ci-dessus). Les "étoiles" correspondantes ont donc un rayon infini.

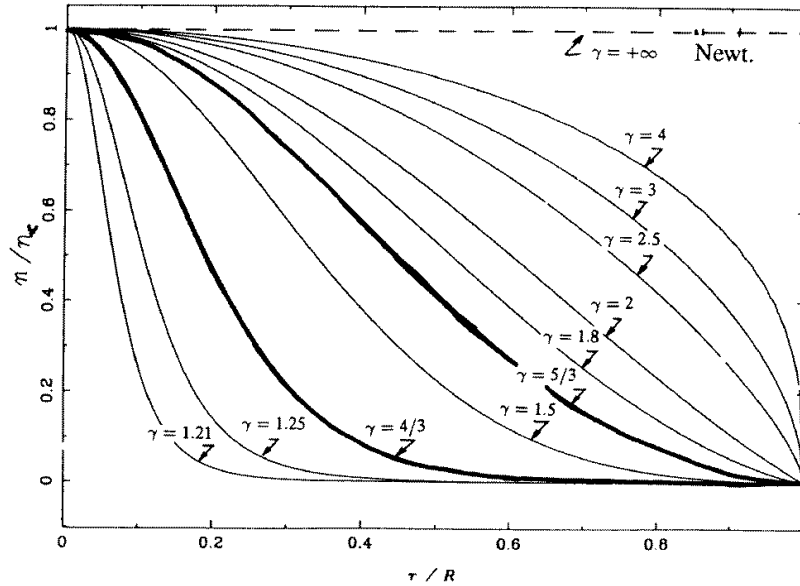


FIG. 2.2 – Profils de densité  $\rho(r)/\rho_c$  d'un polytrophe newtonien. Remarquer que plus  $\gamma$  est élevé (équation d'état plus "dure") et plus le profil est uniforme, avec un gradient infini sur le bord de l'étoile pour  $\gamma > 2$ . Les cas importants pour la théorie des naines blanches,  $\gamma = 4/3$  (gaz de Fermi dégénéré ultra-relativiste) et  $\gamma = 5/3$  (gaz de Fermi dégénéré non relativiste), sont figurés en gras.

Il convient de remarquer que, dans le cas où le rayon est fini, les profils de densité des polytropes obéissent à la loi de similarité suivante

$$\boxed{\frac{\rho}{\rho_c} = f_\gamma \left( \frac{r}{R} \right)}, \quad (2.39)$$

où  $f_\gamma$  est une fonction qui ne dépend que de  $\gamma = 1 + 1/n$  (et pas de  $\kappa$ ) : en combinant (2.27), (2.28) et (2.37), il vient en effet

$$f_\gamma(u) = \theta_n(X_n u)^n. \quad (2.40)$$

Les profils de densité correspondants à différentes valeurs de  $\gamma$  sont représentés sur la Fig. 2.2.

### Masse de l'étoile

La masse de l'étoile est donnée par l'intégrale

$$M = \int_0^R \rho(r)(4\pi r^2) dr = 4\pi a^3 \rho_c \int_0^{X_n} \theta_n(x)^n x^2 dx. \quad (2.41)$$

Or puisque  $\theta_n$  est solution de l'équation de Lane-Emden (2.30),

$$\theta_n(x)^n x^2 = -\frac{d}{dx} [x^2 \theta_n'(x)], \quad (2.42)$$

si bien que l'intégrale (2.41) s'intègre immédiatement [en tenant compte de (2.33)] :

$$M = -4\pi a^3 \rho_c X_n^2 \theta_n'(X_n). \quad (2.43)$$

En remplaçant  $a$  par sa définition (2.29), on obtient l'expression de la masse en fonction de la densité centrale :

$$M = (4\pi)^{-1/2} \left( \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\kappa}{G} \right)^{3/2} X_n^2 [-\theta_n'(X_n)] \rho_c^{(3\gamma-4)/2}. \quad (2.44)$$

Inversement, éliminons  $\rho_c$  de l'Eq. (2.43) à l'aide de l'équation (2.29) :

$$\rho_c = \left( \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{4\pi G}{\kappa} a^2 \right)^{1/(\gamma-2)}. \quad (2.45)$$

Il vient ainsi :

$$M = 4\pi \left( \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{4\pi G}{\kappa} \right)^{1/(\gamma-2)} a^{\frac{3\gamma-4}{\gamma-2}} [-X_n^2 \theta_n'(X_n)]. \quad (2.46)$$

En remplaçant  $a$  par  $R/X_n$  [Eq. (2.37)], on obtient la relation masse-rayon des polytropes :

$$M^{\gamma-2} = (4\pi)^{\gamma-1} \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{G}{\kappa} X_n^{-1-\frac{1}{n}} [-\theta_n'(X_n)]^{\frac{1}{n}-1} R^{3\gamma-4}. \quad (2.47)$$

Il convient de remarquer que le terme  $X_n^{-1-\frac{1}{n}} [-\theta_n'(X_n)]^{\frac{1}{n}-1}$  est un nombre positif, qui ne dépend que de  $\gamma$  (à travers  $n$ ). Par exemple, pour  $\gamma = 2$ , il vaut  $X_1^{-2} = \pi^{-2}$ .

La relation (2.47) fait apparaître deux cas "pathologiques" dans la théorie des polytropes :

- $\gamma = 4/3$  : la masse de l'étoile est alors indépendante du rayon, et donc de la densité centrale  $\rho_c$ . Dit autrement,  $M$  ne peut prendre qu'une seule valeur, fixée par la constante polytropique  $\kappa$  :

$$M_{\gamma=4/3} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{\kappa}{G} \right)^{3/2} X_3^2 [-\theta_3'(X_3)], \quad (2.48)$$

avec  $X_3^2 [-\theta_3'(X_3)] \simeq 2.018236$ . Cette propriété très importante est à l'origine de la masse de Chandrasekhar, ainsi que nous le verrons au § 3.4.

- $\gamma = 2$  : le rayon de l'étoile est alors indépendant de sa masse, et donc de la densité centrale  $\rho_c$  :  $R$  ne peut prendre qu'une seule valeur, fixée par la constante polytropique  $\kappa$  :

$$R_{\gamma=2} = \sqrt{\frac{\pi\kappa}{2G}}. \quad (2.49)$$

### Pression centrale

A partir des relations (2.43) et  $R = aX_n$ , formons le rapport  $M^2/R^4$  :

$$\frac{M^2}{R^4} = (4\pi)^2 a^2 \rho_c^2 [\theta_n'(X_n)]^2. \quad (2.50)$$

Or d'après (2.29),  $a^2 \rho_c^2 = (n+1)P_c/(4\pi G)$ , si bien qu'il vient

$$P_c = \frac{1}{4\pi(n+1) [\theta_n'(X_n)]^2} \frac{GM^2}{R^4}. \quad (2.51)$$

Il est remarquable que  $\kappa$  n'intervienne pas dans cette relation.

### Énergie potentielle gravitationnelle

Calculons l'énergie potentielle gravitationnelle d'une étoile polytropique à partir de l'Eq. (1.1) :

$$E_{\text{grav}} = -4\pi G \int_0^R m(r) \rho(r) r dr. \quad (2.52)$$

Effectuons le changement de variable  $x = r/a$ . La densité  $\rho(r)$  s'exprime alors en fonction de  $\theta_n(x)$  suivant (2.34). De son côté, la masse lagrangienne  $m(r)$  est obtenue par un calcul similaire à celui de la masse totale  $M$ , en remplaçant simplement la borne d'intégration  $X_n$  par  $x$ , pour obtenir l'analogie de l'Eq. (2.43) :

$$m(r) = -4\pi a^3 \rho_c x^2 \theta_n'(x). \quad (2.53)$$

On a donc

$$\begin{aligned} E_{\text{grav}} &= -4\pi G \int_0^{X_n} [-4\pi a^3 \rho_c x^2 \theta_n'(x)] \rho_c \theta_n(x)^n a^2 x dx \\ &= (4\pi)^2 G a^5 \rho_c^2 I_n, \end{aligned} \quad (2.54)$$

avec

$$\begin{aligned} I_n &:= \int_0^{X_n} x^3 \theta_n'(x) \theta_n(x)^n dx \\ &= \underbrace{\left[ \frac{\theta_n(x)^{n+1}}{n+1} x^3 \right]_0^{X_n}}_{=0} - \int_0^{X_n} \frac{\theta_n(x)^{n+1}}{n+1} 3x^2 dx \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$I_n = -\frac{3}{n+1} \int_0^{X_n} x^2 \theta_n(x)^{n+1} dx, \quad (2.56)$$

où l'on a utilisé  $\theta_n(X_n) = 0$ . Puisque  $\theta_n$  est solution de l'équation de Lane-Emden (2.30), on peut écrire

$$I_n = \frac{3}{n+1} \int_0^{X_n} \frac{d}{dx} [x^2 \theta_n'(x)] \theta_n(x) dx$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{3}{n+1} \left\{ \underbrace{[x^2 \theta_n'(x) \theta_n(x)]_0^{X_n}}_{=0} - \int_0^{X_n} x^2 \theta_n'(x) \theta_n'(x) dx \right\} \\
 I_n &= -\frac{3}{n+1} \int_0^{X_n} x^2 [\theta_n'(x)]^2 dx. \tag{2.57}
 \end{aligned}$$

Par ailleurs, on peut aussi utiliser l'équation de Lane-Emden sur la forme initiale (2.55) de  $I_n$  et écrire

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int_0^{X_n} \frac{1}{x} x^2 \theta_n'(x) x^2 \theta_n(x)^n dx = - \int_0^{X_n} \frac{1}{x} [x^2 \theta_n'(x)] \frac{d}{dx} [x^2 \theta_n'(x)] dx \\
 &= - \left[ \frac{1}{x} \times \frac{1}{2} (x^2 \theta_n'(x))^2 \right]_0^{X_n} + \int_0^{X_n} \left( -\frac{1}{x^2} \right) \times \frac{1}{2} (x^2 \theta_n'(x))^2 dx \\
 I_n &= -\frac{1}{2} X_n^3 [\theta_n'(X_n)]^2 - \frac{1}{2} \int_0^{X_n} x^2 [\theta_n'(x)]^2 dx. \tag{2.58}
 \end{aligned}$$

On constate que l'intégrale dans le membre de droite est la même que celle qui apparaît dans l'expression (2.57). On en déduit immédiatement que

$$I_n = -\frac{1}{2} X_n^3 [\theta_n'(X_n)]^2 + \frac{1}{2} \frac{n+1}{3} I_n, \tag{2.59}$$

d'où la valeur de  $I_n$  :

$$I_n = \frac{3}{n-5} X_n^3 [\theta_n'(X_n)]^2. \tag{2.60}$$

En reportant dans l'Eq. (2.54), on obtient l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle en fonction de  $\theta_n$  et  $X_n$  :

$$E_{\text{grav}} = \frac{3}{n-5} (4\pi)^2 G a^5 \rho_c^2 X_n^3 [\theta_n'(X_n)]^2. \tag{2.61}$$

Or, en élevant au carré l'expression (2.43) pour  $M$  et en divisant par  $R = aX_n$ , il vient

$$\frac{M^2}{R} = (4\pi)^2 a^5 \rho_c^2 X_n^3 [\theta_n'(X_n)]^2. \tag{2.62}$$

En comparant avec (2.61), on en déduit l'expression finale de l'énergie potentielle gravitationnelle :

$$E_{\text{grav}} = \frac{3}{n-5} \frac{GM^2}{R}, \tag{2.63}$$

ou encore

$$\boxed{E_{\text{grav}} = -\frac{3(\gamma-1)}{5\gamma-6} \frac{GM^2}{R}}. \tag{2.64}$$

Cette formule est appelée *formule de Betti-Ritter* [cf. (Chandrasekhar 1939) pour son historique].

Remarquons que lorsque  $\gamma \rightarrow \infty$  (fluide incompressible), la densité dans l'étoile devient uniforme et la formule de Betti-Ritter se réduit à  $E_{\text{grav}} = -3/5 GM^2/R$ , un résultat classique pour une sphère homogène autogravitante [cf. Eq. (1.2)].

### Énergie interne

La densité d'énergie interne (non relativiste)  $\varepsilon$  d'un polytrope est reliée à la pression par

$$P = (\gamma - 1)\varepsilon, \quad (2.65)$$

d'où

$$\varepsilon(r) = \frac{\kappa}{\gamma - 1} \rho(r)^\gamma = \frac{\kappa}{\gamma - 1} \rho_c^\gamma \theta_n(x)^{n+1} = \frac{P_c}{\gamma - 1} \theta_n(x)^{n+1}. \quad (2.66)$$

L'énergie interne de l'étoile est alors

$$E_{\text{int}} = \int_0^R \varepsilon(r) (4\pi r^2) dr = \frac{4\pi}{\gamma - 1} P_c a^3 \int_0^{X_n} \theta_n(x)^{n+1} x^2 dx. \quad (2.67)$$

L'intégrale qui apparaît dans cette expression n'est autre que  $-(n+1)/3 \times I_n$ , en vertu de (2.56). En utilisant la valeur (2.60) de  $I_n$ , il vient

$$E_{\text{int}} = \frac{4\pi}{\gamma - 1} P_c a^3 \frac{n+1}{5-n} X_n^3 [\theta_n'(X_n)]^2. \quad (2.68)$$

Or d'après l'expression (2.29) de  $a$ ,  $P_c = 4\pi G a^2 \rho_c^2 / (n+1)$ , si bien qu'il vient

$$E_{\text{int}} = \frac{(4\pi)^2}{(\gamma - 1)(5 - n)} G a^5 \rho_c^2 X_n^3 [\theta_n'(X_n)]^2. \quad (2.69)$$

En comparant avec (2.62), on obtient

$$E_{\text{int}} = \frac{1}{5\gamma - 6} \frac{GM^2}{R}. \quad (2.70)$$

### Énergie totale

L'énergie totale de l'étoile,  $E$ , est la somme de son énergie interne et de son énergie potentielle gravitationnelle :

$$E = E_{\text{int}} + E_{\text{grav}}. \quad (2.71)$$

A partir des expressions (2.64) et (2.70), il vient immédiatement

$$E = -\frac{3\gamma - 4}{5\gamma - 6} \frac{GM^2}{R}. \quad (2.72)$$

Cette énergie peut être interprétée comme l'énergie de liaison de l'étoile : si  $E < 0$  (i.e.  $\gamma > 4/3$ ), les particules qui constituent l'étoile ont une énergie totale plus faible que si elles étaient dispersées à l'infini ( $E = 0$ ), si bien qu'il faudrait fournir de l'énergie pour disperser l'étoile : la configuration est donc liée.

### 2.4.4 Stabilité des polytropes

Au vu des formules établies ci-dessus, on peut énoncer les propriétés suivantes :

- pour  $0 \leq \gamma < 6/5$  :  $M = +\infty$ ,  $R = +\infty$  ;
- pour  $\gamma = 6/5$  :  $M$  finie et  $M(\rho_c) \searrow$ ,  $R = +\infty$  ;
- pour  $6/5 < \gamma < 4/3$  :  $M$  finie et  $M(\rho_c) \searrow$ ,  $R$  fini et  $R(\rho_c) \searrow$ , configuration non liée et instable ;
- pour  $\gamma = 4/3$  :  $M$  finie et indépendante de  $\rho_c$  ( $M$  est fixée uniquement par  $\kappa$ ),  $R$  fini et  $R(\rho_c) \searrow$ , configuration marginalement liée ;
- pour  $4/3 < \gamma < 2$  :  $M$  finie et  $M(\rho_c) \nearrow$ ,  $R$  fini et  $R(\rho_c) \searrow$ , configuration liée et stable ;
- pour  $\gamma = 2$  :  $M$  finie et  $M(\rho_c) \nearrow$ ,  $R$  fini et indépendant de  $\rho_c$ , configuration liée et stable ;
- pour  $2 < \gamma < +\infty$  :  $M$  finie et  $M(\rho_c) \nearrow$ ,  $R$  fini et  $R(\rho_c) \nearrow$ , configuration liée et stable.

On peut remarquer que les cas critiques  $\gamma = 4/3$  et  $\gamma = 2$  sont les mêmes que ceux qui apparaissent dans la relation masse-rayon (2.47). D'après cette dernière,  $R$  est une fonction croissante de  $M$  si, et seulement si,  $\gamma < 4/3$  ou  $\gamma > 2$ .

Il convient également de noter que le caractère singulier de  $\gamma = 4/3$  n'est pas seulement lié à l'indépendance de la masse vis-à-vis du rayon ou de la densité centrale mais aussi à un changement de la stabilité des polytropes par rapport à des perturbations radiales : selon le critère de Ledoux, les polytropes pour lesquels  $\gamma > 4/3$  (resp.  $\gamma < 4/3$ ) sont stables (resp. instables).

## Bibliographie

- Chandrasekhar S. 1939 : *An introduction to the study of stellar structure*, University of Chicago Press (Chicago) ; ré-imprimé chez Dover (New York) en 1967.
- Hansen C.J., Kawaler S.D., Trimble V. 2004 : *Stellar interiors. Physical principles, structure and evolution*, 2ème édition, Springer-Verlag (New York).
- Harrison B.K., Thorne K.S., Wakano M., Wheeler J.A. 1965 : *Gravitation Theory and Gravitational Collapse*, University of Chicago Press (Chicago)
- Horedt G.P. 2004 : *Polytropes*, Kluwer (Dordrecht)
- Quarteroni A., Sacco R., Saleri F. 2000 : *Méthodes numériques pour le calcul scientifique*, Springer-Verlag France (Paris)
- Rieutord M. 1997 : *Une introduction à la dynamique des fluides*, Masson (Paris)



# Chapitre 3

## Naines blanches

version 2004-2005

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Un petit historique . . . . .</b>	<b>21</b>
<b>3.2</b>	<b>Formation des naines blanches . . . . .</b>	<b>24</b>
<b>3.3</b>	<b>Equation d'état . . . . .</b>	<b>28</b>
<b>3.4</b>	<b>Masse de Chandrasekhar . . . . .</b>	<b>31</b>
<b>3.5</b>	<b>Masses et rayons observés . . . . .</b>	<b>35</b>
<b>3.6</b>	<b>Classification spectroscopique . . . . .</b>	<b>41</b>
<b>3.7</b>	<b>Refroidissement des naines blanches . . . . .</b>	<b>42</b>

---

### 3.1 Un petit historique

#### 3.1.1 Des étoiles petites et chaudes...

La toute première naine blanche a été observée par William Herschel en 1783, lors de l'établissement de son catalogue d'étoiles doubles. Il s'agit d'un membre du système triple 40 Eridani : 40 Eridani B. Mais ce n'est que vers 1910 que le caractère spécifique de cette étoile a été reconnu. C'est en effet à cette époque que H.N. Russell construisit les premiers diagrammes connus aujourd'hui sous le nom de *diagrammes Herzprung-Russell* (cf. Fig. 3.1). Russell mit ainsi en évidence que toutes les étoiles blanches (classe B et A) sont lumineuses, à l'exception de 40 Eridani B, que l'on remarque comme le point isolé en bas et à gauche de la Figure 3.1. 40 Eridani B apparaissait donc comme une étoile chaude et petite (parce que peu lumineuse, la luminosité étant reliée à l'aire de la surface de l'étoile). Il s'agissait d'une nouvelle classe d'étoiles, baptisées fort naturellement *naines blanches*.

En 1913, Van Maanen découvre que la deuxième étoile de son catalogue, Van Maanen 2, a la même propriété que 40 Eri B : elle est trop chaude pour sa luminosité. A cette

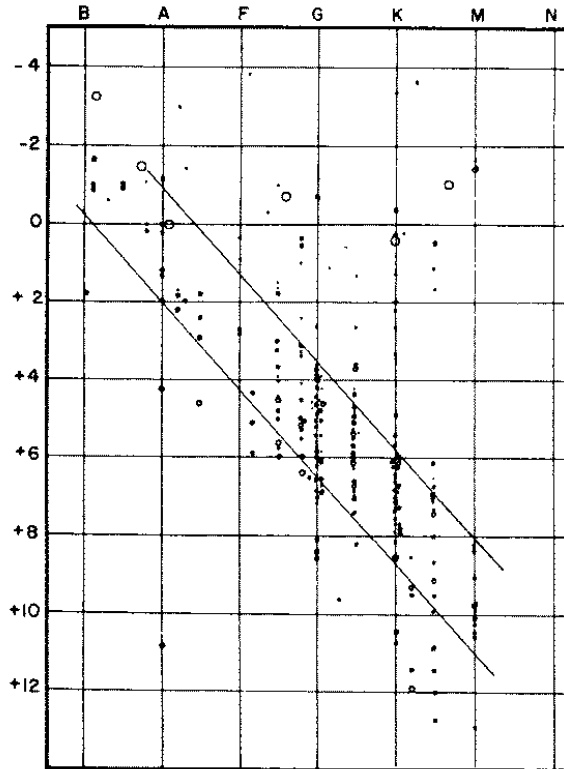


FIG. 3.1 – Diagramme reliant la magnitude absolue des étoiles à leur type spectral, établi par H.N. Russell entre 1910 et 1914 à partir d'étoiles de distance connues. Dans une version moderne de ce diagramme, on porterait plutôt en abscisse la température effective et en ordonnée la luminosité intrinsèque. L'astre situé en bas à gauche, nettement en dehors de la séquence principale, est 40 Eridani B, la première naine blanche mise en évidence [d'après Lang & Gingerich (1979)].

époque, il est clair que ces nouveaux objets sont bien plus petits que les étoiles de la séquence principale. En effet, connaissant la distance  $d$  d'un de ces objets, on peut estimer son rayon  $R$  à partir de la mesure du flux lumineux  $f$  et de la température effective  $T_{\text{eff}}$  (déduite du spectre) en utilisant de la loi du corps noir pour la luminosité totale :

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{eff}}^4, \quad (3.1)$$

où  $\sigma = \pi^2 k^4 / (60c^2 \hbar^3) = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$  est la constante de Stefan-Boltzmann. La relation  $f = L / (4\pi d^2)$  donne alors

$$R = d \sqrt{\frac{f}{\sigma T_{\text{eff}}^4}}. \quad (3.2)$$

Les valeurs de  $R$  ainsi obtenues donnent une taille du même ordre de grandeur que celle d'une planète. Mais on ne connaît pas encore la masse de ces objets.

### 3.1.2 Des astres ultra-denses...

C'est en 1915 que l'astronome américain W.S. Adams établira que les naines blanches ont des masses de l'ordre de celle d'une étoile. Adams découvre en effet une troisième naine blanche : Sirius B, le compagnon de la plus brillante des étoiles du ciel, et dont la masse est connue. L'existence de Sirius B a été inférée par l'astronome et mathématicien allemand F. Bessel en 1844 à partir de l'observation d'oscillations dans le mouvement propre de Sirius. La détection visuelle ne viendra qu'en 1861, par un fabricant de télescope américain, A.G. Clark, qui essayait un nouveau modèle. La masse de Sirius B fut déterminée à partir de la troisième loi de Kepler par Boss en 1910 :  $M = 0.94 M_{\odot}$  (la valeur moderne est  $M = 1.00 M_{\odot}$ )<sup>1</sup>. En analysant le spectre de Sirius B, Adams lui attribue la température effective  $T_{\text{eff}} = 8000 \text{ K}$  (la valeur moderne est  $T_{\text{eff}} = 24700 \text{ K}$ ). La relation (3.1) conduit alors à un rayon  $R = 18800 \text{ km}$  (valeur moderne :  $R = 5850 \text{ km}$ ), d'où une densité moyenne  $\bar{\rho} = 5 \times 10^7 \text{ kg m}^{-3}$  (valeur moderne :  $\bar{\rho} = 3 \times 10^9 \text{ kg m}^{-3}$ ).

Cette densité — 2000 fois celle du platine ! — dépasse tout ce qui était connu à l'époque et pose le problème de la pression nécessaire pour contre-balancer l'énorme champ gravitationnel qui en résulte. Dans son livre classique sur la structure stellaire, A. Eddington (1926) souligne que la formule des gaz parfaits  $P = nkT$  ne s'applique certainement pas dans les naines blanches : *“it seems likely that the ordinary failure of the gas laws due to the finite size of molecules will occur at these densities, and I do not suppose that the white dwarfs behave like perfect gas.”* De plus, Eddington fait remarquer que les naines blanches doivent être très nombreuses dans la Galaxie, car si en 1926 on n'en connaît toujours que trois (40 Eri B, Van Maanen 2 et Sirius B), elles sont toutes à moins de 5 pc du Soleil, ce qui laisse supposer une densité galactique assez grande.

### 3.1.3 La mécanique quantique à la rescousse...

La solution au problème de la pression va être trouvée en cette même année 1926. La mécanique quantique est alors en plein développement et E. Fermi et P.A.M. Dirac introduisent la statistique de Fermi-Dirac pour décrire un gaz d'électrons à haute densité. En décembre 1926, R.H. Fowler<sup>2</sup> applique la statistique de Fermi-Dirac aux naines blanches et conclut que ces étoiles sont supportées par la pression de dégénérescence des électrons (Fowler 1926). Autrement dit, c'est le principe d'exclusion de Pauli qui s'oppose efficacement à la gravitation. Il s'agit-là d'une application astrophysique remarquable de la toute nouvelle mécanique quantique.

En 1929 Anderson fait remarquer qu'aux densités rencontrées dans les naines blanches, les électrons doivent être relativistes. S. Chandrasekhar (1931) montra que le “ramollissement” de l'équation d'état que cela implique conduit à une masse limite lorsque la densité centrale augmente et obtint  $M_{\text{max}} \simeq 1.4 M_{\odot}$  (*masse de Chandrasekhar*). Le même résultat a été obtenu indépendamment par L.D. Landau (1932). Chandrasekhar en tira la

<sup>1</sup>Cette valeur n'est pas représentative des masses de l'ensemble des naines blanches, dont la masse moyenne se situe plutôt autour de  $0.6 M_{\odot}$ , ainsi que nous le verrons au § 3.5.2.

<sup>2</sup>Ce Fowler ne doit pas être confondu avec W.A. Fowler qui reçut le Prix Nobel de Physique en 1983 pour ses travaux sur les réactions nucléaires et leur importance dans la formation des éléments chimiques de l'Univers.

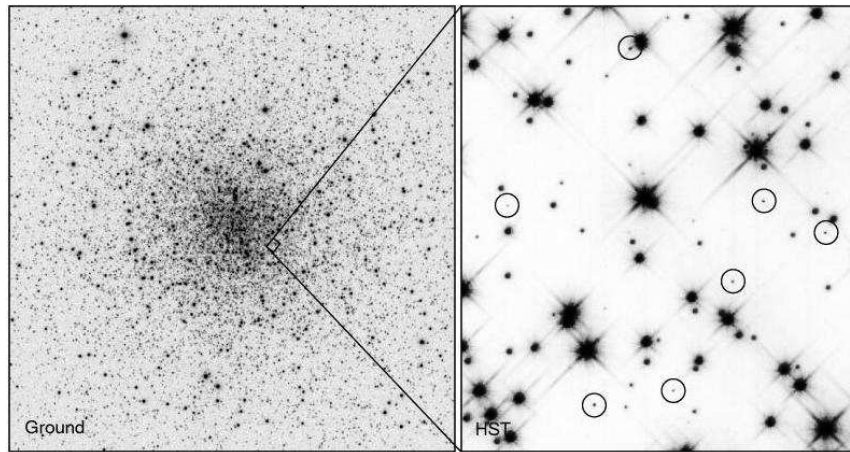


FIG. 3.2 – Naines blanches (cercles) observées dans l’amas globulaire Messier 4 par le télescope spatial Hubble [cf. Hansen et al. 2002].

conclusion suivante : “*The life history of a star of small mass must be essentially different from the life history of a star of large mass. For a star of small mass the natural white-dwarf stage is an initial step towards complete extinction. A star of large mass cannot pass into the white-dwarf stage and one is left speculating on other possibilities.*” On sait aujourd’hui que ces “autres possibilités” sont les étoiles à neutrons et les trous noirs.

Les travaux de Chandrasekhar reposant sur la théorie newtonienne de la gravitation, S.A. Kaplan (1949) établit les corrections apportées par la relativité générale.

En 1956, E. Schatzman incorpora l’effet des interactions faibles (capture des électrons par les protons) dans l’équation d’état des naines blanches. En 1961 T. Hamada et E.E. Salpeter construisirent des modèles de naines blanches en incorporant de plus les interactions électromagnétiques entre les électrons et les noyaux.

Nous arrêtons ici ce petit historique des naines blanches. Mentionnons simplement que l’on connaît aujourd’hui plusieurs milliers de naines blanches (le catalogue de McCook & Sion (1999) en contient 2249) et que la théorie des naines blanches a grandement bénéficié des observations réalisées à l’aide des satellites IUE (ultra-violet), EUVE et FUSE (ultra-violet lointain), ROSAT (rayons X), HIPPARCOS (Vauclair et al. 1997, Provencal et al. 1998), ainsi que du télescope spatial Hubble. Ce dernier a ainsi permis d’observer des naines blanches dans un amas globulaire, M 4, situé à 2 kpc (Figure 3.2), alors qu’en raison de leur faible luminosité, les naines blanches repertoriées jusqu’alors se trouvaient toutes dans le “voisinage” solaire (la plupart à moins de 100 pc).

## 3.2 Formation des naines blanches

Les naines blanches sont les “résidus” d’étoiles de masse faible ou moyenne ( $M < 8M_{\odot}$ ), une fois que les réactions thermonucléaires s’y sont arrêtées. A titre d’exemple, nous allons examiner l’évolution d’une étoile de type solaire (§ 3.2.1) puis nous discuterons des étoiles plus massives (§ 3.2.2).



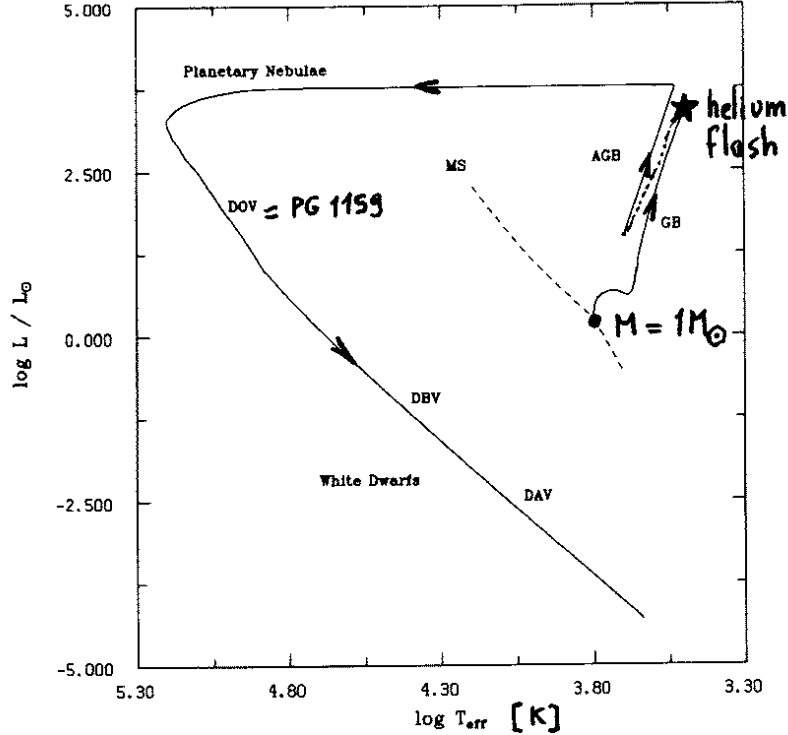


FIG. 3.3 – Evolution d’une étoile de type solaire dans le diagramme Hertzsprung-Russell [d’après Koester & Chanugam (1990)].

### 3.2.1 Evolution d’une étoile de $1 M_{\odot}$

Nous ne rappellerons ici que les grandes lignes de l’évolution d’une étoile d’une masse solaire et reportons à un cours de physique stellaire pour plus de détails.

On peut suivre l’évolution d’une étoile de  $1 M_{\odot}$  dans le diagramme HR (Fig. 3.3). Pendant les  $\sim 8 - 10$  milliards d’années qui suivent sa formation, l’étoile brûle son hydrogène en hélium et reste pratiquement au même point du diagramme HR. Quand suffisamment d’hélium est apparu dans les régions centrales (environ 12% de la masse), le cœur devient inerte, faute de combustible, et les réactions thermonucléaires se déplacent dans une coquille sphérique à sa périphérie. Ce changement s’accompagne de l’expansion et du refroidissement des couches externes : l’étoile quitte alors la séquence principale du diagramme HR pour la branche des *géantes rouges* (marquée ‘GB’ sur la Fig. 3.3). Le cœur d’hélium se contracte peu à peu. Après  $\sim 1$  milliard d’année, les conditions sont réunies pour l’ignition de l’hélium ( $T \sim 10^8$  K), l’étoile est alors parvenue au sommet de la branche des géantes rouges. La fusion de l’hélium produit du carbone et de l’oxygène. Au départ, cette réaction s’emballe et provoque ce qu’on appelle le *flash de l’hélium*. L’emballement des réactions thermonucléaires est dû à la dégénérescence des électrons dans le cœur de l’étoile, dégénérescence induite par la densité élevée. Les réactions thermonucléaires provoquent une élévation de température et, pour de la matière non dégénérée, une élévation de température se traduit par une élévation de la pression, ce qui permet une légère dilatation et un refroidissement, régulant par là les réactions thermonucléaires.

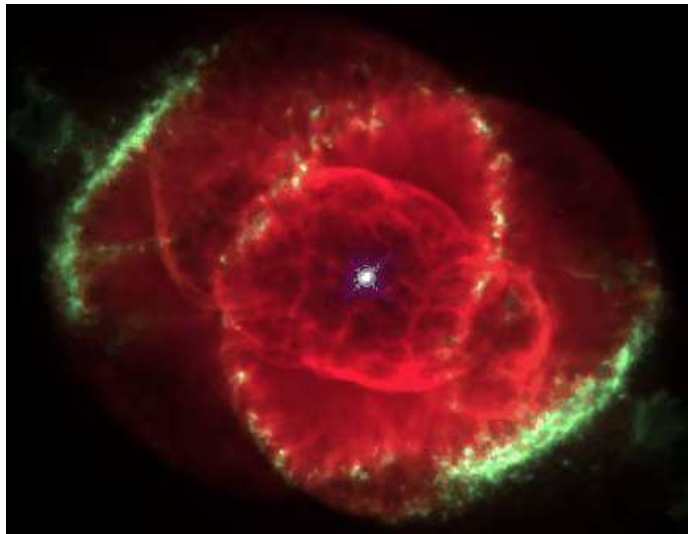


FIG. 3.4 – Nébuleuse planétaire NGC 6543 (“œil du chat”). Cette nébuleuse est âgée de 1000 ans environ. [Image HST/WFPC2].

Lorsque la matière est dégénérée, la pression n’est plus d’origine thermique et l’augmentation de température ne s’accompagne pas d’une augmentation de pression, d’où l’emballement des réactions. Lorsque la température dépasse la température de Fermi des électrons, ceux-ci ne sont plus dégénérés et le flash de l’hélium prend fin ; il aura duré quelques centaines d’années. L’étoile se trouve alors au bas de la *branche asymptotique aux géantes* (marquée ‘AGB’ sur la Fig. 3.3, pour “asymptotic giant branch”) et fusionne en son cœur l’hélium en carbone/oxygène dans des conditions de non dégénérescence. Lorsqu’il ne reste presque plus d’hélium au centre, la combustion se fait dans une coquille entourant le cœur, désormais inerte, de carbone et d’oxygène. L’étoile grimpe alors le long de la branche asymptotique aux géantes du diagramme HR. Au sommet de cette branche, l’étoile entre dans une phase d’instabilité qui conduit à l’éjection de la quasi-totalité des  $\sim 0.2 - 0.3 M_{\odot}$  de l’enveloppe d’hydrogène qui entourait la coquille d’hélium. Ce qui reste de l’étoile se contracte ensuite, ce qui a pour effet d’augmenter la température de surface et explique le déplacement vers la gauche dans le diagramme HR (cf. Fig. 3.3). Les photons émis par l’étoile deviennent de plus en plus “durs” (c’est-à-dire déplacés vers l’ultra-violet), et à un certain point, ils ionisent l’éjecta d’hydrogène, ce qui a pour effet de le rendre visible, sous la forme de ce que l’on appelle une *nébuleuse planétaire* (Figure 3.4). Quant la masse de l’enveloppe d’hydrogène passe en dessous d’un certain seuil, évalué à environ  $10^{-4} M_{\odot}$ , les réactions thermonucléaires s’arrêtent brutalement et l’étoile amorce son refroidissement. Sa luminosité ainsi que sa température de surface diminuent et l’étoile descend en diagonale vers le domaine des naines blanches. La première étape de cette descente est marquée ‘DOV’ sur la Fig. 3.3. On appelle également ces pré-naines blanches des *étoiles PG 1159* ou encore *GW Virginis*, du nom de leur prototype : PG 1159 – 035 = GW Virginis.

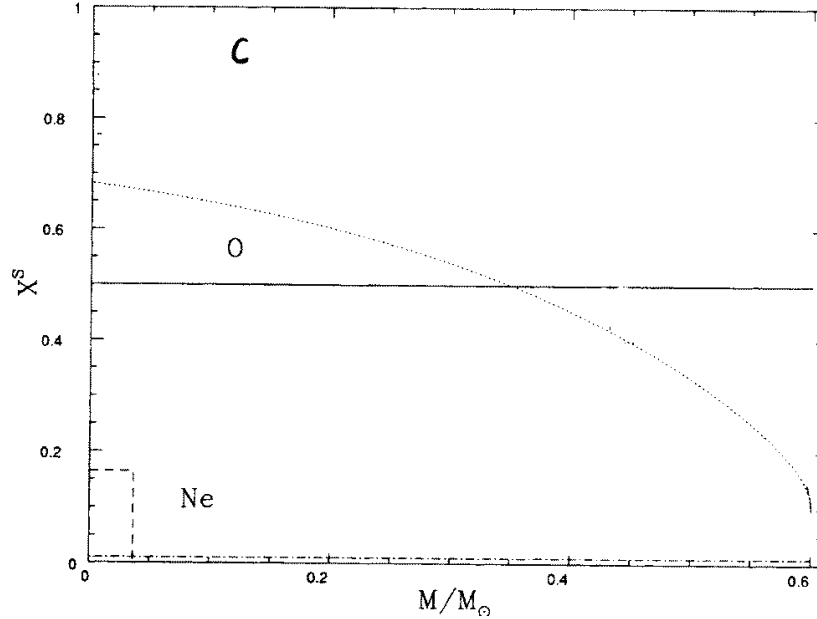


FIG. 3.5 – Composition d’une naine blanche de  $0.6 M_{\odot}$ . En abscisse est portée non la distance au centre  $r$  mais la masse  $M(r)$  incluse à l’intérieur de la sphère de rayon  $r$ ; en ordonnée est portée la fraction de masse  $X$  pour les quatre composants C (48.5 %), O (48.5%), Ne (1%) et Fe (0.1%). La distribution des 0.1% de fer est piquée au centre de l’étoile ( $M < 1.6 \times 10^{-3} M_{\odot}$ ) et n’est pas montrée sur ce graphe [d’après Segretain et al (1994)].

### 3.2.2 Devenir d’une étoile en fonction de sa masse

On pense que le scénario décrit ci-dessus est valable dans ces grandes lignes pour toutes les étoiles dont la masse sur la séquence principale est inférieure à  $8 M_{\odot}$ . Les étoiles dont la masse est dans le domaine  $8 M_{\odot} - 10.5 M_{\odot}$  termineraient également leur vie sous forme de naine blanche, mais avec un intérieur composé d’oxygène, néon et magnésium et non de carbone et oxygène. Au delà d’une dizaine de masse solaire, les réactions thermonucléaires ne s’arrêtent pas à la fusion de l’hélium mais poursuivent jusqu’à la synthèse du fer. Le cœur de fer est instable et s’effondre donnant naissance au phénomène de supernova, que nous étudierons dans le cours suivant. Le résidu de l’étoile est alors une étoile à neutrons ou un trou noir.

Les nombres limites de  $8 M_{\odot}$  et  $10.5 M_{\odot}$  ne sont pas fermement établis car ils dépendent de la quantité de matière éjectée dans la phase post-AGB. La modélisation théorique de l’éjection, d’où sont issus ces nombres, est assez complexe et fait toujours l’objet d’études approfondies. Pour une revue, on pourra consulter le § 4.1 de Weidmann (1990).

## 3.3 Equation d'état

### 3.3.1 Composition

Comme résultat de l'évolution d'une étoile de faible/moyenne masse (cf. §. 3.2), une naine blanche "standard" est composée

- d'une très fine enveloppe d'hydrogène ou d'hélium, qui ne représente pas plus de  $10^{-4}$  fois la masse totale de l'étoile. Cette enveloppe détermine les propriétés spectroscopiques des naines blanches et sa composition, très variable, sera discutée au § 3.6.
- d'un intérieur, qui constitue la quasi-totalité de l'étoile à la fois en rayon et en masse, et qui est formé de noyaux de carbone et d'oxygène et d'électrons. On rencontre également des traces de  $^{22}\text{Ne}$  et  $^{56}\text{Fe}$  avec des abondances (fraction de masse) de l'ordre de  $10^{-2}$  et  $10^{-3}$  respectivement.

En étudiant les processus de cristallisation d'un mélange C/O/Ne/Fe, Segretain et al. (1994) ont montré que lorsque la température de la naine blanche passe en dessous d'un certain seuil  $T_{\text{crist}} \sim 8 \times 10^6$  K, l'intérieur de l'étoile se solidifie avec une plus grande abondance d'oxygène vers le centre et la concentration dans le cœur du 1% de néon et des 0.1% de fer (cf. Fig. 3.5).

### 3.3.2 Pression d'un gaz dégénéré d'électrons

Ainsi que nous allons le voir, ce sont les électrons qui fournissent la quasi-totalité de la pression. Les électrons étant des fermions, leur fonction de distribution est donnée par la statistique de Fermi-Dirac<sup>3</sup> :

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon - \mu}{kT}\right) + 1}, \quad (3.3)$$

où  $\varepsilon$  est l'énergie d'un électron,  $\mu$  le potentiel chimique des électrons,  $T$  la température et  $k$  la constante de Boltzmann. Si la densité numérique d'électrons est  $n_e$ , leur *impulsion de Fermi* vaut

$$p_e^{\text{F}} = \hbar(3\pi^2 n_e)^{1/3}. \quad (3.4)$$

On peut estimer l'ordre de grandeur de  $p_e^{\text{F}}$  pour une naine blanche : en considérant une masse  $M = 1 M_{\odot} = 2 \times 10^{30}$  kg et un rayon  $R = 5000$  km, la densité de masse moyenne vaut  $\rho = 4 \times 10^9$  kg m<sup>-3</sup>. La densité d'électrons étant reliée à  $\rho$  par la formule  $n_e = Y_e(\rho/m_{\text{B}})$  où  $m_{\text{B}} = 1.67 \times 10^{-27}$  kg est la masse baryonique moyenne et  $Y_e \simeq 0.5$  la fraction électronique, on obtient  $n_e = 1.2 \times 10^{36}$  m<sup>-3</sup>. En reportant cette valeur dans (3.4), il vient  $p_e^{\text{F}} = 3.5 \times 10^{-22}$  kg m s<sup>-1</sup>. Il faut remarquer que cette valeur est plus grande que le produit  $m_e c = 2.7 \times 10^{-22}$  kg m s<sup>-1</sup>, ce qui signifie que les électrons sont relativistes.

Examinons à présent l'état de dégénérescence des électrons. Pour un gaz relativiste, la *température de Fermi*  $T^{\text{F}}$  est définie par  $kT^{\text{F}} = \varepsilon^{\text{F}} - mc^2$ , où  $\varepsilon^{\text{F}}$  est l'énergie associée

<sup>3</sup>Pour des rappels sur les gaz de Fermi, on consultera avec profit le Chapitre VI de Diu et al. (1989).

à l'impulsion de Fermi. On a donc

$$T_e^F = \frac{1}{k} \left( \sqrt{(p_e^F)^2 c^2 + m_e^2 c^4} - m_e c^2 \right) . \quad (3.5)$$

Avec la valeur de  $p_e^F$  obtenue ci-dessus, il vient  $T_e^F = 3.7 \times 10^9$  K. Or la température au sein des naines blanches les plus chaudes est de l'ordre de  $10^7$  K, une borne supérieure étant donnée par la température dans le cœur au moment de la fusion de l'hélium en carbone et oxygène :  $T \sim 10^8$  K. On a donc  $T \ll T_e^F$ , ce qui signifie que les électrons sont dégénérés. Autrement dit, l'approximation d'un gaz de Fermi à température nulle est très bonne. La pression se calcule en prenant l'intégrale sur l'espace des phases du flux d'impulsion. On obtient

$$P = \frac{m_e^4 c^5}{24\pi^2 \hbar^3} F(x) , \quad (3.6)$$

avec

$$F(x) := x(2x^2 - 3)\sqrt{1+x^2} + 3\ln(x + \sqrt{1+x^2}) , \quad (3.7)$$

$$x := \frac{p_e^F}{m_e c} = \frac{\hbar}{m_e c} (3\pi^2 n_e)^{1/3} . \quad (3.8)$$

Remarquons que  $P$  est une fonction de  $n_e$  uniquement (par l'intermédiaire de  $x$ ) et que la température n'apparaît pas dans cette formule (gaz complètement dégénéré). L'expression (3.6) admet deux cas limites, pour lesquels la pression s'exprime par une puissance de la densité (équation d'état dite *polytropique*).

Tout d'abord, à basse densité, le gaz n'est pas relativiste :  $x \ll 1$  et un développement limité de  $F(x)$  au voisinage de  $x = 0$  conduit à

$$F(x) \sim \frac{8}{5} x^5 , \quad (3.9)$$

si bien que

$$P = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{5m_e} n_e^{5/3} \quad (\text{limite non relativiste}) , \quad (3.10)$$

ou encore, en fonction de la densité de masse totale  $\rho = n_e m_B / Y_e$  :

$$\boxed{P = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{5m_e m_B^{5/3}} Y_e^{5/3} \rho^{5/3} \quad (\text{limite non relativiste})} . \quad (3.11)$$

Par ailleurs, à très haute densité, le gaz est ultra-relativiste :  $x \gg 1$ . Le comportement asymptotique de  $F(x)$  étant

$$F(x) \sim 2x^4 \quad \text{quand } x \rightarrow +\infty , \quad (3.12)$$

l'expression (3.6) devient

$$P = \frac{(3\pi^2)^{1/3}}{4} \hbar c n_e^{4/3} \quad (\text{limite ultra-relativiste}) , \quad (3.13)$$

ou encore

$$P = \frac{(3\pi^2)^{1/3}}{4m_B^{4/3}} \hbar c Y_e^{4/3} \rho^{4/3} \quad (\text{limite ultra-relativiste}) \quad . \quad (3.14)$$

La limite (3.11) s'applique aux naines blanches peu massives ou aux couches externes des naines blanches. Inversement, la limite (3.14) s'applique aux naines blanches les plus massives.

### 3.3.3 Comparaison des différentes pressions

Afin de montrer que dans une naine blanche la pression est fournie par les électrons, on peut se livrer à quelques estimations numériques. Reprenant la densité moyenne  $\rho = 4 \times 10^9 \text{ kg m}^{-3}$  et  $Y_e \simeq 0.5$ , la limite non relativiste (3.11) donne comme pression des électrons  $P_e = 3.2 \times 10^{22} \text{ Pa}$  et la limite ultra-relativiste conduit à sensiblement la même valeur :  $P_e = 3.1 \times 10^{22} \text{ Pa}$ . Comparons cette valeur à la pression fournie par les noyaux. Leur densité numérique vaut  $n_N = \rho/Am_B = 1.8 \times 10^{35} \text{ m}^{-3}$ , où le nombre de masse moyen  $A$  a été pris égal à 12 (carbone). Les noyaux ne sont pas tous des fermions ; pour ceux qui le sont (par exemple  $^{13}\text{C}$ ), l'impulsion de Fermi correspondant à  $n_N$  vaut  $p_N^F = 1.8 \times 10^{-22} \text{ kg m s}^{-1}$  [cf. Eq. (3.4)]. En comparant ce nombre à  $m_N c = Am_B c = 6.5 \times 10^{-18} \text{ kg m s}^{-1}$ , on constate que les noyaux ne sont pas relativistes. De plus leur température de Fermi  $T_N^F = 6 \times 10^4 \text{ K}$  [cf. Eq. (3.5)] est inférieure à  $T$ , ce qui signifie que les noyaux ne sont pas dégénérés. Lorsque les noyaux sont dans la phase fluide, i.e. lorsque la naine blanche est encore chaude, un ordre de grandeur de leur pression est fourni par la loi des gaz parfaits non dégénérés :  $P_N = n_N k T$ . On obtient, pour  $T = 10^7 \text{ K}$ ,  $P_N = 2.5 \times 10^{19} \text{ Pa}$ , c'est-à-dire une valeur bien inférieure à  $P_e$ . La prise en compte des interactions coulombiennes entre les noyaux lorsqu'ils constituent un réseau cristallin ne changerait pas cette conclusion.

Une autre source a priori possible de pression est la pression de radiation

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{3} a T^4 , \quad (3.15)$$

où  $a = 4\sigma/c = (\pi^2/15) k^4 \hbar^{-3} c^{-3} = 7.6 \times 10^{-16} \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-4}$ . Pour  $T = 10^7 \text{ K}$ , on obtient  $P_{\text{rad}} = 2.5 \times 10^{12} \text{ Pa}$ , ce qui est complètement négligeable par rapport à  $P_e$ .

En conclusion, la pression au sein d'une naine blanche est essentiellement fournie par la pression de dégénérescence des électrons.

### 3.3.4 Corrections à l'équation d'état

Ne tenir compte que de la pression des électrons assimilés à un gaz parfait de Fermi dégénéré [Eq. (3.6)] constitue une très bonne approximation pour les naines blanches. Toutefois, des petites corrections, dues aux interactions (électromagnétiques et faibles) entre les électrons et les noyaux, peuvent jouer un rôle important au niveau de la stabilité de ces étoiles, même si elles ne modifient la pression que par un facteur de l'ordre de un pourcent.

### Corrections électrostatiques

Les interactions électromagnétiques entre les électrons et les noyaux diminuent légèrement la pression. En effet les noyaux attirent les électrons et la distance électron-noyau étant en moyenne plus courte que la distance électron-électron, cette attraction l'emporte sur la répulsion entre les électrons. Cet effet a été pris en compte pour la première fois par Hamada & Salpeter (1961).

### Réactions $\beta$ inverses

A haute densité ( $\rho > 1.2 \times 10^{10} \text{ kg m}^{-3}$ ), l'énergie de Fermi des électrons devient supérieure à la différence  $(m_n - m_p)c^2$  entre les énergies de masse du neutron et du proton, si bien des réactions de capture des électrons par les noyaux (*réactions  $\beta$  inverses*) sont possibles :



La réaction inverse (*désintégration  $\beta$* ) est interdite par le principe d'exclusion de Pauli : les électrons étant dégénérés, tous les états quantiques jusqu'à l'énergie de Fermi sont occupés et il est donc énergétiquement très coûteux de produire un nouvel électron.

Les réactions  $\beta$  inverses ont pour effet de diminuer  $Y_e$  et donc de diminuer la pression [cf. Eq. (3.14)]. Elles ont été incorporées dans l'étude des naines blanches pour la première fois par E. Schatzman (1956).

### Equations d'état modernes

Les équations d'état modernes incluent de nombreux autres effets (température finie, polarisation des électrons dans le champ électromagnétique des noyaux, etc...), comme on pourra le voir en consultant le travail de Segretain et al. (1994).

## 3.4 Masse de Chandrasekhar

Comme il a été dit en introduction, une des caractéristiques remarquables des naines blanches est l'existence d'une masse maximale, dite *masse de Chandrasekhar*. Ainsi que nous allons le voir, cette propriété est due à ce que l'*indice adiabatique*

$$\gamma := \frac{d \ln P}{d \ln \rho} \quad (3.17)$$

de la matière qui constitue la naine blanche tend vers 4/3 à haute densité, ainsi qu'on le voit sur l'Eq. (3.14). Différents arguments permettent en effet de voir que 4/3 est une valeur critique dans la théorie des corps autogravitants newtoniens :

### 3.4.1 Argument basé sur l'équation de l'hydrostatique

Considérons les équations qui régissent l'équilibre d'un corps newtonien autogravitant et à symétrie sphérique, obtenues au § 2.3.2 [Eqs. (2.12)-(2.14)] :

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2} \quad (3.18)$$

$$m(r) = \int_0^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr' . \quad (3.19)$$

Faisons de plus l'hypothèse (grossière) que le corps est homogène ( $\rho = \text{const}$ ). L'équation (3.19) donne alors  $m(r) = (4\pi/3)r^3\rho$ , si bien que (3.18) peut s'écrire

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{3}{4\pi} \frac{Gm(r)^2}{r^5} . \quad (3.20)$$

De cette relation, on déduit que le gradient de pression moyen varie en fonction de la masse  $M$  et du rayon  $R$  de l'étoile comme approximativement

$$\frac{dP}{dr} \propto \frac{M^2}{R^5} . \quad (3.21)$$

Par ailleurs, si on considère une équation d'état polytropique,  $P = \kappa\rho^\gamma$ ,

$$\frac{dP}{dr} = \kappa\gamma\rho^{\gamma-1} \frac{d\rho}{dr} , \quad (3.22)$$

avec  $\rho \propto M/R^3$  et  $d\rho/dr \propto M/R^4$ , d'où

$$\frac{dP}{dr} \propto \frac{M^\gamma}{R^{3\gamma+1}} . \quad (3.23)$$

En égalant le gradient de pression hydrostatique (3.21) et le gradient de pression issu de l'équation d'état (3.23), on obtient

$$\boxed{M^{\gamma-2} \propto R^{3(\gamma-4/3)}} . \quad (3.24)$$

Cette relation masse-rayon, bien qu'obtenue par des arguments approchés, est en fait exacte, ainsi que nous l'avons vu au § 2.4.3. La constante de proportionnalité est une fonction de  $\kappa$  et  $\gamma$ , donnée par l'Eq. (2.47).

On déduit de (3.24) que si  $\gamma = 4/3$ , alors la valeur de  $M$  ne dépend pas de  $R$ . Autrement dit, pour une équation d'état  $P = \kappa\rho^{4/3}$ , il n'est pas possible d'avoir une diversité de masses en variant le rayon des objets ; l'équilibre n'est possible que pour une seule masse,  $M_0$ , qui dépend de  $\kappa$  (dépendance cachée dans le ' $\propto$ ' de l'Eq. (3.24)). Dans le cas des naines blanches, l'équation d'état tend seulement asymptotiquement vers  $\gamma = 4/3$  ; c'est pour cela qu'une diversité de masses existe. Par contre, à très haute densité,  $\gamma \simeq 4/3$  et une seule masse est possible : la masse de Chandrasekhar.



### 3.4.2 Argument de Landau

Landau (1932) a expliqué la masse de Chandrasekhar par un argument énergétique dont voici une variante.

L'énergie totale d'une assemblée de  $N$  fermions (électrons) ultra-relativistes en interaction gravitationnelle et distribués uniformément dans une sphère de rayon  $R$  est

$$E = E_{\text{int}} + E_{\text{grav}} , \quad (3.25)$$

où  $E_{\text{int}}$  est l'énergie interne du gaz de Fermi ultra-relativiste et  $E_{\text{grav}}$  est l'énergie potentielle gravitationnelle. On a  $E_{\text{int}} = N\bar{\varepsilon}$ , où  $\bar{\varepsilon}$  est l'énergie moyenne (énergie de masse + énergie cinétique) d'un fermion. Cette dernière est donnée par une intégrale dans l'espace des phases, qui, pour un gaz complètement dégénéré, prend la forme suivante (tous les états d'impulsion  $\|\vec{p}\| < p_{\text{F}}$  sont occupés)

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\int_{\|\vec{p}\| < p_{\text{F}}} \varepsilon d^3\vec{p}}{\int_{\|\vec{p}\| < p_{\text{F}}} d^3\vec{p}} . \quad (3.26)$$

Puisque les fermions sont supposés ultra-relativistes, leur énergie  $\varepsilon$  est reliée à leur impulsion par  $\varepsilon = pc$ . En reportant cette expression dans l'intégrale ci-dessus, il vient immédiatement  $\bar{\varepsilon} = 3p_{\text{F}}c/4$ , si bien que l'énergie interne s'écrit

$$E_{\text{int}} = \frac{3}{4}N p_{\text{F}}c = \frac{3}{4}N \hbar \left(3\pi^2 \frac{N}{V}\right)^{1/3} c = \left(\frac{243\pi}{256}\right)^{1/3} \hbar c \frac{N^{4/3}}{R} , \quad (3.27)$$

où l'on a utilisé l'Eq. (3.4) pour exprimer  $p_{\text{F}}$  en terme de la densité de particules  $N/V$ .

L'énergie potentielle gravitationnelle est donnée par l'Eq. (1.2), puisque nous faisons l'hypothèse d'une boule homogène :

$$E_{\text{grav}} = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} = -\frac{3}{5} \frac{GN^2 m_{\text{B}}^2}{Y^2 R} , \quad (3.28)$$

où  $Y$  est le rapport du nombre de fermions ultra-relativistes sur le nombre de baryons, ces derniers étant les particules qui contribuent à la masse. Ainsi la fraction de la masse totale associée à un fermion est  $m_{\text{B}}/Y$ . Le point important est que les énergies  $E_{\text{int}}$  et  $E_{\text{grav}}$  varient toutes deux comme  $1/R$ . Cela n'aurait pas été le cas de  $E_{\text{int}}$  si les fermions n'avaient pas été ultra-relativistes. En reportant les valeurs de  $E_{\text{int}}$  et  $E_{\text{grav}}$  dans (3.25), il vient

$$E = \frac{3}{5} \frac{Gm_{\text{B}}^2}{Y^2} \frac{N}{R} \left[ \frac{5}{3} \left(\frac{243\pi}{256}\right)^{1/3} \frac{\hbar c Y^2}{Gm_{\text{B}}^2} N^{1/3} - N \right] . \quad (3.29)$$

Posons alors

$$N_{\text{c}} := \frac{3\pi^{1/2}}{16} \left(\frac{5\hbar c Y^2}{Gm_{\text{B}}^2}\right)^{3/2} \quad (3.30)$$

afin de mettre (3.29) sous la forme

$$E = \frac{3}{5} \frac{Gm_{\text{B}}^2}{Y^2} \frac{NN_{\text{c}}}{R} \left[ \left(\frac{N}{N_{\text{c}}}\right)^{1/3} - \frac{N}{N_{\text{c}}} \right] . \quad (3.31)$$

Une configuration d'équilibre stable pour les  $N$  fermions doit se trouver dans un minimum de l'énergie  $E$ . Deux cas sont possibles :

- si  $N < N_c$ , le terme entre crochets dans (3.31) est positif et  $E$  diminue lorsque  $R$  augmente. Mais alors la densité diminue et les fermions deviennent moins relativistes.  $E_{\text{int}}$  devient alors une puissance de  $1/R$  supérieure à 1 (à la limite non relativiste,  $E_{\text{int}} \propto 1/R^2$ ).  $E_{\text{int}}$  décroît donc plus vite lorsque  $R$  augmente que  $|E_{\text{grav}}|$ . A un certain stade  $E_{\text{grav}}$  l'emporte sur  $E_{\text{int}}$  et  $E$  devient négative. Elle devient alors une fonction croissante de  $R$ . Un minimum existe donc dans ce cas pour une certaine valeur de  $R$ .
- si  $N > N_c$ , le terme entre crochets dans (3.31) est négatif et  $E$  diminue lorsque  $R$  diminue. La densité augmente alors et les fermions sont encore plus ultra-relativistes.  $E$  décroît donc sans fin lorsque  $R \rightarrow 0$ , si bien qu'aucun minimum n'existe pour un rayon fini.

Ainsi, le nombre maximum de fermions pour lequel un équilibre stable est possible est  $N_c$ . La masse associée à ce nombre est  $M_c = N_c m_B / Y$ , c'est-à-dire :

$$M_c = \frac{3\pi^{1/2}}{16} \left( \frac{5\hbar c}{G} \right)^{3/2} \frac{Y^2}{m_B^2} . \quad (3.32)$$

Dans le cas d'une naine blanche, où les fermions ultra-relativistes sont les électrons et  $Y = Y_e \simeq 0.5$ ,  $M_c$  est la masse de Chandrasekhar. La formule ci-dessus montre que la masse de Chandrasekhar ne dépend que des constantes fondamentales  $\hbar$ ,  $c$ ,  $G$  et  $m_B$ . En les remplaçant par leurs valeurs numériques, on obtient

$$M_c = 1.73 \left( \frac{Y_e}{0.5} \right)^2 M_\odot . \quad (3.33)$$

Cette valeur est un peu plus grande que le résultat correct, issu de l'intégration des équations de l'hydrostatique (cf. § 3.4.3), mais l'ordre de grandeur est le bon. Il ne fallait pas s'attendre à un résultat exact, étant donné que nous avons fait l'hypothèse d'un profil de densité uniforme, ce qui est loin d'être le cas pour un polytrophe  $\gamma = 4/3$  (cf. Fig. 2.2).

### 3.4.3 Valeur de la masse de Chandrasekhar

Nous avons vu, lors de l'étude des polytropes au § 2.4, que pour un polytrophe  $\gamma = 4/3$ , il ne pouvait y avoir qu'une seule valeur de la masse, donnée par l'Eq. (2.48) qui ne dépend que du coefficient polytropique  $\kappa$ . Puisque l'équation d'état polytropique  $\gamma = 4/3$  correspond à la limite ultra-relativiste du gaz de Fermi d'électrons dégénéré, cela fournit la valeur exacte de la masse de Chandrasekhar. Dans le cas présent, le coefficient  $\kappa$  est donné par l'équation (3.14) :

$$\kappa = \frac{(3\pi^2)^{1/3}}{4m_B^{4/3}} \hbar c Y_e^{4/3} . \quad (3.34)$$

En reportant cette valeur dans l'expression de la masse critique  $M_{\gamma=4/3}$  donnée par l'Eq. (2.48), on obtient

$$M_{\text{Chandra}} = \frac{\sqrt{3\pi}}{2m_{\text{B}}^2} \left( \frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2} X_3^2 [-\theta_3'(X_3)] Y_e^2, \quad (3.35)$$

avec  $X_3^2 [-\theta_3'(X_3)] \simeq 2.018236$ . L'application numérique conduit à

$$M_{\text{Chandra}} = 1.457 \left( \frac{Y_e}{0.5} \right)^2 M_{\odot}. \quad (3.36)$$

Remarquons que cette valeur n'est pas trop éloignée de la valeur approchée obtenue par l'argument de Landau [Eq. (3.33)] et que la dépendance en  $Y_e$  est la même.

En théorie newtonienne, la masse de Chandrasekhar est une masse limite, obtenue lorsque  $\rho \rightarrow +\infty$  (pour avoir  $\gamma \rightarrow 4/3$ ). Il n'en va pas de même lorsque l'on prend en compte les effets de la relativité générale<sup>4</sup>. Kaplan (1949) a montré que la masse maximale est alors atteinte pour une valeur finie de la densité centrale ( $\rho_c = 2.7 \times 10^{13} \text{ kg m}^{-3}$ ) et est légèrement inférieure à la masse newtonienne.

La prise en compte des réactions  $\beta$  inverses (cf. § 3.3.4) limite également la masse de Chandrasekhar, ainsi qu'on peut le voir sur la Fig. 3.6.

### 3.4.4 Relation masse-rayon

La relation masse-rayon des naines blanches obtenue pour diverses équations d'état est représentée sur la Fig. 3.6. La masse de Chandrasekhar pour les modèles gaz de Fermi pur se lit comme la limite  $R \rightarrow 0$  des courbes en pointillés. La cassure brutale dans les courbes en traits pleins est due aux captures électroniques (réaction  $\beta$  inverse) qui ont lieu dans les étoiles les plus massives (cf. § 3.3.4).

Il convient de noter que le rayon est une fonction décroissante de la masse : les naines blanches les plus massives sont aussi les plus petites, donc les moins lumineuses [cf. Eq. (3.1)]. Ce comportement s'explique par le fait que (i) l'indice adiabatique  $\gamma$  varie entre  $5/3$  pour les naines blanches les moins massives [Eq. (3.11)] et  $4/3$  pour les naines blanches les plus massives [Eq. (3.14)] et (ii) pour un polytrophe, le rayon ne devient une fonction croissante de la masse que pour  $\gamma > 2$ , en accord avec l'Eq. (3.24).

## 3.5 Masses et rayons observés

### 3.5.1 Méthodes de mesure

Pour des naines blanches dont on connaît la distance  $d$ , le rayon  $R$  se déduit du flux lumineux et de la température effective par la relation (3.2).

Quant à la masse, on peut recenser cinq méthodes de détermination, plus ou moins directes :

<sup>4</sup>Rappelons que pour une naine blanche, le paramètre de relativité  $\Xi \sim |E_{\text{grav}}|/(Mc^2)$  est de l'ordre de  $10^{-4}$  et peut atteindre  $10^{-3}$  pour les naines blanches les plus massives.

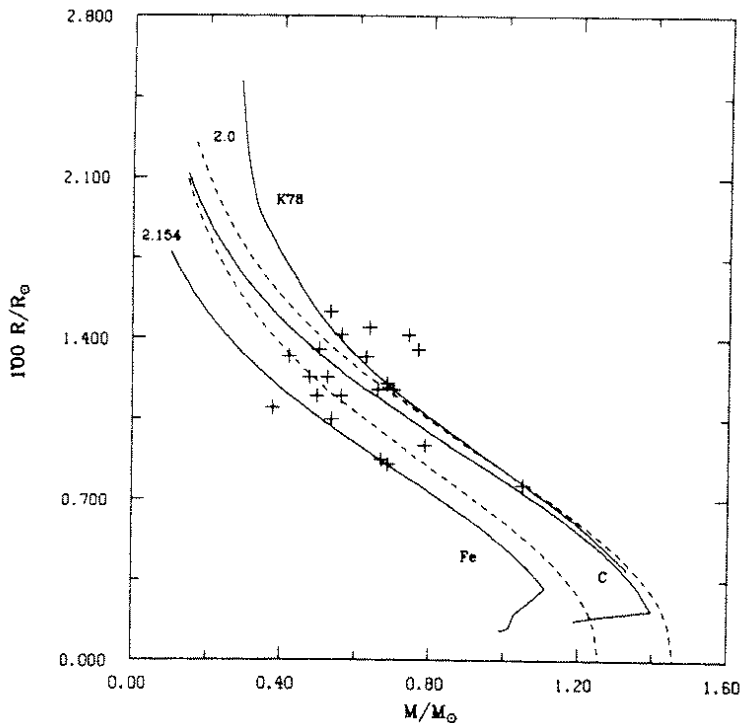


FIG. 3.6 – Relation masse-rayon pour les naines blanches. Les courbes en pointillés correspondent à l'équation d'état d'un gaz parfait de Fermi dégénéré avec  $Y_e = 0.46$  (courbe de gauche) et  $Y_e = 0.50$  (courbe de droite). Les courbes en traits pleins correspondent à des intérieurs de fer (Fe) et carbone (C) purs d'après les modèles de Hamada & Salpeter (1961). La courbe marquée K78 représente le modèle de Koester (1978) avec la température centrale  $T_c = 10^8$  K. Les croix représentent des valeurs “mesurées” (cf. discussion au § 3.5.1) du couple  $(M, R)$  [d'après Koester & Chanmugam (1990)].

### Lois de Kepler

Lorsque la naine blanche fait partie d'un système binaire dont le mouvement orbital est observé et dont on connaît la distance, on peut déduire sa masse de la troisième loi de Kepler. C'est par exemple le cas des deux naines blanches historiques 40 Eri B ( $M = 0.50 M_\odot$ ) et Sirius B ( $M = 1.00 M_\odot$ ). Cette détermination de la masse est la plus directe qui soit, puisqu'elle ne fait appel qu'à la loi de Kepler. Elle peut donc être utilisée pour tester la relation masse-rayon théorique. Le satellite astrométrique HIPPARCOS a permis de mesurer par parallaxe la distance de plusieurs naines blanches membres d'un système binaire. Les couples  $(M, R)$  ainsi mesurés sont comparés aux modèles théoriques sur la Fig. 3.7. On y remarque que les mesures sur les naines blanches “historiques” 40 Eri B et Sirius B, ainsi que sur Procyon B<sup>5</sup>, sont compatibles avec des intérieurs standards carbone-oxygène, présentés au § 3.3.1.

<sup>5</sup>Jusqu'à très récemment, la détermination du couple  $(M, R)$  de Procyon B la rapprochait plutôt d'un intérieur de fer, ce qui posait un problème aux théories d'évolution stellaire [pour une discussion, cf. Provencal et al. (1997)]. Le problème a été résolu l'année dernière par Provencal et al. (2002).

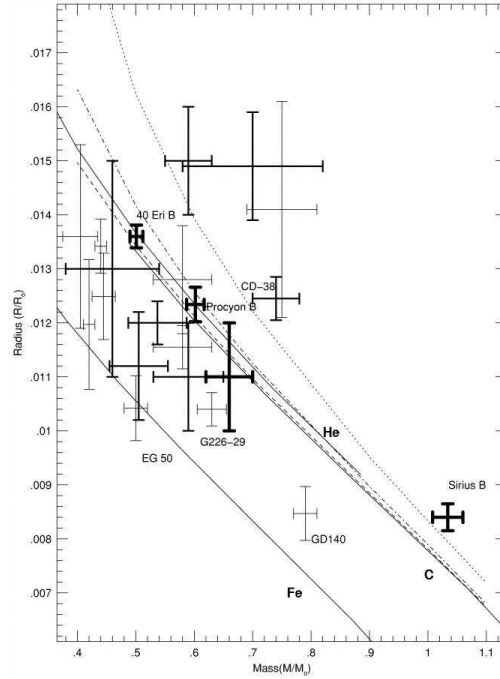


FIG. 3.7 – Couples (masse, rayon) mesurés grâce au satellite HIPPARCOS et à l’instrument STIS sur le HST pour des naines blanches en système binaire (croix en traits gras), et comparés à diverses relations masse-rayon théoriques : les courbes en traits continus correspondent au modèles d’intérieur d’hélium (He), de carbone (C) et de fer (Fe) d’Hamada & Salpeter (1961), tout comme sur la Fig. 3.6. Les courbes en pointillés, trait mixte et en tirets sont respectivement des modèles de Wood (1995) pour des atmosphères d’hélium de 25000, 16700 et 7800 K [d’après Provencal et al. (2002)].

### Décalage vers le rouge gravitationnel

Le décalage spectral vers le rouge d’origine gravitationnelle (*effet Einstein*) fournit le rapport  $M/R$  suivant la formule :

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \Xi = \frac{GM}{Rc^2} . \quad (3.37)$$

Rappelons que pour les naines blanches  $\Xi \sim 10^{-4}$  à  $10^{-3}$  (tableau 1.1). L’effet n’est donc pas très facile à mesurer, d’autant plus qu’il faut le distinguer de l’effet Doppler lié au mouvement de l’étoile par rapport à la Terre. Cela n’est possible que si la naine blanche a un compagnon ou fait partie d’un amas d’étoiles dont on connaît la vitesse radiale.

La mesure du décalage vers le rouge des raies de la naine blanche Sirius B a constitué l’un des trois tests classiques de la relativité générale (après l’avance du périhélie de Mercure et la déviation des rayons lumineux au voisinage du disque solaire). Cependant ce test n’est pas aussi précis que les deux précédents. La première valeur mesurée par W.S. Adams en 1925 était  $\Delta\lambda/\lambda = 6.3 \times 10^{-5}$  sur la raie de Balmer  $H\alpha$ , ce qui s’accordait assez bien avec la valeur découlant du rapport  $M/R$  estimé à cette époque,  $GM/Rc^2 = 8.3 \times 10^{-5}$ , et fit conclure à la validité de la relativité générale. Or le rayon de Sirius B déterminé à cette époque était surestimé. Les valeurs modernes de  $M/R$  conduisent plutôt à  $GM/Rc^2 = 2.8 \times 10^{-4}$ , ce qui ne correspond pas du tout à la valeur de  $\Delta\lambda/\lambda$  mesurée

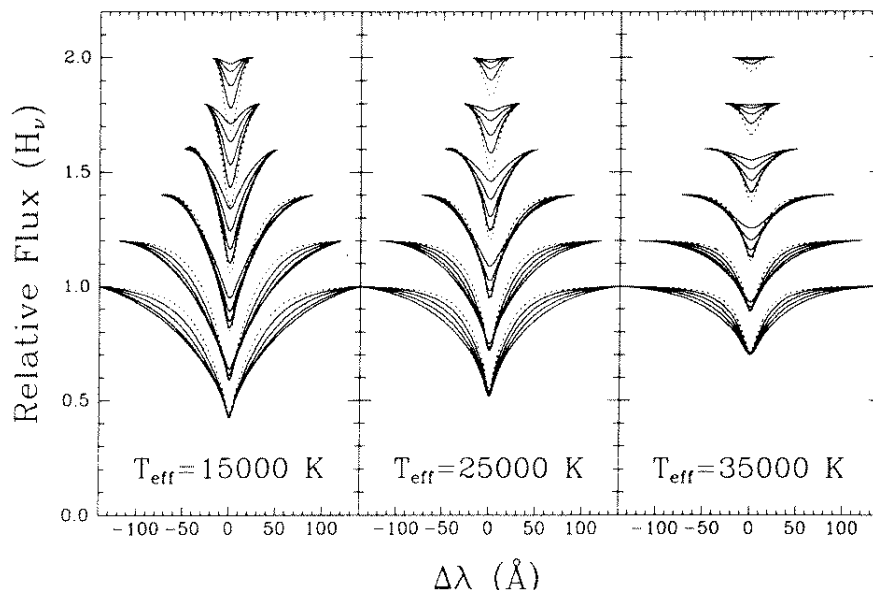


FIG. 3.8 – Forme théorique des raies d’absorption de la séquence de Balmer dans l’atmosphère des naines blanches. Le groupe de raies dessiné tout en bas correspond à  $H\beta$ , on trouve ensuite en montant  $H\gamma$ ,  $H\delta$ ,  $H\epsilon$ ,  $H8$  et  $H9$ . Dans chaque groupe, les différents profils correspondent à différentes valeurs du champ gravitationnel en surface : le profil le plus étroit (en pointillés) correspond à  $g = 10^5 \text{ m s}^{-2}$  et le plus large à  $g = 10^7 \text{ m s}^{-2}$  [d’après Bergeron, Saffer & Liebert (1992)].

par Adams. Heureusement, les valeurs actuelles de  $\Delta\lambda/\lambda$  concordent avec ce nouveau  $GM/Rc^2$ . Pour plus de détails sur cette histoire, on pourra consulter Greenstein et al. (1985).

A partir du rapport  $M/R$  fourni par le décalage vers le rouge gravitationnel, il faut une détermination indépendante de  $R$  [cf Eq. (3.2)] ou bien utiliser une relation masse-rayon théorique [cf. § 3.4.4] pour obtenir la masse de l’étoile. La masse d’une vingtaine de naines blanches a pu être déterminée de cette façon (cf. Fig. 3.10).

### Modèles d’atmosphère et largeur des raies de Balmer

La méthode la plus répandue pour mesurer la masse des naines blanches est indirecte : elle consiste tout d’abord à déterminer la forme des raies de Balmer dans le spectre de l’étoile. En comparant avec des modèles d’atmosphère, on en déduit la gravité de surface  $g = GM/R^2$  ainsi que la température effective (cf. Figs. 3.8 et 3.9). On utilise ensuite une relation théorique masse-rayon pour obtenir  $M$  à partir de  $g$ .

Sur la Fig. 3.10 est effectuée la comparaison entre les masses déterminées de cette façon et celles obtenues à partir du décalage vers le rouge gravitationnel.

### Parallaxe et température effective

Pour les naines blanches les plus proches, la mesure de la parallaxe fournit la distance précise de l’étoile. On a donc accès à sa luminosité intrinsèque  $L$  et, par la relation

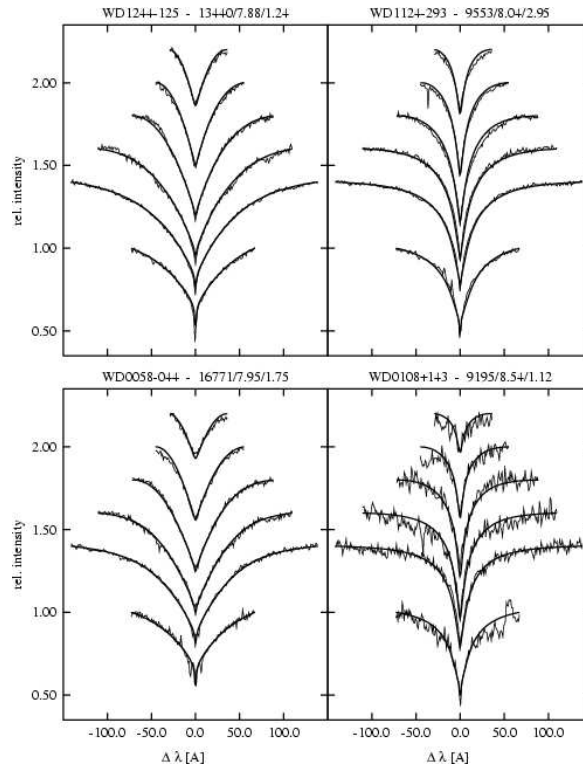


FIG. 3.9 – Raies d'absorption de la séquence de Balmer ( $H\alpha$ ,  $H\beta$ ,  $H\gamma$ ,  $H\delta$ ,  $H\epsilon$  et  $H8$  de bas en haut) observées à l'aide du spectrographe UVES du VLT pour 4 naines blanches. Les nombres en haut à droite de chaque figure donnent la température effective (en K), le logarithme de la gravité de surface (en  $\text{cm s}^{-2}$ ) et la valeur du  $\chi^2$  du meilleur fit [d'après Koester et al. (2001)].

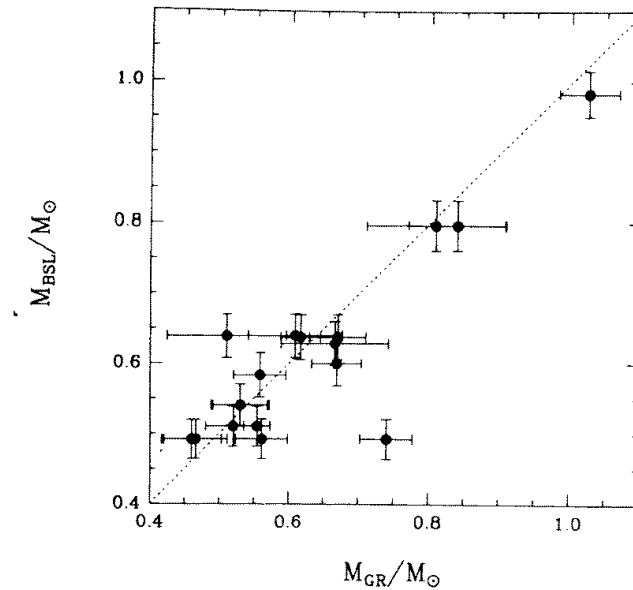


FIG. 3.10 – Comparaison entre les masses déterminées à partir du décalage vers le rouge gravitationnel ( $M_{\text{GR}}$ , en abscisse) et celles obtenues à partir de la largeur des raies de Balmer ( $M_{\text{BSL}}$ , en ordonnée) pour 17 naines blanches [d'après Bergeron, Saffer & Liebert (1992)].

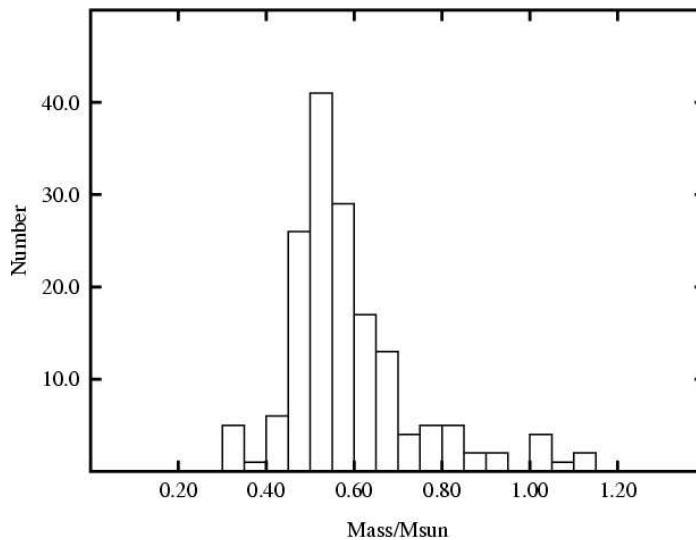


FIG. 3.11 – Distribution des masses de 163 naines blanches de type spectral DA observées avec le VLT. Les masses ont été déterminées à partir de la largeur des raies de Balmer confrontée à un modèle d’atmosphère (mesure de la gravité de surface ; méthode exposée sur les Figs. 3.8 et 3.9) [d’après Koester et al. (2001)].

température-luminosité (3.1), au rayon  $R$ . La température effective est déduite du spectre (cf. Fig. 3.8). Une relation masse-rayon théorique donne alors  $M$ .

### Astérosismologie

Une méthode radicalement différente de mesure de la masse est basée sur l’observation des modes de pulsation de l’étoile (astérosismologie). Pour l’instant cette méthode est essentiellement limitée aux naines blanches chaudes (parce que les plus lumineuses), de la classe PG 1159 (cf. § 3.2.1) (Vauclair et al. 1995). Les valeurs obtenues sont assez précises. Ainsi la masse de GD 358 (= V777 Herculis, une naine blanche de type DB) a été évaluée à  $0.61 \pm 0.03 M_{\odot}$  (Winget et al. 1994).

### 3.5.2 Distribution des masses

La Fig. 3.11 montre la distribution des masses de 163 naines blanches déterminées par la méthode spectroscopique qui consiste à comparer la largeur des raies de Balmer avec celle issue d’un modèle d’atmosphère (§ 8). Il s’agit de naines blanches de type spectral DA (cf. § 3.6). La valeur moyenne de l’échantillon présenté est

$$\langle M \rangle \simeq 0.59 M_{\odot} . \quad (3.38)$$

La naine blanche la plus massive observée à ce jour est RE J0317-853 :  $M = 1.35 M_{\odot}$  (Barstow et al. 1995).



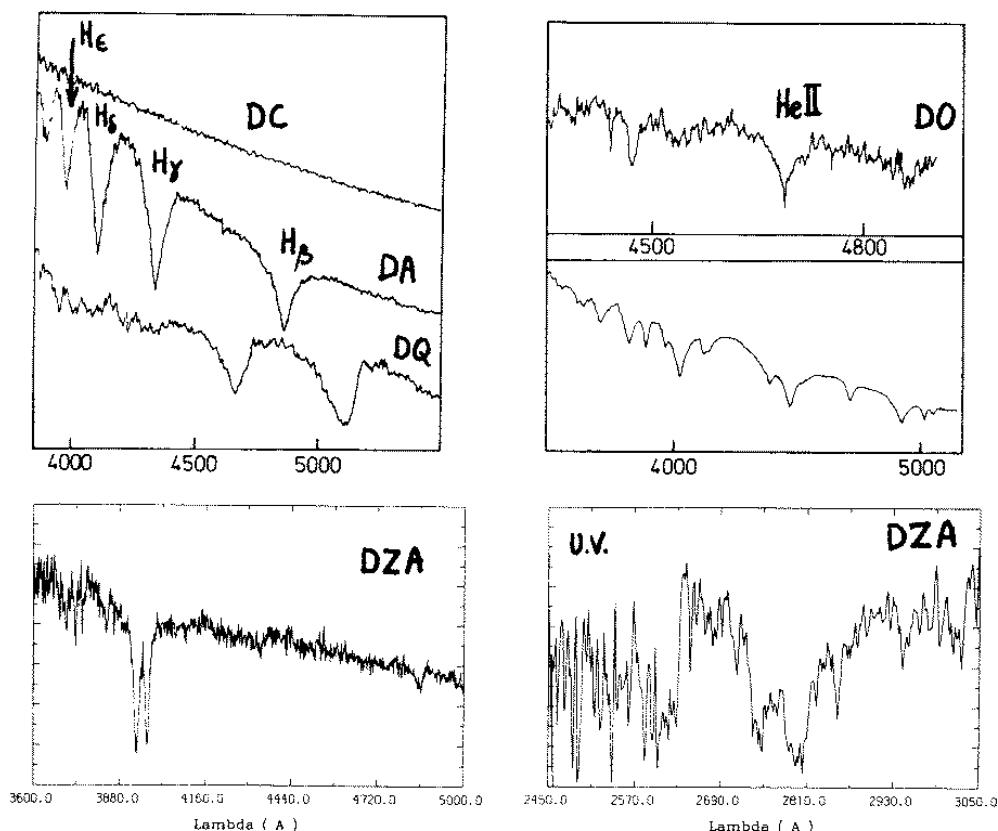


FIG. 3.12 – Spectres de divers types de naines blanches [d’après Koester & Chanmugam (1990)].

## 3.6 Classification spectroscopique

L’observation des naines blanches nous donne un accès direct à leur atmosphère, dont la composition est différente de celle de l’intérieur carbone/oxygène (cf. § 3.3.1). Il existe une très grande diversité d’atmosphères ainsi que le reflète la classification spectroscopique des naines blanches :

**DA** : uniquement des raies de l’hydrogène neutre (séquence de Balmer), pas de raies He I, ni de “métal” (i.e. d’élément plus lourd que l’hélium),  $6000 \text{ K} \leq T_{\text{eff}} \leq 70\,000 \text{ K}$  ;

**DB** : raies He I, pas d’hydrogène ni de métal présent,  $12\,000 \text{ K} \leq T_{\text{eff}} \leq 30\,000 \text{ K}$  ;

**DC** : spectre continu, pas de raies,  $T_{\text{eff}} \leq 12\,000 \text{ K}$  ;

**DO** : raies He II, faibles raies He I et H I,  $45\,000 \text{ K} \leq T_{\text{eff}} \leq 100\,000 \text{ K}$  ;

**DZ** : raies de “métaux” (Ca II, Mg, Fe, Si), pas d’hydrogène ;

**DQ** : raies du carbone, à la fois sous forme atomique et moléculaire ( $\text{C}_2$ ).

Aux deux lettres du nom d’une classe, on ajoute un ‘V’ pour indiquer une variabilité. On peut regrouper les six classes ci-dessus en deux catégories : les naines blanches dont l’atmosphère est composée essentiellement d’hydrogène (classe DA) et celles dont l’atmosphère est composée essentiellement d’hélium (classes DB, DO, DZ et DQ). Les naines blanches les plus observées appartiennent à la classe DA. La Fig. 3.12 montre quelques

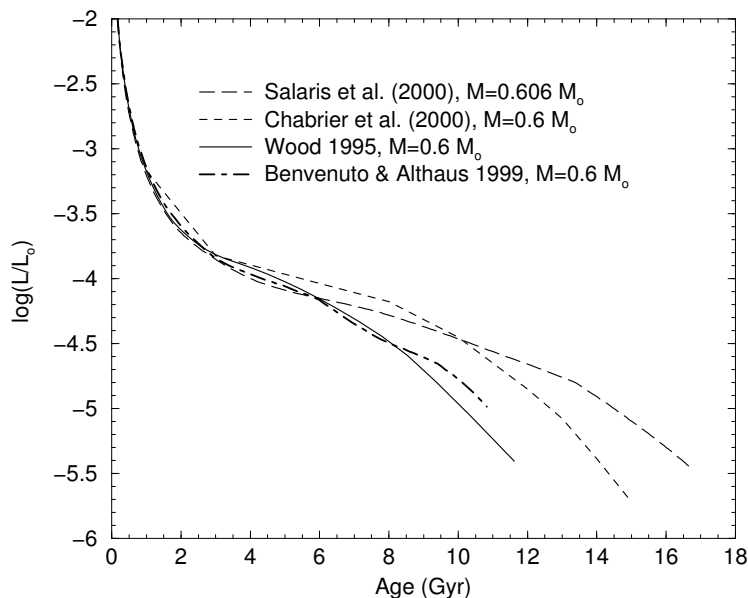


FIG. 3.13 – Courbe de refroidissement d’une naine blanche de masse  $0.6 M_{\odot}$  et de type spectral DA, suivant différents calculs récents. [d’après Prada Moroni & Straniero (2002)].

exemples de spectres dans chacune des classes.

### 3.7 Refroidissement des naines blanches

L’évolution d’une naine blanche n’est qu’un long refroidissement, au cours duquel la luminosité de l’étoile diminue progressivement (Fig. 3.13). Il faut environ un milliard d’années pour que la luminosité de la naine blanche passe en dessous de  $10^{-3} L_{\odot}$ .

L’étude du refroidissement des naines blanches nous renseigne sur l’histoire de la Galaxie. Ainsi on observe une brusque chute du nombre de naines blanches pour  $L < 10^{-4.3} L_{\odot}$  (cf. les données observationnelles sur la Fig. 3.14). En confrontant avec la courbe théorique de refroidissement (Fig. 3.13), on en déduit que l’âge des plus vieilles naines blanches est de l’ordre de  $\sim 10^{10}$  ans, ce qui fournit une contrainte sur l’âge de la Galaxie.

Un outil important pour ce type d’étude est la *fonction de luminosité* des naines blanches, c’est-à-dire le nombre de naines blanches par unité de volume et par unité de luminosité. On la calcule théoriquement à partir d’un taux supposé de formation d’étoiles et d’un modèle de refroidissement. En comparant avec la fonction de luminosité observée (cf. Fig. 3.14), on peut avoir quelques détails sur l’enfance de la Galaxie (Isern et al. 1995). Ainsi il apparaît que le début de la vie de la Galaxie était caractérisé par un taux de formation d’étoiles assez faible, au moins dans le voisinage solaire. Puis après 2 – 3 milliards d’années, la formation d’étoile s’est brutalement accrue pour atteindre un maximum 4 milliards d’années plus tard. Depuis lors, le taux de formation est resté plus ou moins constant.

Une autre application intéressante de l’étude du refroidissement des naines blanches est l’obtention d’une contrainte sur l’éventuelle variation dans le temps de la constante

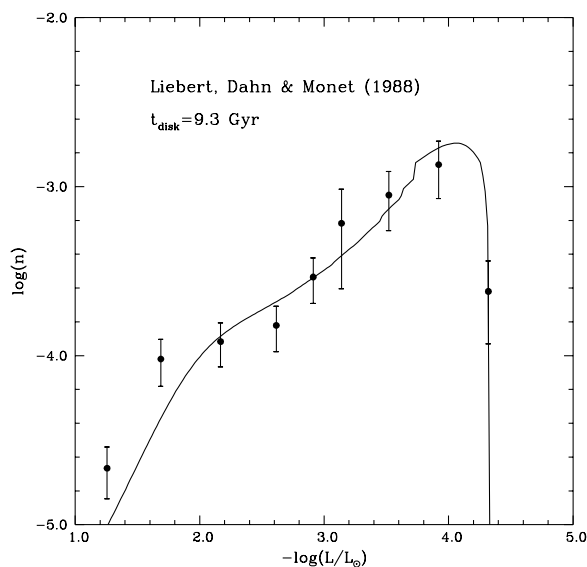


FIG. 3.14 – Fonction de luminosité  $n(L)$  des naines blanches.  $n$  est le nombre de naines blanches par unité de magnitude bolométrique et par  $\text{pc}^3$ .  $L$  est la luminosité des naines blanches en  $L_{\odot}$ . La courbe théorique a été calculée par Salaris et al. (1997) en supposant que le disque galactique est âgé de 9.3 Gyr. Les données observationnelles sont celles de Liebert et al. (1988) [d’après Salaris et al. (1997)].

gravitationnelle  $G$ . Cela est possible parce qu’en l’absence des réactions thermonucléaires, il n’y a pas d’autre source à l’énergie rayonnée que l’énergie thermique et l’énergie potentielle gravitationnelle (où intervient  $G$ ). Le résultat obtenu est  $\dot{G}/G < -(1 \pm 1) \times 10^{-11} \text{ an}^{-1}$  (García-Berro, Hernanz, Isern & Mochkovitch 1995), ce qui est comparable avec la meilleure limite obtenue auparavant et déduite du chronométrage du pulsar binaire PSR B1913+16.

## Bibliographie

Pour plus de détails sur la théorie et l’observation des naines blanches, on pourra consulter les articles de revues ou les ouvrages suivants :

- Hansen C.J., Kawaler S.D., Trimble V. 2004 : *Stellar interiors. Physical principles, structure and evolution*, 2ème édition, Springer-Verlag (New York).
- Koester D., Chanmugam G. 1990 : *Physics of white dwarf stars*, *Rep. Prog. Phys.* **53**, 837, ré-imprimé dans *Stellar astrophysics*, ed. R.J. Tayler, Institute of Physics Publishing (Bristol, 1992)
- Kawaler S.D. 1997 : *White dwarf stars*, in *Stellar remnants*, eds. G. Meynet & D. Schaerer, Springer-Verlag (Berlin)
- Koester D., Werner K. (eds.) 1995 : *White dwarfs, Lecture Notes in Physics* **443**, Springer-Verlag (Berlin)
- Isern J., Hernanz M., García-Berro E. (eds.) 1997 : *White dwarfs*, Kluwer (Dordrecht).
- Shapiro S.L., Teukolsky S.A. 1983 : *Black holes, white dwarfs and neutron stars, the physics of compact objects*, Wiley (New-York)

Weidmann V. 1990 : *Masses and evolutionary status of white dwarfs and their progenitors*, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **28**, 103

Autres références mentionnées dans le texte :

- Barstow M.A. et al. 1995 : *RE J0317-853 : the hottest known highly magnetic DA white dwarf*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **277**, 971
- Bergeron P., Saffer R.A., Liebert J. 1992 : *A spectroscopic determination of the mass distribution of DA white dwarfs*, *Astrophys. J* **394**, 228
- Chabrier G., Brassard P., Fontaine G., Saumon D. 2000 : *Cooling sequences and color-magnitude diagrams for cool white dwarfs with hydrogen-atmospheres*, *Astrophys. J* **543**, 216
- Chandrasekhar S. 1931 : *The maximum mass of ideal white dwarfs*, *Astrophys. J* **74**, 81
- Chandrasekhar S. 1934 : *Stellar configurations with degenerate cores*, *Observatory* **57**, 373
- Chandrasekhar S. 1967 : *An introduction to the study of stellar structure*, Dover (New York)
- Diu B., Guthmann C., Lederer D., Roulet B. 1989 : *Physique statistique*, Hermann (Paris)
- Eddington A.S. 1926 : *The internal constitution of the stars*, Cambridge University Press (Cambridge)
- Fowler R.H. 1926 : *Dense matter*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **87**, 114
- García-Berro E., Hernanz M., Isern J., Mochkovitch R. 1995 : *The rate of change of the gravitational constant and the cooling of white dwarfs*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **277**, 801
- Greenstein J.L., Oke J.B., Shipman H. 1985 : *On the redshift of Sirius B*, *Quart. J. Roy. Astron. Soc.* **26**, 279
- Hamada T., Salpeter E.E. 1961 : *Models for zero-temperature stars*, *Astrophys. J.* **134**, 683
- Hansen B.M.S. et al. 2002 : *The white dwarf cooling sequence of the globular cluster Messier 4*, *Astrophys. J.* **574**, L155
- Hernanz M., García-Berro E., Isern J., Mochkovitch R., Segretain L., Chabrier G. 1994 : *The influence of crystallization on the luminosity function of white dwarfs*, *Astrophys. J.* **434**, 652
- Isern J., García-Berro E., Hernanz M., Mochkovitch R., Burkert A. 1995 : *The stellar formation rate and the white dwarf luminosity function*, dans *White dwarfs, Lecture Notes in Physics* **443**, D. Koester, K. Werner (eds.), Springer-Verlag (Berlin)
- Kaplan S.A. 1949 : *Sverkhplotnye zvezdy (Étoiles superdenses)*, *Naukovy Zapiski (Notes Sci. Univ. Lwów)* **15**, 110
- Koester D. 1978 : *Virial theorem, energy content, and mass-radius-relation for white dwarfs*, *Astron. Astrophys.* **64**, 289
- Koester D. et al. 2001 : *High-resolution UVES/VLT spectra of white dwarfs observed for the ESO SN Ia progenitor survey (SPY). I*, *Astron. Astrophys.* **378**, 556
- Landau L.D. 1932 : *Sur la théorie des étoiles*, *Zs. Phys. Sowjetunion* **1**, 285
- Lang K.R., Gingerich O. (eds.) 1979 : *A source book in astronomy and astrophysics, 1900-1975*, Harvard University Press (Cambridge)
- Liebert J., Dahn C.C., Monet D.G. 1988 : *The luminosity function of white dwarfs*, *Astrophys. J.* **332**, 891
- McCook G.P., Sion E.M. 1999 : *A catalog of spectroscopically identified white dwarfs*, *Astrophys. J. Suppl.* **121**, 1
- Prada Moroni P.G., Straniero O. 2002 : *Calibration of White Dwarf cooling sequences : theoretical uncertainty*, *Astrophys. J.* **581**, 585
- Provencal J.L., Shipman H.L., Wesemael F., Bergeron P., Bond H.E., Liebert J., Sion E.M. 1997 : *WFPC2 photometry of the bright, mysterious white dwarf Procyon B*, *Astrophys. J.* **480**, 777
- Provencal J.L., Shipman H.L., Hog E., Thejll P. 1998 : *Testing the white dwarf mass-radius relation with HIPPARCOS*, *Astrophys. J.* **494**, 759
- Provencal J.L., Shipman H.L., Koester D., Wesemael F., Bergeron P. 2002 : *Procyon B : outside the iron box*, *Astrophys. J.* **568**, 324
- Salaris M., Domínguez I., García-Berro E., Hernanz M., Isern J., Mochkovitch R. 1997 : *The cooling of CO white dwarfs : influence of the internal chemical composition*, *Astrophys. J.* **486**, 413
- Schatzman E. 1956 : *Influence de l'équilibre nucléons-électrons sur la structure interne des naines blanches*, *Astronomiceskij Zhurnal* **33**, 800
- Segretain L., Chabrier G., Hernanz M., García-Berro E., Isern J., Mochkovitch R. 1994 : *Cooling theory of crystallized white dwarfs*, *Astrophys. J.* **434**, 641

- 
- Vauclair G., Pfeiffer B., Grauer A.D., Belmonte J.A., Jimenez A., Chevreton M., Dolez N., Vidal I. 1995 : *The multi-periodic pulsating PG 1159 white dwarf PG 0122+200*, *Astron. Astrophys.* **299**, 707
- Vauclair G., Schmidt H., Koester D., Allard N., 1997 : *White dwarfs observed by the HIPPARCOS satellite*, *Astron. Astrophys.* **325**, 1055
- Wignet D.E. et al. 1994 : *Whole Earth Telescope observations of the DBV white dwarf GD-358*, *Astrophys. J.* **430**, 839
- Wood M.A., in Koester & Werner (1995).



# Chapitre 4

## Supernovæ

version 2004-2005

### Sommaire

---

4.1	Un petit historique . . . . .	47
4.2	Données observationnelles . . . . .	51
4.3	Supernovæ thermonucléaires : SN Ia . . . . .	58
4.4	Supernovæ gravitationnelles : SN II, Ib et Ic . . . . .	63

---

## 4.1 Un petit historique

### 4.1.1 ...des observations

On trouve mention de l'apparition d'une "étoile nouvelle" dans le ciel dès le XIV<sup>eme</sup> siècle avant notre ère, gravée sur un os sacré de la première dynastie chinoise. Cependant il pourrait s'agir tout aussi bien d'une comète. Le premier événement historique attesté comme étant une supernova est daté de l'an 185 de notre ère et est relaté dans des annales astronomiques chinoises comme suit : *"La deuxième année de l'ère Chung-p'ing, sous le règne de l'empereur Hsiao-ling, le dixième mois, jour "kuei-hai", une étoile-hôte apparut dans Nam-mên. Elle était aussi grande que la moitié d'un tapis; elle brillait de cinq couleurs, et elle scintillait. Elle devint de plus en plus nette et disparut pendant le sixième mois de l'année suivante."*

Même si les données photométriques ne sont pas très précises ("aussi grande que la moitié d'un tapis"), cette description contient la date exacte de l'apparition (le 7 décembre 185 dans notre calendrier) ainsi que la région du ciel (constellation du Centaure, suivant notre nomenclature). Elle contient également la durée de visibilité (20 mois) et l'indication que la courbe de lumière est passée par un maximum avant de décroître. On observe aujourd'hui à la position de SN 185 une source radio et X, de structure filamentaire et semi-circulaire, RCW 86, que l'on interprète comme le reste de cette supernova (cf. Fig. 4.1).

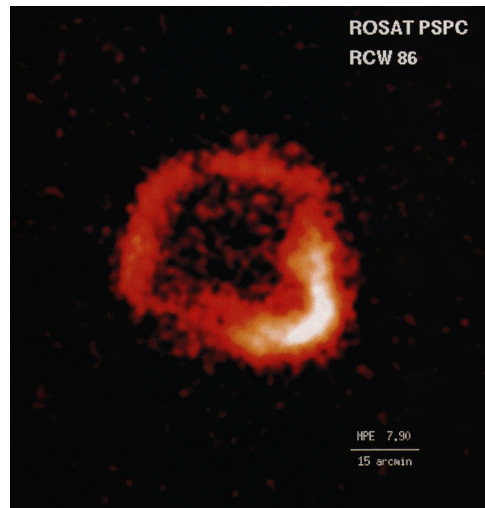


FIG. 4.1 – RCW 86 : reste de la supernova de l’an 185 vu en X par ROSAT.

La supernova historique la plus brillante est celle de l’an 1006, dans la constellation du Loup. Son apparition est relatée dans des textes chinois, japonais, coréens, arabes (les plus précis du point de vue astronomique) et européens. Son éclat était supérieur à celui d’un quartier de Lune, si bien que la supernova était visible en plein jour et donnait une ombre aux objets la nuit. Aujourd’hui on observe le reste de SN 1006 comme la source radio et X PKS 1459-41. A partir des observations X du satellite ASCA, il a été établi récemment que ce reste de supernova est un site d’accélération d’électrons à des énergies de l’ordre de  $10^{14}$  eV, ce qui résout en partie le mystère de l’origine des rayons cosmiques (Koyama et al. 1995).

Bien que plus faible (elle est tout de même restée visible en plein jour pendant 23 jours), la supernova de 1054 dans la constellation du Taureau est aujourd’hui très connue. Son reste est en effet l’objet numéro 1 du fameux catalogue Messier, M 1, et est connu sur le nom de *Nébuleuse du Crabe*. Sa gloire a éclaté en 1968 lorsqu’on y a découvert un pulsar, démontrant par là que certaines supernovæ peuvent produire des étoiles à neutrons (cf. Fig. 4.2).

Parmi les supernovæ historiques, il faut mentionner celles de 1572 (Fig. 4.3) et 1604 (la dernière en date dans notre Galaxie!), car elles ont été observées par des astronomes hors pairs : la première par Tycho-Brahé et la deuxième par Képler. Pour cette raison, on a pu reconstituer leurs courbes de lumière avec une assez bonne précision.

De l’an 185 à 1604, on dénombre huit supernovæ (les trois qui ne sont pas mentionnées ci-dessus sont SN 386, 393 et 1181). Pour plus de détails sur ces supernovæ historiques, on pourra consulter l’excellent ouvrage de T. Montmerle et N. Prantzos (1988).

Terminons ce petit historique des observations par quelques supernovæ remarquables. La première supernova extragalactique a été SN 1885 dans M 31. La “supernova du siècle” est sans conteste SN 1987A dans le Grand Nuage de Magellan (Fig. 4.4). Apparue le 23 février 1987, sa proximité a permis une étude sans précédent, dans tous les domaines du spectre électromagnétique et même en dehors, puisque on a reçu des neutrinos émis par la supernova. La supernova la plus lointaine jamais observée à ce jour est SN 1997ff,



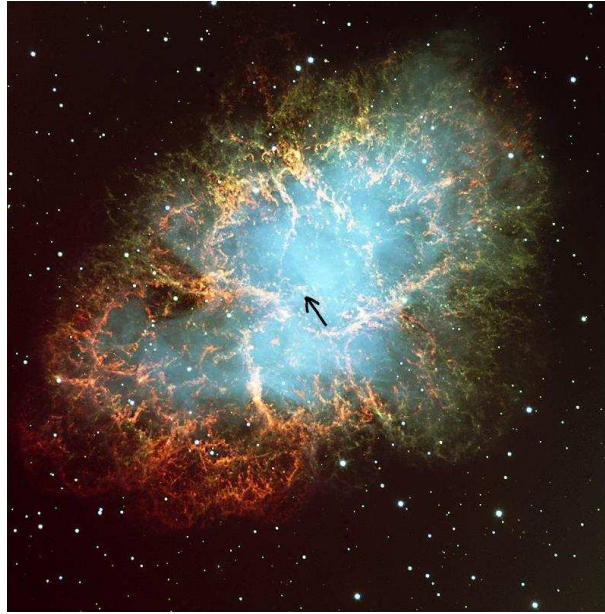


FIG. 4.2 – Nébuleuse du Crabe (Messier 1), reste de la supernova de l’an 1054. La flèche indique la position du pulsar [image VLT/ESO].

découverte par hasard dans le Hubble Deep Field-North à un redshift de  $z \simeq 1.7$  (Riess et al. 2001). Enfin la supernova SN 2003dh a fourni la première preuve directe de la connection entre les supernovæ et les sursauts gamma, puisqu’elle a été découverte dans le reste du sursaut gamma brillant GRB 030329 (29 mars 2003), 6 jours après l’apparition de ce dernier (Matheson 2004).

#### 4.1.2 ... et de la théorie

En 1934, l’Allemand W. Baade et le Suisse F. Zwicky furent les premiers à distinguer entre les novæ<sup>1</sup> “ordinaires” et les supernovæ . Ils réalisèrent que les “novæ” vues dans d’autres galaxies impliquent une échelle d’énergie toute autre que celle des novæ de notre Galaxie. Ils baptisèrent les premières *supernovæ* et expliquèrent leur énergie colossale par la libération d’énergie potentielle gravitationnelle lors d’un effondrement gravitationnel vers un objet compact, l’étoile à neutrons. Ils formulèrent ainsi l’hypothèse suivante : “*With all reserve we advance the view that supernovæ represent the transitions from ordinary stars into neutron stars, which in their final stages consist of extremely closely packed neutrons*” (Baade & Zwicky 1934). Ce scénario s’est avéré exact pour expliquer les supernovæ de type II (ainsi que Ib et Ic).

En 1940, l’astronome américain R. Minkowski classa les supernovæ en deux catégories : les *supernovæ de type I* dont le spectre ne présente pas de trace d’hydrogène et les *supernovæ de type II* où l’on observe de l’hydrogène.

En 1960, F. Hoyle & W.A. Fowler expliquèrent les supernovæ de type I par un mécanisme radicalement différent de l’effondrement gravitationnel suggéré par Baade &

<sup>1</sup>Nous étudierons les novæ au Chap. 7

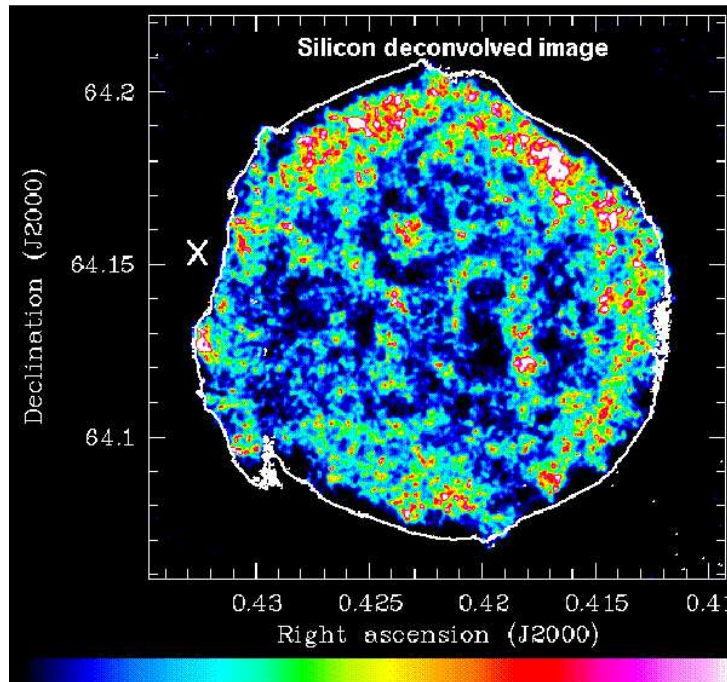


FIG. 4.3 – Reste de la supernova de 1572, dite supernova de Tycho, observé en X par le satellite XMM-Newton. La ligne blanche marque le contour de l'émission radio mesurée au VLA [d'après Decourchelle et al. (2001)]

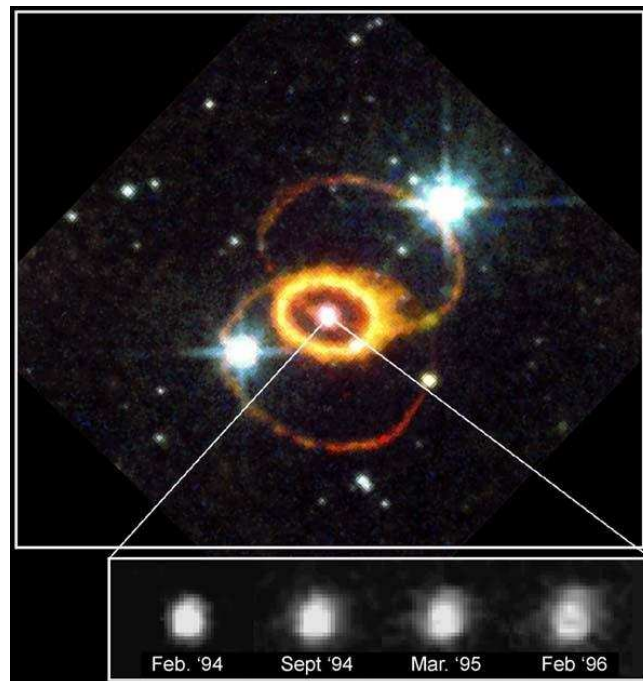


FIG. 4.4 – Supernova SN 1987A vue par le HST. Les anneaux sont formés de matière éjectée plusieurs milliers d'années avant l'explosion en supernova. La figure du bas montre l'expansion des couches externes de l'étoile provoquée par l'onde de choc sortante.

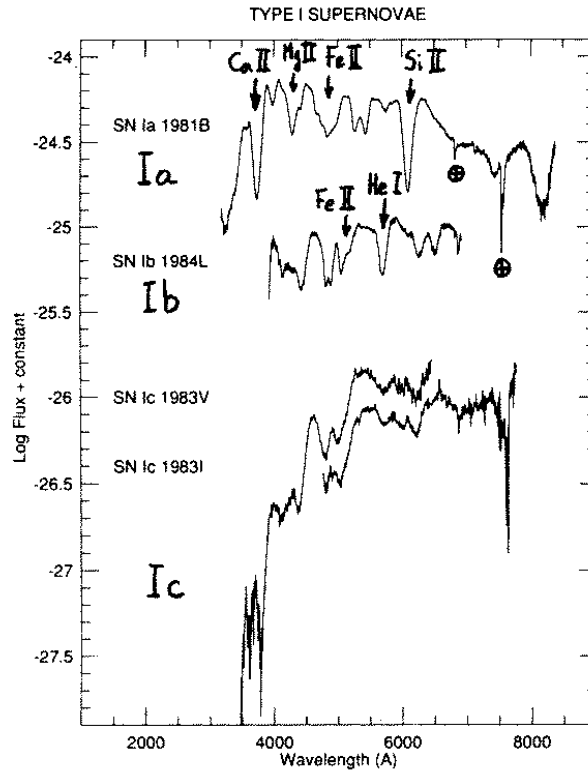


FIG. 4.5 – Spectres des trois classes de SN I dans la phase photosphérique. Les raies étroites marquées  $\oplus$  sont des raies d'absorption de l'atmosphère terrestre [d'après Harkness & Wheeler (1990)].

Zwicky, à savoir l'explosion thermonucléaire d'un naine blanche dans un système binaire. Ce mécanisme est, dans ces grandes lignes, encore évoqué aujourd'hui pour 80% des supernovæ de type I qui constituent la sous-classe Ia.

## 4.2 Données observationnelles

### 4.2.1 Spectres

La classification observationnelle des supernovæ est essentiellement basée sur leurs spectres. On peut diviser les spectres en deux catégories :

1. les spectres pris peu après la découverte de la supernova : le milieu est alors opaque au rayonnement : les raies apparaissent en absorption (*phase photosphérique*);
2. les spectres pris quelques semaines à quelques mois après le maximum de lumière : le milieu est alors transparent au rayonnement : les raies apparaissent en émission (*phase nébulaire*).

Les deux grandes classes spectrales sont les types I (pas d'hydrogène) et II (hydrogène présent). Le type I est divisé en trois sous-catégories :

**Ia** : dans la phase photosphérique, le spectre comprend des raies du Si II, Fe II, Mg

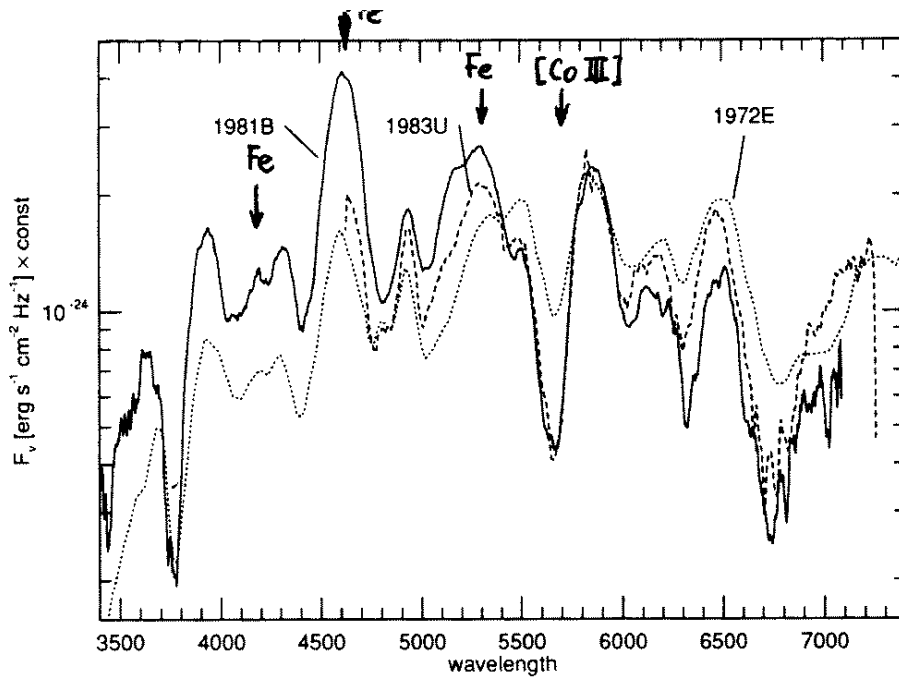


FIG. 4.6 – Spectres de trois SN Ia dans la phase nébulaire (260 jours après le maximum) [d'après Woosley (1990)].

II et Ca II. La phase nébulaire est dominé par les raies du fer, Fe II et Fe III. Cette classe regroupe 80% des SN I.

**Ib :** dans la phase photosphérique, les SN Ib se distinguent des SN Ia par l'absence de raie Si II et la présence d'une importante raie He I. Dans la phase nébulaire on retrouve les mêmes éléments que dans une SN II (à l'exception de l'hydrogène), à savoir N, C, O, Na et Mg.

**Ic :** les SN Ic regroupent les SN I qui se distinguent des SN Ia (pas de raie Si II) et des SN Ib (raie He I faible). Une sous-classe des SN Ic se distingue par des raies très larges (cf. Fig. 4.7) et une luminosité élevée : il s'agit des *hypernovæ*.

Ces trois types sont illustrés sur la Fig. 4.5. La Fig. 4.6 représente les spectres de trois SN Ia dans la phase nébulaire. Ils sont dominés par les raies du fer et par une raie interdite du cobalt ([Co III]). On peut remarquer la grande similitude des trois spectres qui laisse à penser que la classe Ia est assez homogène.

La Fig. 4.8 représente le spectre d'une SN II (SN 1987A dans le Grand Nuage de Magellan) à diverses époques. Le spectre est dominée par les raies de l'hydrogène de la série de Balmer et notamment la raie H $\alpha$ . Ces raies présentent un profil P-Cygni (raie en absorption décalée vers le bleu et raie en émission non décalée) qui est la signature d'un milieu en expansion sphérique. Il convient également de noter l'apparition des raies du fer trois semaines après l'explosion.

L'émission d'une SN II de 7 mois à 3 ans après l'explosion (phase nébulaire) est illustrée sur la Fig. 4.9. On observe nombre de raies en émission : hydrogène, oxygène, calcium, magnésium, fer, ...

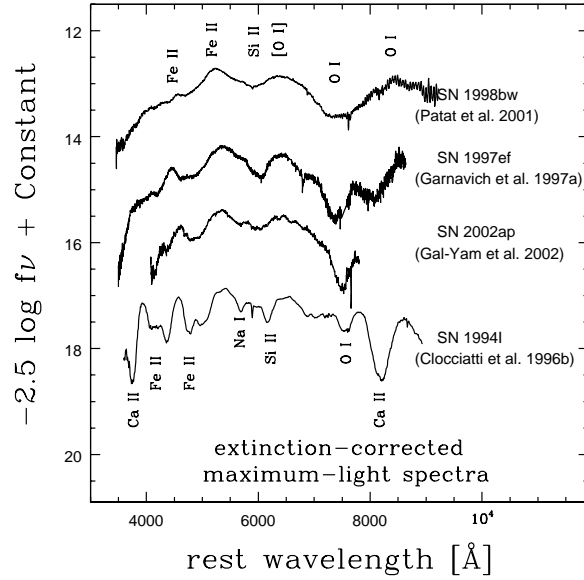


FIG. 4.7 – Spectres de SN Ic au maximum d'éclat : les trois hypernovæ SN 1998bw, SN 1997ef et SN 2002ap sont comparées à la SN Ic classique SN 1994I dans M 51 [d'après Hamuy (2004)].

## 4.2.2 Courbes de lumières

Les divers types de supernovæ se distinguent également par leur *courbe de lumière*, c'est-à-dire la variation de leur luminosité en fonction du temps. La Fig. 4.10 représente les courbes de lumière moyennes de chaque type sur un même graphe. Il convient de remarquer que les SN Ia sont, à leur maximum, les supernovæ les plus brillantes.

Les courbes de lumières introduisent une subdivision du type II :

**II-P** : ('P' pour 'plateau') après le maximum, la luminosité reste à peu près constante pendant  $\sim 1$  mois, avant de décroître à nouveau (cf. Fig. 4.10) ; les SN II-P représentent environ 70% des SN II ;

**II-L** : ('L' pour 'linéaire') après le maximum, la luminosité décroît régulièrement (exponentiellement avec le temps).

Il convient de souligner que la forme de la courbe de lumière dépend du domaine de longueur d'onde où elle est prise, comme on peut le voir sur la Fig. 4.11.

Une caractéristique des SN Ia est la grande homogénéité de leurs courbes de lumières (on avait déjà remarqué l'homogénéité de leurs spectres au § 4.2.1), comme on peut le voir sur la Fig. 4.12. La luminosité maximale est notamment à peu près la même d'une SN Ia à l'autre. Pour cette raison, les SN Ia sont utilisées comme indicateurs de distance en cosmologie (cf. § 4.3.5).

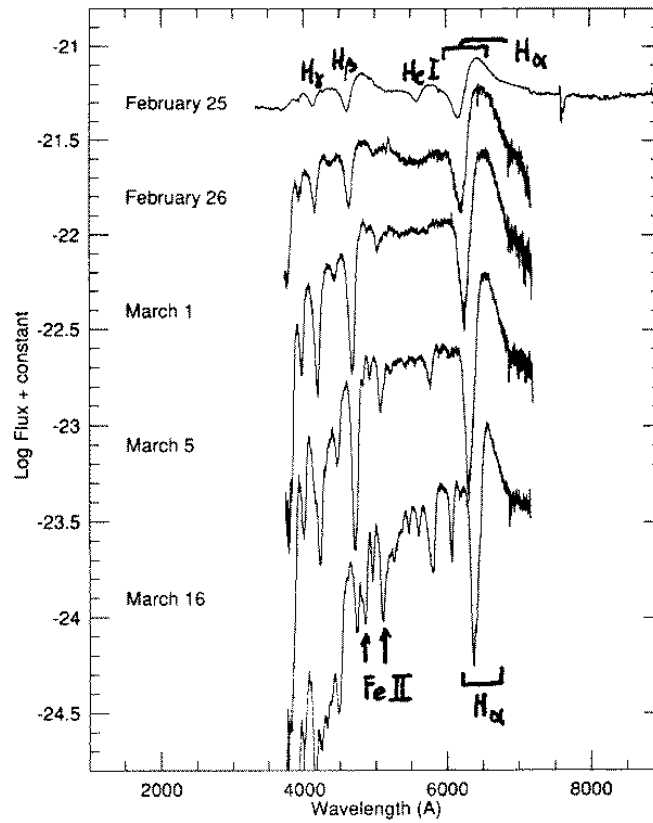


FIG. 4.8 – Spectre d'une supernova de type II (SN 1987A) à divers instants, de 2 jours (courbe du haut) à 3 semaines après l'explosion (courbe du bas) [d'après Harkness & Wheeler (1990)].

Supernovae	E-S0	S0/a-Sa	Sab-Sb	Sbc-Sd	Sdm-Im
all types	0.25	0.17	0.53	1.29	1.40
Type Ia	<u>0.25</u>	<u>0.12</u>	0.12	0.12	0.12
Type Ib	<u>0</u>	0.01	0.07	0.19	0.23
Type II	<u>0</u>	0.04	<u>0.34</u>	<u>0.98</u>	<u>1.05</u>

TAB. 4.1 – Fréquence d'apparition des supernovæ (en SNU) dans les divers types de galaxies : elliptiques (E), lenticulaires (S0), spirales (Sa,b,c,d) et irrégulières (Im) [d'après Tammann (1994)].

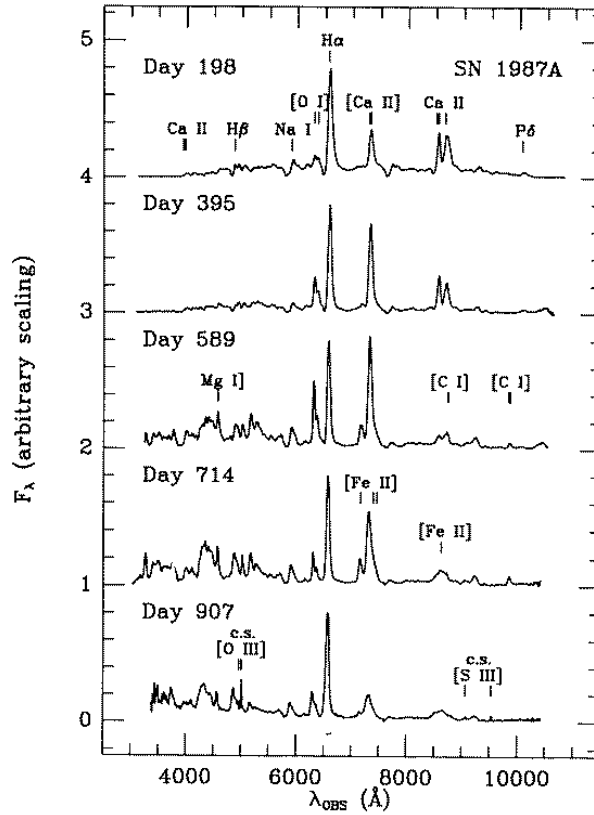


FIG. 4.9 – Spectre d'une supernova de type II (SN 1987A) dans la phase nébulaire. Les raies marquées 'c.s.' sont dues au milieu qui entourait le progéniteur de la supernova [d'après Phillips & Williams (1991)].

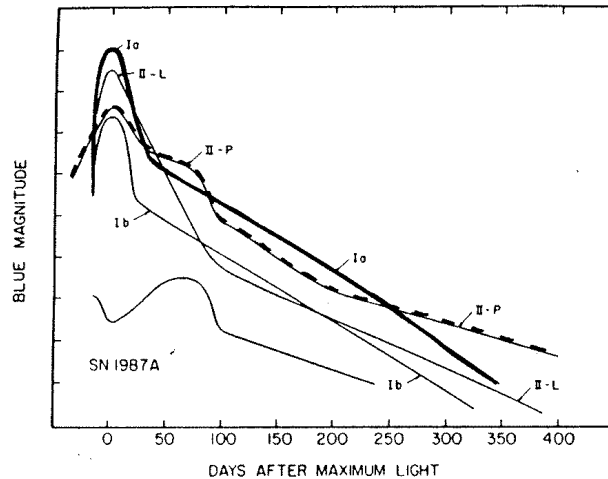


FIG. 4.10 – Courbes de lumières (dans le bleu) des supernovæ de type Ia, Ib, II-L et II-P, ainsi que de SN 1987A, cette dernière étant une SN II atypique [d'après Wheeler (1990)].

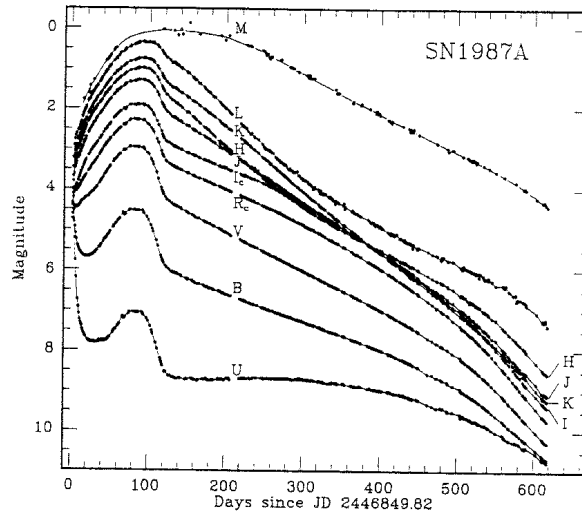


FIG. 4.11 – Courbe de lumière de SN 1987A (type II) dans différentes bandes spectrales entre M (infrarouge) et U (ultra-violet) [d'après Kirshner (1990)].

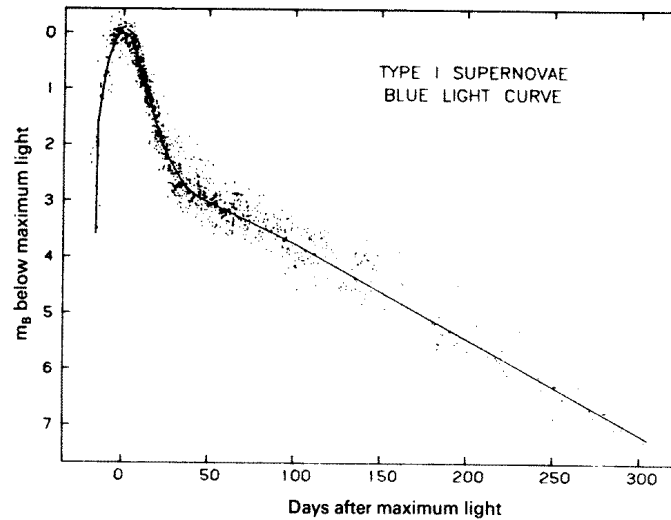


FIG. 4.12 – Courbe de lumière composite obtenue en superposant 38 SN Ia [d'après Dogget & Branch (1985)].



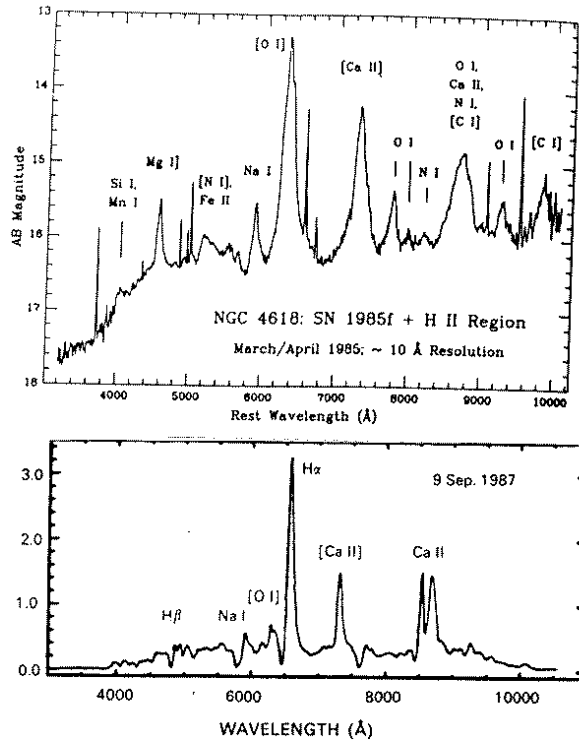


FIG. 4.13 – Comparaison du spectre d’une SN Ib (SN 1985F, en haut) avec celui d’une SN II (SN 1987A, en bas), tous deux dans la phase nébulaire [d’après Branch (1990)].

### 4.2.3 Fréquence d’apparition et galaxies hôtes

Outre leurs spectres et leurs courbes de lumière, une donnée observationnelle importante sur les supernovæ concerne leur statistique d’apparition en fonction du type de la galaxie hôte. On mesure la fréquence d’apparition des supernovæ dans une galaxie donnée en SNU, 1 SNU étant défini comme 1 supernova par  $10^{10} L_{B\odot}$  et par siècle.

Le tableau 4.1 donne les fréquences d’apparition des SN Ia, Ib et II dans divers types de galaxies. On constate que l’on n’observe aucune SN Ib ou SN II dans les galaxies elliptiques, alors qu’elles sont majoritaires dans les galaxies spirales Sa, Sb, Sc et Sd. De plus le taux de SN Ib est à peu près proportionnel au taux de SN II (un facteur 1/4) et ne semble pas du tout corrélé au taux de SN Ia. Ceci reflète la différence des mécanismes physiques entre les SN I d’une part et les SN II et SN Ib d’autre part.

### 4.2.4 Caractéristiques observationnelles et mécanismes physiques

A vu des fréquences d’apparition discutées ci-dessus, il convient de rapprocher les SN Ib des SN II et non des SN Ia, contrairement à ce que leur dénomination — reflet de l’histoire de l’astronomie — laisserait croire. Un autre argument vient de la spectroscopie. Comme on l’a dit au § 4.2.1, les SN Ib présentent dans la phase nébulaire un spectre similaire à celui des SN II, excepté pour les raies de l’hydrogène. Cette affirmation est étayée sur la Fig. 4.13 : mis à part la raie  $H\alpha$  qui domine le spectre de la SN II et est

absente (par définition) dans la SN Ib, de nombreuses autres raies se retrouvent dans les deux spectres.

On admet aujourd’hui que le mécanisme physique à l’origine des SN Ib et SN II, ainsi que des SN Ic, est le même, à savoir l’effondrement gravitationnel du cœur d’une étoile massive en un objet compact, étoile à neutrons ou trou noir, suivant l’idée originale de Baade & Zwicky (1934). Le fait que le progéniteur soit une étoile massive explique pourquoi ces supernovæ sont absentes des galaxies elliptiques (cf. tableau 4.1), qui contiennent essentiellement des étoiles âgées, donc de faible masse. Dans ce cadre-là, la diversité entre SN II-P, SN II-L, SN Ib et SN Ic est expliquée par la diversité des progéniteurs : dans le cas des SN Ib et SN Ic, il s’agit d’un progéniteur qui a perdu son enveloppe d’hydrogène (par exemple une étoile Wolf-Rayet) alors que la différence entre SN II-P et SN II-L reflète la différence de taille des enveloppes d’hydrogène.

Par contre, les SN Ia reposent sur un mécanisme radicalement différent, à savoir l’explosion thermonucléaire d’une naine blanche qui s’approche de la masse de Chandrasekhar par accréation de matière dans un système binaire. Le fait que tous les progéniteurs de SN Ia aient la même masse (masse de Chandrasekhar) explique alors l’homogénéité observée dans ce groupe (cf. Figs. 4.6 et 4.12).

Nous allons à présent examiner chacun de ces mécanismes en détails.

## 4.3 Supernovæ thermonucléaires : SN Ia

### 4.3.1 Grandes lignes du scénario “standard”

L’idée la plus communément admise pour expliquer les SN Ia fait appel à un système binaire serré où une naine blanche accréte de la matière en provenance de son compagnon. De tels systèmes sont observés sous la forme de *variables cataclysmiques*. Nous étudierons ces systèmes binaires et le mécanisme d’accréation plus loin dans la suite de ce cours. L’accréation augmente progressivement la masse de la naine blanche, qui, rappelons-le, est formée de carbone et d’oxygène (cf. § 3.3.1). Si la masse de Chandrasekhar était atteinte, l’étoile deviendrait instable et s’effondrerait. Nous avons vu au § 3.4.3 qu’en vertu des effets relativistes, la masse de Chandrasekhar est atteinte pour une valeur de la densité centrale  $\rho_c = 2.7 \times 10^{13} \text{ kg m}^{-3}$ . Or le seuil pour la fusion thermonucléaire du carbone est de quelques  $10^{12} \text{ kg m}^{-3}$ . La fusion du carbone se déclenche donc avant que l’instabilité relativiste ne se produise. Néanmoins, la valeur de  $10^{12} \text{ kg m}^{-3}$  correspond à une masse très voisine de la masse de Chandrasekhar. Comme on l’a discuté au § 3.2.1, la fusion thermonucléaire est instable dans un milieu dégénéré, l’augmentation de température ne se traduisant pas par une augmentation de pression. On a alors une véritable explosion thermonucléaire qui détruit entièrement la naine blanche [cf. Reinecke et al. (2002) pour des simulations numériques de cette explosion]. Ce scénario a le mérite d’expliquer :

- pourquoi on n’observe pas d’hydrogène dans les SN Ia : les naines blanches en sont quasiment dépourvues : l’hydrogène constitue certes l’atmosphère des naines blanches DA (cf. § 3.6) mais ne représente au plus que  $10^{-4}$  fois la masse de l’étoile ;
- pourquoi on observe des SN Ia dans les galaxies elliptiques (cf. tableau 4.1), car il n’y a pas besoin d’étoile massive ;

- les raies du fer qui dominant le spectre des SN Ia dans la phase nébulaire (cf. § 4.2.1) : la fusion amorcée sur le carbone se produit jusqu'à la synthèse du  $^{56}\text{Ni}$  dans les  $0.7 M_{\odot}$  les plus centrales ; le  $^{56}\text{Ni}$  décroît (période = 6 jours) en  $^{56}\text{Co}$ , ce dernier décroissant (période = 77 jours) en  $^{56}\text{Fe}$  ;
- la courbe de lumière observée : les périodes radioactives ci-dessus rendent compte de la décroissance exponentielle en deux temps (cf. Figs. 4.10 et 4.12).

Cependant, il ne s'agit ici que de grandes lignes et de nombreuses difficultés subsistent quant au détail du scénario. Pour plus de détails on pourra consulter l'article de revue de Nomoto et al. (2000).

### 4.3.2 Energétique de l'explosion

L'énergie totale libérée par la combustion thermonucléaire de la naine blanche est de l'ordre de

$$\boxed{E_{\text{SN Ia}} \sim 10^{44} \text{ J}} , \quad (4.1)$$

ce qui représente la fraction suivante de l'énergie de masse de la naine blanche

$$\frac{E_{\text{SN Ia}}}{Mc^2} \sim 5 \times 10^{-4} . \quad (4.2)$$

Ce "rendement" est typique des réactions thermonucléaires (cf. la discussion du § 1.2.1).

L'énergie de liaison de la naine blanche peut être estimée à partir de la formule (2.72) établie au § 2.4.3 et qui donne l'énergie de liaison d'un polytrope : elle est comprise entre  $E_{\text{liais}} = 0$  ( $\gamma = 4/3$ , gaz de Fermi ultra-relativiste) et  $E_{\text{liais}} = -3/7 GM^2/R$  ( $\gamma = 5/3$ , gaz de Fermi non relativiste). En portant  $M = 1 M_{\odot}$  et  $R = 5000 \text{ km}$  dans cette dernière formule, on obtient le maximum de l'énergie de liaison (en valeur absolue) :

$$|E_{\text{liais}}| \simeq 2 \times 10^{43} \text{ J} . \quad (4.3)$$

Ainsi  $E_{\text{SN Ia}} > |E_{\text{liais}}|$ , ce qui explique pourquoi la naine blanche peut être complètement détruite par l'explosion thermonucléaire.

L'énergie (4.1) est d'abord essentiellement dégagée sous forme de chaleur et, dans une moindre mesure, dans l'énergie cinétique d'expansion. Au cours de l'expansion, l'énergie thermique est ensuite peu à peu convertie en énergie cinétique. Les réactions thermonucléaires forment environ  $0.7 M_{\odot}$  de  $^{56}\text{Ni}$ . Ce dernier est un élément radioactif et décroît avec une période de 6.1 j en  $^{56}\text{Co}$ . C'est cette énergie radioactive qui est la source de l'énergie lumineuse d'une SN Ia. La montée initiale de la courbe de lumière pendant une dizaine de jours (cf. Figs. 4.10 et 4.12) est due à l'augmentation de la transparence de la matière éjectée, au fur et à mesure que sa densité diminue du fait de l'expansion. Lorsque le milieu est devenu complètement transparent on assiste alors à la décroissance exponentielle de la luminosité, caractéristique d'un processus radioactif.

Le  $^{56}\text{Co}$  formé est lui-même radioactif et décroît en  $^{56}\text{Fe}$  avec une période de 77 j. C'est ce qui explique le changement de la vitesse de décroissance de la courbe de lumière au bout d'environ un mois.

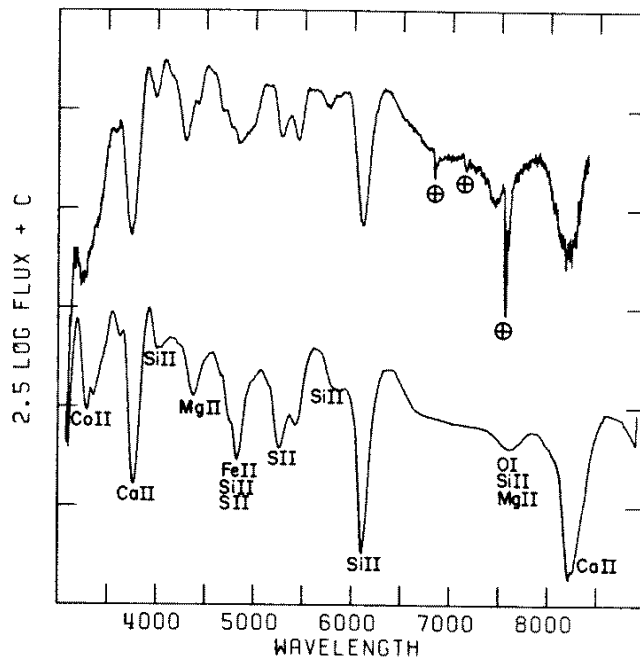


FIG. 4.14 – Spectre de la supernova de type Ia SN 1981B (en haut) comparé au résultat d'une simulation numérique de Nomoto, Thielemann & Yokoi (1984) basée sur une déflagration du carbone (en bas). Les raies étroites marquées  $\oplus$  dans le spectre de SN 1981B sont des raies d'absorption de l'atmosphère terrestre [d'après Branch (1990)].

### 4.3.3 Les incertitudes sur la combustion

La réaction initiale de fusion du carbone, une fois déclenchée au centre de la naine blanche, peut se propager de deux façons [pour plus de détails, cf. Sect. 5 de Müller (1994)] :

- soit par **détonation** : le front de combustion se propage de manière supersonique dans le milieu, créant une onde de choc ;
- soit par **déflagration** : le front de combustion se propage de manière subsonique.

Les différents modèles théoriques élaborés à ce jour ne permettent pas de décider définitivement lequel de ces deux processus est à l'œuvre dans les SN Ia.

La Fig. 4.14 compare le spectre au moment du maximum d'une SN Ia calculé dans une simulation numérique basée sur un modèle de déflagration avec le spectre observé de SN 1981B. Pour des simulations numériques récentes de SN Ia, on pourra consulter Reinecke et al. (2002).

### 4.3.4 Scénarios alternatifs

Des modèles alternatifs à l'explosion d'une naine blanche qui a atteint la masse de Chandrasekhar ont été proposés. Ainsi Iben & Tutukov (1984) évoquent la coalescence de deux naines blanches de faible masse. Les deux naines blanches formaient initialement un système binaire serré mais les orbites se sont retrécies en raison de la perte d'énergie

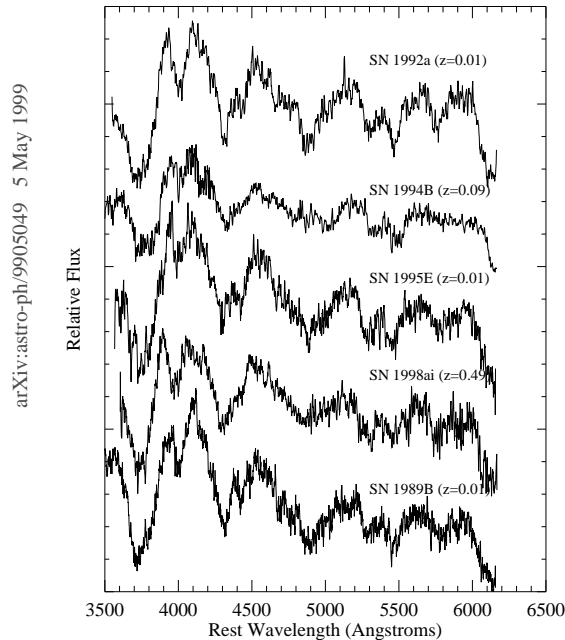


FIG. 4.15 – Comparaison des spectres de SN Ia à différents redshifts : le spectre de SN 1998ai, à distance cosmologique ( $z = 0.49$ ), est comparé avec celui de SN Ia proches ( $z = 0.01$ ). Tous ces spectres correspondent au cinquième jour après le maximum de luminosité. Le spectre de SN 1998ai a été obtenu avec le télescope Keck. La qualité des spectres des supernovæ proches a été volontairement dégradée pour faciliter la comparaison. Le spectre de SN 1994B ( $z = 0.09$ ) est celui qui diffère le plus des autres et donne une idée de la dispersion des spectres de SN Ia [d’après Filippenko & Riess (2000)].

liée à l’émission d’ondes gravitationnelles.

Un autre modèle, introduit pour expliquer les SN Ia sous-lumineuses, fait appel à une naine blanche de  $0.6$  à  $0.9 M_{\odot}$  qui accrète de l’hélium depuis un compagnon non dégénéré fusionnant l’hélium en son cœur (*étoiles symbiotiques*). A un certain point, la couche d’hélium accrétée fusionne de manière explosive (détonation) et l’onde de détonation déclenche la fusion du carbone dans le cœur de la naine blanche (cf. Woosley & Weaver 1994a et Kenyon, Livio, Mikolajewska & Tout 1993).

Pour une revue récente des simulations numériques invoquant les trois scénarios de SN Ia (naine blanche à la masse de Chandrasekhar, coalescence de naines blanches et naine blanche peu massive accrétant de l’hélium), on pourra consulter Höflich et al. (1997).

### 4.3.5 Application à la cosmologie

Comme souligné précédemment, les SN Ia forment une classe assez homogène, et ce en raison du mécanisme physique sous-jacent : l’explosion thermonucléaire de la naine blanche se produit toujours pour la même masse, voisine de la masse de Chandrasekhar. Cette homogénéité est valable même pour les supernovæ à grande distance, comme illustré sur la Fig. 4.15, ce qui suggère fortement d’utiliser les SN Ia comme indicateurs de distance en cosmologie.

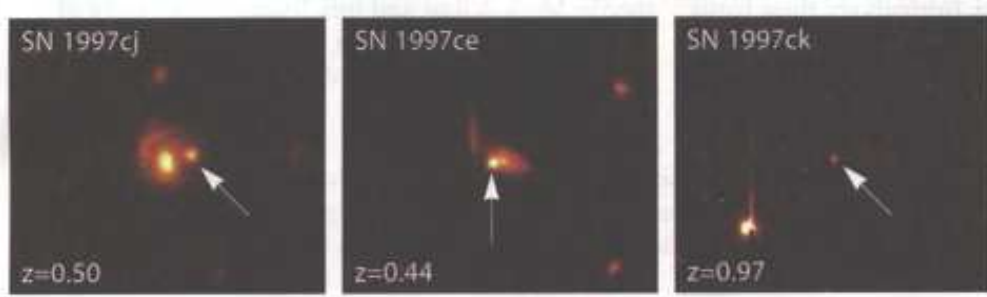


FIG. 4.16 – Détection de SN Ia à des grands redshifts (images HST).

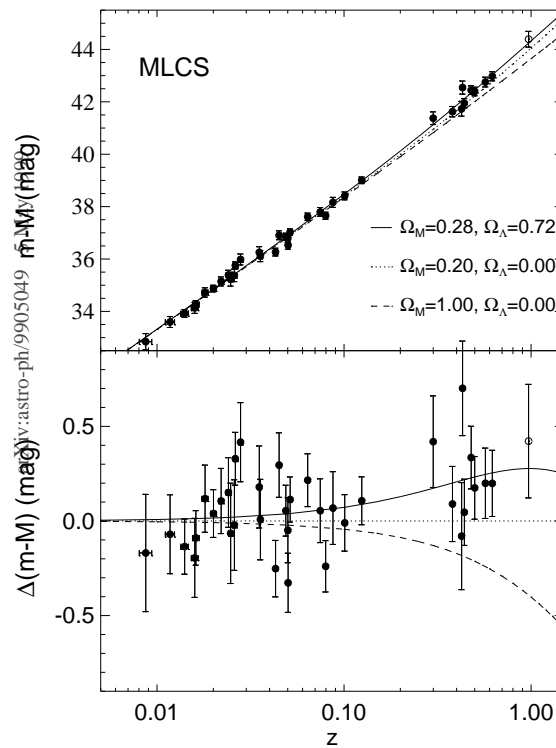


FIG. 4.17 – Haut : diagramme de Hubble pour les SN Ia à moyen et grand redshift. Bas : Différence avec la prédiction d'un modèle avec  $\Omega_{\text{matiere}} = 0.20$  et constante cosmologique  $\Lambda$  nulle : les SN Ia a grand redshift ont un excès de magnitude d'environ 0.3 (i.e. sont sous-lumineuses) par rapport au modèle [d'après Filippenko & Riess (2000)].

Les techniques récentes d'observations, notamment le HST, permettent en effet d'observer des supernovæ à des distances proprement cosmologique, jusqu'à un redshift  $z = 1.1$  pour SN 1998ae (Schmidt et al. 1998) (cf. Fig. 4.16). Une observation accidentelle (Hubble Deep Field-North) a même permis d'aller au delà et d'atteindre  $z = 1.7$  pour SN 1997ff (Riess et al. 2001).

L'étude des SN Ia dans le but de déterminer les paramètres cosmologiques  $H_0$ ,  $\Omega$ ,  $\Lambda$ , etc... a été entreprise à partir du milieu des années 1990 deux groupes, le *Supernova Cosmology Project* (Perlmutter et al. 1999) et le *High-Z Supernova Search Team* (Riess et al. 1998), notamment grâce au télescope spatial Hubble et au télescope Keck. Les résultats de ces deux équipes ont été annoncés en 1998 (Riess et al. 1998, Perlmutter et al. 1999) et montrent (cf. Fig. 4.17) que les SN Ia à grande distance ont un éclat apparent plus faible que ce que l'on attendrait dans un Univers sans constante cosmologique ( $\Lambda = 0$ ).

Soulignons que ces résultats sont préliminaires et demandent à être confirmés par des études ultérieures. Une explication alternative à  $\Lambda \neq 0$  pourrait en effet être l'obscurcissement provoqué par de la poussière (ce qui expliquerait pourquoi les SN Ia distantes sont sous-lumineuses), ou encore l'évolution stellaire dans l'Univers primordial qui conduirait à des naines blanches C-O différentes des naines blanches contemporaines (Riess et al. 1999). Nous renvoyons à l'article de revue de Leibundgut (2001) pour plus de détails.

## 4.4 Supernovæ gravitationnelles : SN II, Ib et Ic

### 4.4.1 La pré-supernova

Les progéniteurs des SN II, Ib et Ic sont des étoiles massives, de masse supérieure à  $\sim 10 M_\odot$ . Les réactions de fusion ne s'arrêtent pas au carbone/oxygène comme pour les progéniteurs des naines blanches (cf. § 3.2.1), mais se poursuivent jusqu'à la synthèse du fer. L'étoile, qui apparaît extérieurement comme un supergéante rouge (dans le cas SN II, c'est-à-dire où l'enveloppe d'hydrogène est encore présente), a alors une structure en "pelure d'oignon" avec des couches de compositions différentes depuis le fer dans le cœur jusqu'à l'hydrogène dans l'enveloppe (cf. Fig. 4.18). Les réactions de fusion se sont arrêtées au fer : ce dernier étant l'élément le plus stable de la nature, c'est-à-dire dont l'énergie de liaison par nucléon est la plus élevée, il ne peut fusionner de manière exothermique. La densité dans le cœur de fer est telle que les électrons y sont dégénérés. Tout comme dans une naine blanche, ce sont eux qui fournissent l'essentiel de la pression. A la périphérie du cœur de fer a lieu la fusion du silicium (cf. Fig. 4.18) qui produit du fer. Lorsque la masse du cœur de fer atteint la masse de Chandrasekhar, la pression des électrons n'est plus suffisante pour contre-balancer la gravitation et le cœur commence à s'effondrer.

La masse de Chandrasekhar associée au cœur de fer est légèrement inférieure à  $1.4 M_\odot$  car la fraction électronique  $Y_e$  y est inférieure à 0.5 [cf. Eq. (3.36)]. En effet la densité du milieu est telle que des captures électroniques sur les noyaux ont eu lieu, ce qui a diminué  $Y_e$ . Le profil de  $Y_e$  est représenté sur la Fig. 4.19. En reportant la valeur moyenne  $Y_e = 0.44$  dans l'Eq. (3.36), on obtient  $M_{\text{Chandra}} = 1.13 M_\odot$ . Cependant, pour des étoiles très massives ( $M \sim 50 M_\odot$ ), la température centrale est suffisamment élevée pour que des

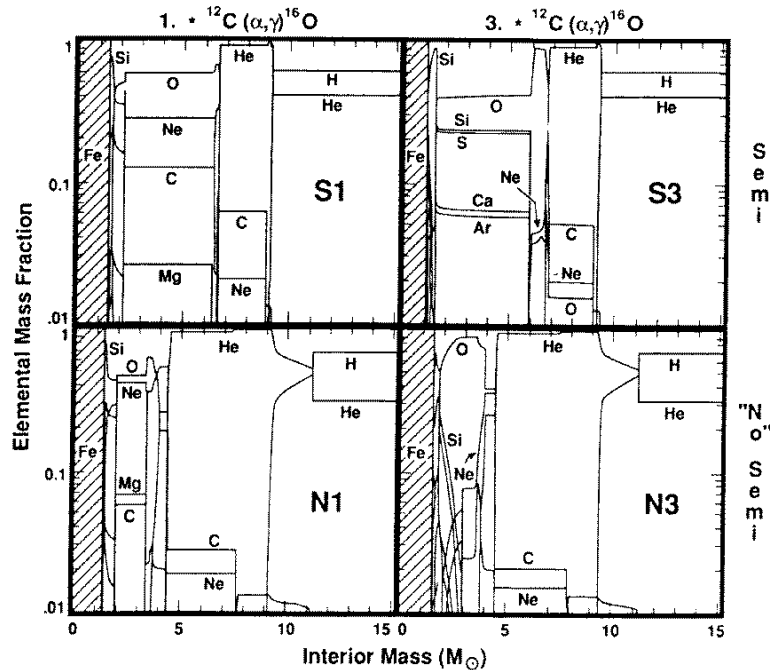


FIG. 4.18 – Composition de quatre modèles d'une étoile de  $25 M_{\odot}$  en fin d'évolution (pré-supernova). Les différences entre les quatre modèles proviennent de différents taux pour la réaction  $^{12}\text{C} + \alpha \rightarrow ^{16}\text{O} + \gamma$  (mal connue théoriquement) et de la prise en compte (en haut) ou non (en bas) de la convection [d'après Woosley & Weaver (1994b)].

corrections soient nécessaires dans la formule (3.36), établie dans l'hypothèse  $T = 0$ . La masse du cœur de fer augmente alors jusqu'à atteindre  $2 M_{\odot}$  pour une étoile de  $50 M_{\odot}$ .

#### 4.4.2 L'effondrement et le rebond

L'augmentation de densité et de température consécutives à l'effondrement ne peuvent amorcer de nouvelles réactions nucléaires (qui dégageraient de l'énergie pour s'opposer à l'effondrement) puisque le fer ne fusionne pas de manière exothermique. Bien au contraire, la résistance de la matière diminue car les électrons — qui contribuent majoritairement à la pression — sont capturés par les noyaux au fur et à mesure que la densité augmente. De plus, une partie de l'énergie dégagée par la compression est utilisée dans la *photodissociation* du fer :



et ne sert donc pas à augmenter la pression. Ainsi, l'indice adiabatique de la matière descend en dessous de  $4/3$ . On assiste donc à un emballement de l'effondrement.

On peut distinguer deux phases dans l'effondrement :

1. Dans un premier temps, les captures électroniques sur les protons et les noyaux (réactions  $\beta$  inverses)





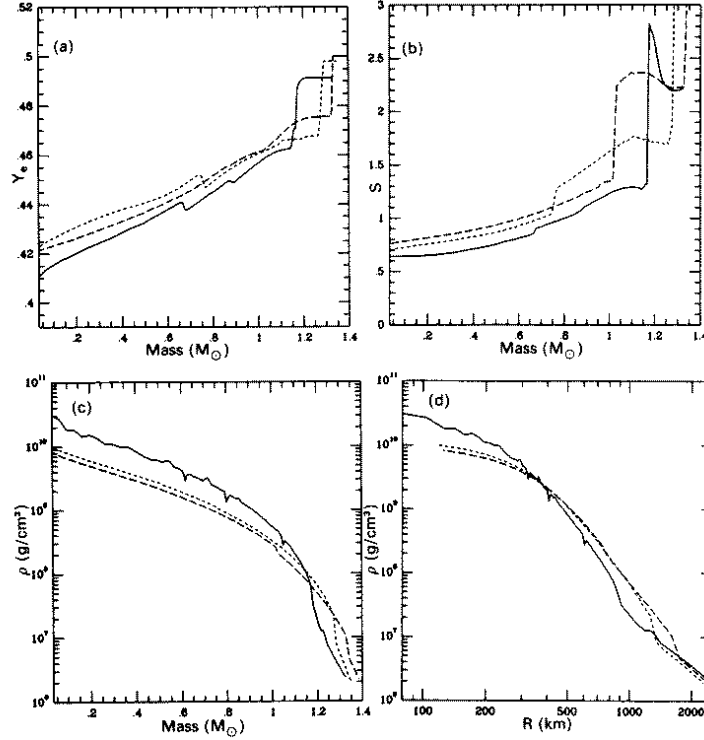


FIG. 4.19 – Profils de diverses quantités dans le cœur de fer d’une pré-supernova de  $13 M_{\odot}$  (ligne continue, modèle de Nomoto & Hashimoto 1988),  $15 M_{\odot}$  (petits pointillés, modèle de Woosley & Weaver 1988) et  $18 M_{\odot}$  (pointillés longs, modèle de Weaver & Woosley 1988) : (a) fraction électronique  $Y_e$ , (b) entropie par nucléon  $S$  (en unité de la constante de Boltzmann  $k_B$ ), (c) densité  $\rho$  en fonction de la masse incluse jusqu’à la zone considérée, (d) densité  $\rho$  en fonction de la distance au centre [d’après Cooperstein & Baron (1990)].

sont violemment hors équilibre. En effet l’échelle de temps de (4.5), qui est une interaction faible, est bien plus grande que celle de l’effondrement. En conséquence de l’écart à l’équilibre  $\beta$ , l’entropie par baryon augmente, de  $S \simeq 0.7 k_B$  (cf. Fig. 4.19) à environ  $1.5 k_B$ .

2. Lorsque la densité atteint  $\sim 4 \times 10^{14} \text{ kg m}^{-3}$  (la densité centrale initiale valait  $\sim 10^{13} \text{ kg m}^{-3}$  comme on peut le voir sur la Fig. 4.19), les neutrinos émis par (4.5) sont piégés dans la matière. La réaction (4.5) se met alors à l’équilibre. A cet instant  $Y_e \sim 0.35$ . L’effondrement se poursuit de manière quasi-adiabatique (puisque les neutrinos ne peuvent sortir) et l’entropie par nucléon reste à peu près constante.

L’effondrement ne s’arrête que lorsque la densité nucléaire est atteinte ( $\rho_{\text{nuc}} \sim 2 \times 10^{17} \text{ kg m}^{-3}$ ), environ 10 ms après le début de l’effondrement. Les noyaux sont alors complètement dissociés et la matière est constituée majoritairement de neutrons. C’est l’interaction forte entre les neutrons qui entre en jeu et s’oppose à l’effondrement. Ce brusque durcissement de la pression crée une onde de choc, qui se propage vers l’extérieur du cœur. Si l’onde de choc est suffisamment puissante, elle provoque l’expulsion des couches externes de l’étoile, induisant une intense émission électromagnétique et l’étoile apparaît comme une supernova. Les figures 4.4 et 4.23 sont la preuve observationnelle de l’expansion.

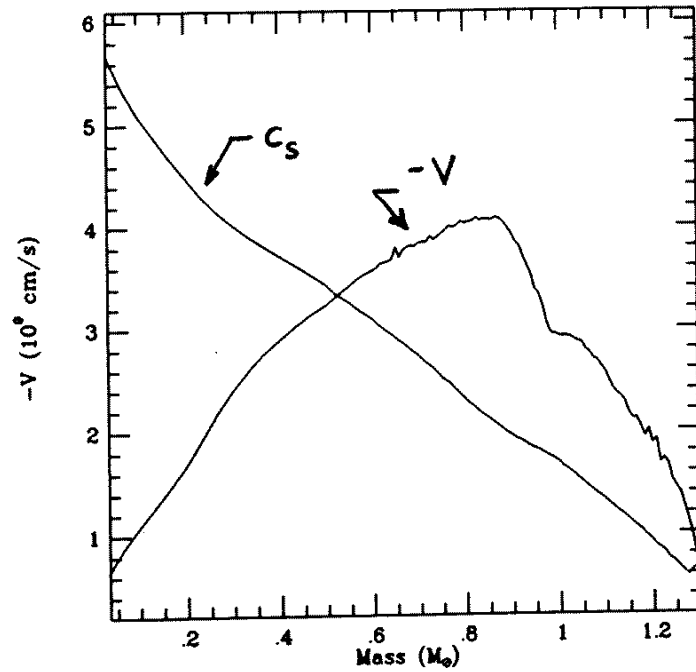


FIG. 4.20 – Profils de la vitesse du fluide et de la vitesse du son dans l’effondrement du cœur de fer d’une étoile de  $18 M_{\odot}$ . [d’après Cooperstein & Baron (1990)].

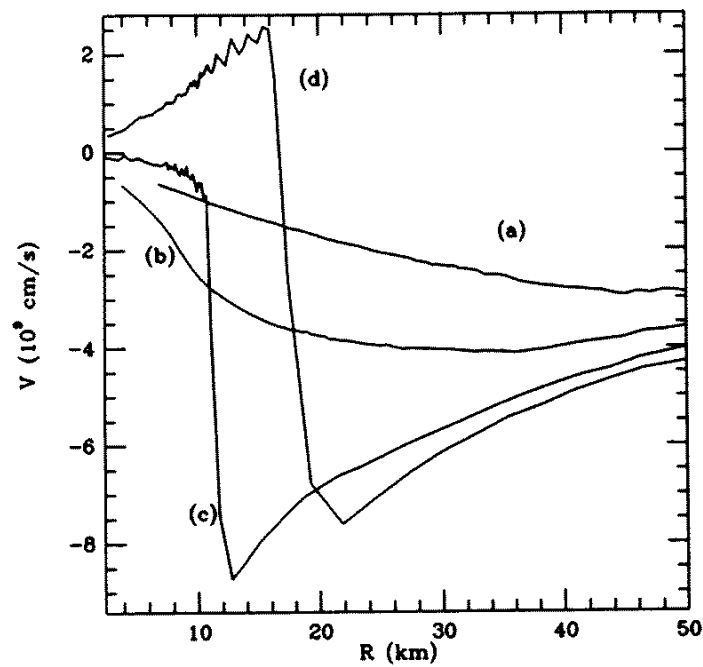


FIG. 4.21 – Profils de la vitesse du fluide (a) dans la phase initiale d’effondrement, (b) au moment où la densité nucléaire est atteinte au centre, (c) au début du rebond (taux de compression maximum), (d) au départ de l’onde de choc [d’après Cooperstein & Baron (1990)].

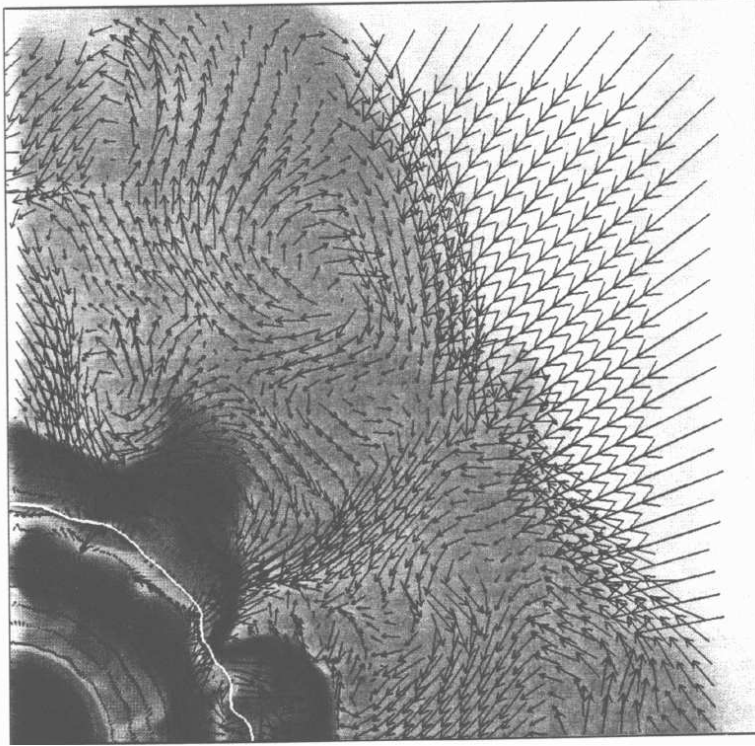


FIG. 4.22 – Régions centrales d’une simulation numérique 2-D d’une SN II de masse initiale  $15 M_{\odot}$ , 89 ms après le rebond. La neutrinosphère est la frontière entre les milieux opaque et transparent aux neutrinos. Les flèches représentent les vecteurs vitesses du fluide. La largeur du graphique est 120 km [d’après Burrows, Hayes & Fryxell (1995)].

sion des couches externes dans une supernovæ de type II.

On peut prévoir l’endroit où l’onde de choc se forme d’après le profil de vitesse de l’effondrement (Fig. 4.20). En effet la vitesse au centre est nulle et croît à peu près linéairement avec  $r$  jusqu’à un certain point. Elle passe ensuite par un maximum pour décroître dans les régions externes. La vitesse du son quant à elle se comporte comme la densité, c’est-à-dire qu’elle décroît du centre vers le bord. Il existe donc un point  $r_s$ , appelé *point sonique* où la vitesse du son égale la vitesse du fluide, l’effondrement étant subsonique pour  $r < r_s$  et supersonique pour  $r > r_s$  (cf. Fig. 4.20). Lorsque la densité nucléaire est atteinte au centre et que l’équation d’état se raidit, les régions à l’intérieur du point sonique en sont “informées” par les ondes sonores et modifient leur vitesse en conséquence. Par contre, les régions au delà du point sonique continuent à tomber “comme si de rien n’était” et vont donc se heurter brutalement aux régions centrales. L’onde de choc va ainsi se former au voisinage du point sonique. Elle se propage ensuite vers l’extérieur (cf. Fig. 4.21).

La vitesse maximale atteinte dans l’effondrement est de l’ordre du tiers de la vitesse de la lumière :

$$v_{\max} \sim c/3 . \quad (4.6)$$

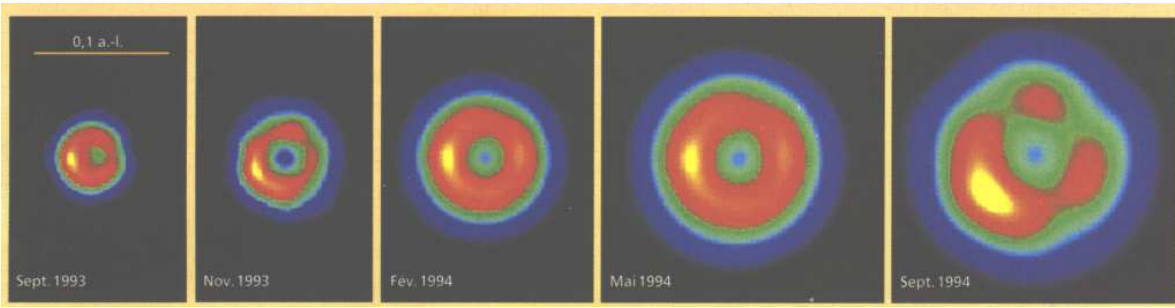


FIG. 4.23 – Images VLBI de la supernova SN 1993J dans la galaxie proche M 81, montrant l’expansion des couches externes de l’étoile.

Le choc perd énormément d’énergie à la rencontre avec les couches externes en chute quasi-libre et notamment dans la photodissociation des noyaux de fer (de la partie du cœur de fer qui était située au delà du point sonique). A environ 0.1 s après le début du rebond le choc a quasiment perdu toute son énergie et ne se propage plus vers l’extérieur ; il se transforme en un choc d’accrétion. Ce phénomène de l’affaiblissement de l’onde de choc a été pendant longtemps un problème majeur de la théorie des SN II : dans toutes les simulations numériques, le choc s’évanouissait avant de pouvoir éjecter les couches externes et provoquer le phénomène de supernova ! Ce problème est résolu aujourd’hui par deux phénomènes qui viennent “revigorer” le choc (cf. Fig. 4.24) :

- La proto-étoile à neutrons en arrière du choc est un objet très chaud, la deuxième phase de l’effondrement ayant été adiabatique. La température centrale a atteint  $\sim 10^{11}$  K, ce qui correspond à une énergie de  $\sim 10$  MeV. Ce cœur se refroidit par une intense émission de neutrinos. Ces neutrinos déposent de l’énergie dans les couches denses en arrière du choc et facilitent la progression de celui-ci.
- Dans les régions entre la proto-étoile à neutrons et l’onde de choc, de la convection se développe dans la matière chauffée par les neutrinos (cf. Fig. 4.22). Cette convection permet un transport efficace de l’énergie jusqu’au choc.

Pour plus de détails sur ces deux mécanismes, on pourra consulter Janka et al. (2004).

Mentionnons enfin que le résidu de la supernova n’est pas nécessairement une étoile à neutrons mais peut être un trou noir. En effet, la “proto”-étoile à neutrons peut s’effondrer en trou noir dans les secondes ou minutes qui suivent l’explosion, après s’être refroidie et/ou si une bonne partie des couches externes n’a pas atteint la vitesse de libération et est retombée vers le centre, de sorte que la masse totale a dépassé la masse maximale d’une étoile à neutrons.

#### 4.4.3 Energétique d’une SN II

L’énergie libérée par une SN II est la différence entre l’énergie potentielle gravitationnelle du cœur de fer de la présupernova et celle du résidu, l’étoile à neutrons :

$$E_{\text{SNII}} = E_{\text{grav}}(\text{pré-SN}) - E_{\text{grav}}(\text{ét. neut.}) \quad (4.7)$$

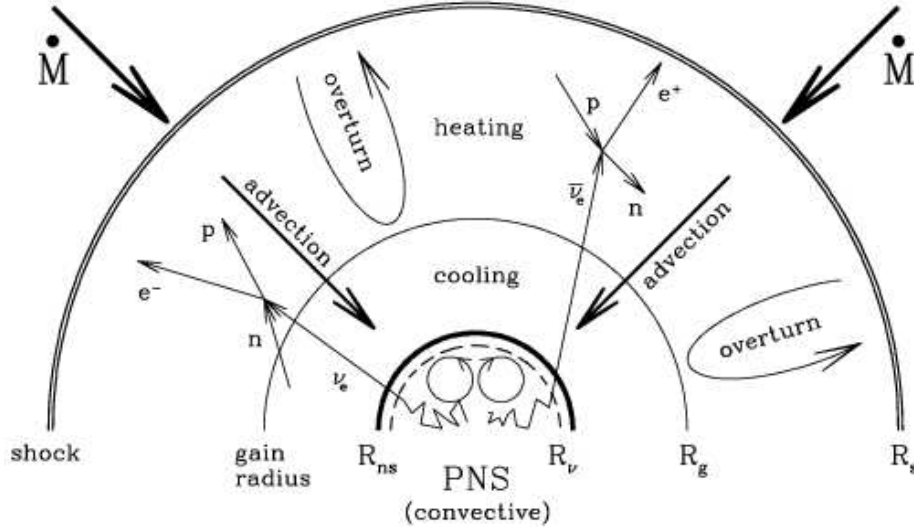


FIG. 4.24 – Schéma des régions internes d’une supernova gravitationnelle, durant la phase de réactivation du choc par les neutrinos.  $R_\nu$  est le rayon de la neutrinosphère,  $R_{ns}$  est le rayon de la proto-étoile à neutrons,  $R_g$  est le rayon de “gain”, au delà duquel le chauffage par les neutrinos l’emporte sur le refroidissement par émission de neutrinos, et  $R_s$  est le rayon de l’onde de choc. La convection à l’intérieur de la proto-étoile à neutrons augmente la luminosité [d’après Janka et al. (2001)].

La première énergie potentielle est de l’ordre de

$$E_{\text{grav}}(\text{pré-SN}) \sim -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R_i} \quad (4.8)$$

avec  $R_i \simeq 1500$  km (cf. Fig. 4.19), la deuxième vaut

$$E_{\text{grav}}(\text{ét. neut.}) \sim -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R_f} \quad (4.9)$$

avec  $R_f \simeq 10$  km. Puisque  $R_f \ll R_i$ , on a  $|E_{\text{grav}}(\text{ét. neut.})| \gg |E_{\text{grav}}(\text{pré-SN})|$ , si bien que (4.7) s’écrit

$$E_{\text{SNII}} \simeq -E_{\text{grav}}(\text{ét. neut.}) \quad (4.10)$$

L’application numérique en prenant  $M = 1.4 M_\odot$  et  $R_f = 10$  km conduit à

$$\boxed{E_{\text{SNII}} \sim 3 \times 10^{46} \text{ J}} \quad , \quad (4.11)$$

ce qui représente la fraction suivante de l’énergie de masse du cœur de fer :

$$\frac{E_{\text{SNII}}}{Mc^2} \sim 0.1 \quad (4.12)$$

En comparant ce “rendement” avec celui d’une SN Ia [Eq. (4.2)], on retrouve le fait que l’effondrement gravitationnel est un mécanisme de libération de l’énergie de masse bien plus efficace que les réactions thermonucléaires.

L’énergie (4.11) d’une supernova “gravitationnelle” se répartie comme suit

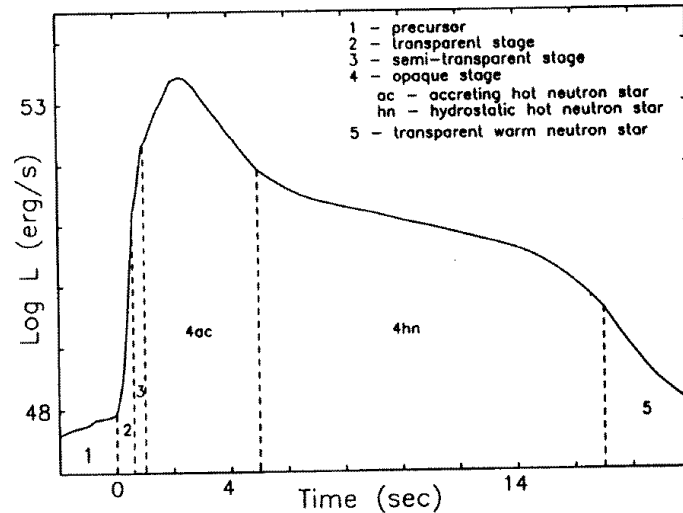


FIG. 4.25 – Luminosité sous forme de neutrinos en fonction du temps, pour une SN II. La phase 1 correspond à la pré-supernova, la phase 2 (resp. 3) à la première (resp. deuxième) phase de l’effondrement, la phase 4 à l’émission de la proto-étoile à neutrons et la phase 5 au refroidissement de l’étoile à neutrons [d’après Nadyozhin (1994)].

- la quasi-totalité (99%) est emportée par les neutrinos ;
- $\sim 1\%$  est dans l’énergie cinétique de la matière éjectée ;
- $\sim 0.1\%$ , soit  $\sim 10^{43}$  J, est émise sous forme électromagnétique ;
- une toute petite fraction, sans doute pas plus grande que  $10^{-4}$ , est émise sous forme d’ondes gravitationnelles.

#### 4.4.4 Emission de neutrinos

Comme nous venons de le voir, ce sont les neutrinos qui emportent l’essentiel de l’énergie émise par une SN II (ou SN Ib, Ic). La courbe de “lumière” des neutrinos est représentée sur la Fig. 4.25.

L’un des plus grands succès de l’astrophysique contemporaine est la détection des neutrinos émis par la supernova SN 1987A, les seuls neutrinos d’un objet astronomique autre que le Soleil captés à ce jour. Le 23 février 1987, à 7h35 TU, les détecteurs de Kamioka (Japon) et IMB (Etats-Unis) ont en effet enregistré un pic de respectivement 11 et 9 neutrinos  $\bar{\nu}_e$ , d’énergie moyenne 15 MeV. La coïncidence avec la supernova, détectée optiquement quelques heures plus tard, a fait conclure que les neutrinos provenaient bel et bien de SN 1987A. De plus, le nombre et l’énergie des neutrinos reçus correspondent au flux que l’on peut dériver de l’énergie totale (4.11) et de la distance Terre - Grand Nuage de Magellan. Il s’agit-là du triomphe de l’interprétation des SN II par un effondrement gravitationnel.

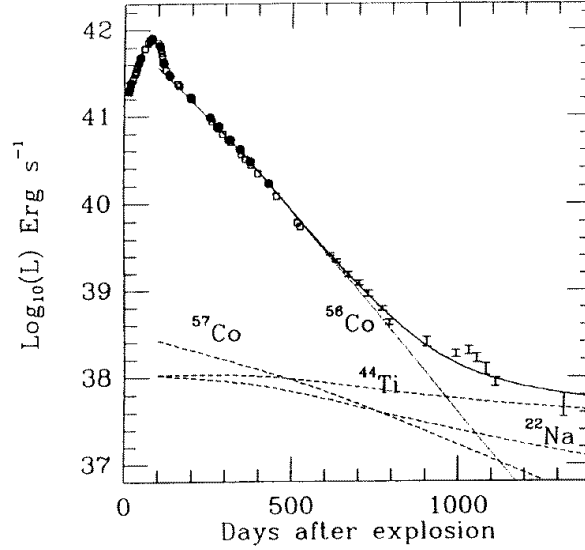


FIG. 4.26 – Courbe de lumière bolométrique de SN 1987A : les points correspondent à des mesures, les lignes à des modèles théoriques basés sur la décroissance d'éléments radioactifs [d'après Cassé & Lehoucq (1994)].

#### 4.4.5 Courbe de lumière

Bien que l'énergie totale libérée par une SN II soit plus grande par deux ordres de grandeur que celle d'une SN Ia [comparer (4.1) et (4.11)], la luminosité électromagnétique d'une SN II est généralement plus faible que celle d'une SN Ia, ainsi qu'on peut le voir sur la Fig. 4.10. La raison est qu'une très faible fraction, de l'ordre de  $10^{-3}$ , de l'énergie d'une SN II est émise sous forme de lumière, l'essentiel étant emporté par les neutrinos.

Après le maximum, la courbe de lumière est supportée par la décroissance radioactive du  $^{56}\text{Co}$  en  $^{56}\text{Fe}$  (cf. Fig. 4.26). Une SN II produit beaucoup moins de  $^{56}\text{Co}$  qu'une SN Ia :  $0.07 M_{\odot}$  (dans le cas de SN 1987A) contre  $\sim 0.7 M_{\odot}$  (cf. § 4.3.2).

#### 4.4.6 SN Ic et sursauts gamma

Deux supernovæ de type Ic ont été associées à des sursauts gamma :

- SN 1998bw a été trouvée dans la boîte d'erreur de  $8'$  du sursaut gamma GRB 980425 observé par le satellite BeppoSAX et moins d'un jour après celui-ci. Le sursaut GRB 980425 était très proche ( $z = 0.0085 \iff d \simeq 40$  Mpc) et particulièrement sous-lumineux ( $E_{\gamma} \sim 10^{41}$  J). Le spectre de SN 1998bw est représenté sur la Fig. 4.7.
- SN 2003dh a été détectée spectralement dans le transitoire optique qui a suivi le sursaut gamma très brillant GRB 030329. Ce dernier, découvert par le satellite HETE-2 était situé à une distance correspondant à  $z = 0.168$ . Il a été suivi du transitoire optique le plus lumineux jamais observé ( $m_V \simeq 12$ ).

Les supernovæ de type Ic sont issues de l'effondrement gravitationnel d'étoiles très massives, de type Wolf-Rayet, qui ont expulsé leurs enveloppes d'hydrogène et d'hélium. Dans

celles associées à des sursauts gamma, on a pu mesurer des vitesses d'expansion très importantes :  $V_{\text{ejec}} = 36\,000 \text{ km s}^{-1} \simeq c/8$  pour SN 2003dh! On pense que ces supernovæ conduisent à la formation d'un trou noir en rotation rapide entouré d'un tore de matière qui alimente un jet relativiste (scénario d'*hypernova*). C'est ce dernier qui serait à l'origine du sursaut gamma.

## Bibliographie

Pour plus de détails sur la théorie et l'observation des supernovæ, on pourra consulter les articles de revues ou les ouvrages suivants :

- Arnett D. 1996 : *Supernovæ and nucleosynthesis*, Princeton University Press (Princeton)  
 Bludman S.A., Mochkovitch R., Zinn-Justin J. (eds.) 1994 : *Supernovæ (Les Houches 1990)*, North-Holland (Amsterdam)  
 Fryer C.L. (ed.) 2004 : *Stellar collapse*, Kluwer Academic Press (Dordrecht)  
 Hillebrandt W., Niemeyer J.C. 2000 : *Type Ia supernova explosion models*, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **38**, 191  
 Höflich P., Kumar P., Wheeler J.C. (eds) 2004 : *Cosmic explosions in three dimensions*, Cambridge Univ. Press (Cambridge)  
 Livio M., Panagia N., Sahu K. 2001 : *Supernovæ and gamma-ray burst, the greatest explosions since the Big Bang*, Cambridge University Press (Cambridge)  
 Montmerle T., Prantzos N. 1988 : *Soleils éclatés*, Presses du CNRS.  
 Ruiz-Lapuente P., Canal R., Isern J. (eds.) 1997 : *Thermonuclear supernovæ*, Kluwer (Dordrecht)

Autres références mentionnées dans le texte :

- Baade W., Zwicky F. 1934 : *Supernovæ and cosmic rays*, *Phys. Rev.* **45**, 138  
 Branch D. 1990 : *Spectra of supernovæ*, dans *Supernovæ*, *A&A Library*, A.G. Petschek (ed.), Springer-Verlag (New York)  
 Burrows A., Hayes J., Fryxell B.A. 1995 : *On the nature of core-collapse supernova explosions*, *Astrophys. J.* **450**, 830  
 Cassé M., Lehoucq R. 1994 : *High energy emission of supernovæ* dans *Supernovæ (Les Houches 1990)*, S.A. Bludman, R. Mochkovitch, J. Zinn-Justin (eds.), North-Holland (Amsterdam)  
 Cooperstein J., Baron E.A. 1990 : *Supernovæ : the direct mechanism and the equation of state*, dans *Supernovæ*, *A&A Library*, A.G. Petschek (ed.), Springer-Verlag (New York)  
 Decourchelle A., et al. 2001 : *XMM-Newton observation of the Tycho supernova remnant*, *Astron. Astrophys.* **365**, L218  
 Dogget J.B., Branch D. 1985 : *A comparative study of supernova light curves*, *Astron. J.* **90**, 2303  
 Filippenko A., Riess A.G. 2000 : *Type Ia supernovæ and their cosmological implications*, dans *Type Ia supernovæ : theory and cosmology*, J. Truran & J. Niemeyer (eds.), Cambridge University Press (Cambridge)  
 Hamuy M. 2004 : *Review on the observed and physical properties of core collapse supernovæ*, dans *Stellar collapse*, C.L. Fryer (ed.), Kluwer Academic Press (Dordrecht)  
 Harkness R.P., Wheeler J.C. 1990 : *Classification of supernovæ*, dans *Supernovæ*, *A&A Library*, A.G. Petschek (ed.), Springer-Verlag (New York)  
 Höflich P., Khokhlov A., Wheeler J.C., Nomoto K., Thielemann F.K. 1997 : *Explosion models, light curves, spectra and  $H_0$* , dans *Thermonuclear supernovæ*, R. Canal, P. Ruiz-Lapuente, J. Isern (eds.), Kluwer Academic Press (Dordrecht)  
 Hoyle F., Fowler W.A. 1960 : *Nucleosynthesis in supernovæ*, *Astrophys. J.* **132**, 565  
 Iben I., Tutukov A.V. 1984 : *Supernovæ of type I as products of the evolution of binaries with components of moderate initial mass ( $M \leq 9 M_{\odot}$ )*, *Astrophys. J. Suppl.* **54**, 335



- Janka H.-T., Kifonidis K., Rampp M. 2001 : *Supernova Explosions and Neutron Star Formation*, in *Proc. Workshop on Physics of Neutron Star Interiors*, Eds. D. Blaschke, N.K. Glendenning & A.D. Sedrakian, *Lect. Notes Phys.* **578**, Springer (Berlin)
- Janka H.-T., Buras R., Kifonidis K., Rampp M., Plewa T. 2004 : *Explosion mechanisms of massive stars*, dans *Stellar collapse*, C.L. Fryer (ed.), Kluwer Academic Press (Dordrecht)
- Kenyon S.J., Livio M., Mikolajewska J., Tout A.C. 1993 : *On symbiotic stars and type Ia supernovæ*, *Astrophys. J.* **407**, L81
- Kirshner R.P. 1990 : *Supernova light curves*, dans *Supernovæ*, A&A Library, A.G. Petschek (ed.), Springer-Verlag (New York)
- Koyama K., Petre R., Gotthelf E.V., Hwang U., Matsuura M., Ozali M., Holt S.S. 1995 : *Evidence for shock acceleration of high-energy electrons in the supernova remnant SN 1006*, *Nature* **378**, 255
- Leibundgut B. 2001 : *Cosmological implications from observations of Type Ia supernovæ*, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **39**, 67
- Matheson T. 2004 : *The first direct supernova/GRB connection : GRB 030329 / SN 2003dh*, dans *Cosmic explosions in three dimensions*, P. Höflich, P. Kumar, J.C. Wheeler (eds), Cambridge Univ. Press (Cambridge)
- Minkowski R. 1940 : *Pub. Astron. Soc. Pac.* **52**, 206
- Müller E. 1994 : *Multidimensional hydrodynamical simulations of supernova explosions*, dans *Supernovæ (Les Houches 1990)*, S.A. Bludman, R. Mochkovitch, J. Zinn-Justin (eds.), North-Holland (Amsterdam)
- Müller E., Höflich P. 1994 : *A comparison of calculated and observed monochromatic type Ia supernova light curves*, *Astron. Astrophys.* **281**, 51
- Nadyozhin D.K. 1994 : *The neutrino signal from a collapsing star*, dans *Supernovæ (Les Houches 1990)*, S.A. Bludman, R. Mochkovitch, J. Zinn-Justin (eds.), North-Holland (Amsterdam)
- Nomoto K., Hashimoto M. 1988 : *Phys. Rep.* **163**, 13
- Nomoto K., Thielemann F.-K., Yokoi K. 1984 : *Accreting white dwarf models for type I supernovæ. III Carbon deflagration supernovæ*, *Astrophys. J.* **286**, 644
- Nomoto K., Umeda H., Hachisu I., Kato M., Kobayashi C., Tsujimoto T. 2000 : *Type Ia supernova progenitors, environmental effects, and cosmic supernova rates*, dans *Type Ia supernovæ : theory and cosmology*, J. Truran & J. Niemeyer (eds.), Cambridge University Press (Cambridge)
- Perlmutter S. et al. 1999 : *Measurements of  $\Omega$  and  $\Lambda$  from 42 high-redshift supernovæ*, *Astrophys. J.* **517**, 565
- Phillips M.M., Williams R.E. 1991 : *SN 1987A : optical spectrophotometry 130-900 days after core collapse*, dans *Supernovæ*, S.E. Woosley (ed.), Springer-Verlag (New York)
- Reinecke M., Hillebrandt W., Niemeyer J.C. 2002 : *Refined numerical models for multidimensional Type Ia supernova simulations*, soumis à *Astron. Astrophys.* **386**, 936
- Riess A.G. et al. 1998 : *Observational evidence from supernovæ for an accelerating universe and a cosmological constant*, *Astron. J.* **116**, 1009
- Riess A.G. et al. 1999 : *The rise time of nearby type Ia supernovæ*, *Astron. J.* **118**, 2675
- Riess A.G. et al. 2001 : *The farthest known supernova : support for an accelerating universe and a glimpse of the epoch of deceleration*, *Astrophys. J.* **560**, 49
- Schmidt B.P. et al. 1998 : *The high-z supernova search : measuring cosmic deceleration and global curvature of the universe using type Ia supernovæ*, *Astrophys. J.* **507**, 46
- Tammann G.A. 1994 : *The frequency of supernovæ*, dans *Supernovæ (Les Houches 1990)*, S.A. Bludman, R. Mochkovitch, J. Zinn-Justin (eds.), North-Holland (Amsterdam)
- Weaver T.A., Woosley S.E. 1988 : non publié
- Wheeler J.C. 1990 : *Introduction to supernovæ*, dans *Supernovæ (Jerusalem Winter School for theoretical Physics)*, J.C. Wheeler, T. Piran, S. Weinberg (eds.), World Scientific (Singapore)
- Woosley S.E. 1990 : *Type I supernovæ : carbon deflagration and detonation*, dans *Supernovæ*, A&A Library, A.G. Petschek (ed.), Springer-Verlag (New York)
- Woosley S.E., Weaver T.A. 1988 : *Phys. Rep.* **163**, 79
- Woosley S.E., Weaver T.A. 1994a : *Sub-Chandrasekhar mass models for type Ia supernovæ*, *Astrophys. J.* **423**, 371
- Woosley S.E., Weaver T.A. 1994b : *Massive stars, supernovæ, and nucleosynthesis*, dans *Supernovæ (Les Houches 1990)*, S.A. Bludman, R. Mochkovitch, J. Zinn-Justin (eds.), North-Holland (Amsterdam)



# Chapitre 5

## Étoiles à neutrons

version 2004-2005

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>75</b>
<b>5.2</b>	<b>Équations de structure : système T.O.V.</b>	<b>81</b>
<b>5.3</b>	<b>Équation d'état</b>	<b>85</b>
<b>5.4</b>	<b>Masse maximale</b>	<b>89</b>
<b>5.5</b>	<b>Vitesse de rotation maximale</b>	<b>97</b>
<b>5.6</b>	<b>Formation et évolution des étoiles à neutrons</b>	<b>99</b>

---

## 5.1 Introduction

### 5.1.1 Un petit historique

Le neutron a été découvert en 1932 par le britannique J. Chadwick. Le soir même de l'annonce de la découverte, L.D. Landau, lors d'une discussion avec N. Bohr et L. Rosenfeld à Copenhague, émet l'idée que des étoiles denses pourraient exister qui seraient composées principalement de neutrons.

En 1934, les astronomes W. Baade et F. Zwicky émettent l'hypothèse que “sous toute réserve, les supernovæ représenteraient des transitions entre des étoiles ordinaires et des *étoiles à neutrons*, qui dans leur état final seraient formées de neutrons extrêmement comprimés”. L'idée de Baade et Zwicky est que la source d'énergie à l'origine des supernovæ est l'énergie potentielle gravitationnelle libérée par l'effondrement du cœur d'une étoile en étoile à neutrons. Dans ses grandes lignes, ce scénario s'est avéré exact pour les supernovæ de type II, Ib et Ic, ainsi que nous l'avons vu au Chap. 4.

En 1939, J.R. Oppenheimer et G. Volkoff effectuent les premiers calculs de la structure d'une étoile à neutrons en employant la théorie de la relativité générale et considérant que l'étoile est entièrement constituée de neutrons qui forment un gaz de Fermi dégénéré.

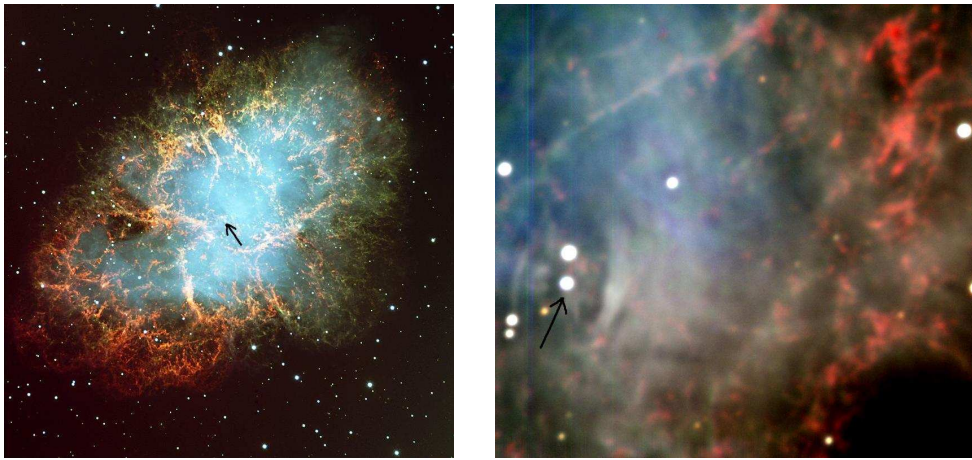


FIG. 5.1 – Nébuleuse du Crabe (M 1) vue par le VLT. Le pulsar est indiqué par la flèche. L'image de droite constitue un zoom de la partie centrale et peut être comparée à l'image HST de la Fig. 5.2 [source : ESO].

Au début 1967, F. Pacini émet l'idée que la source d'énergie de la Nébuleuse du Crabe (Messier 1, reste de la supernova de l'an 1054 dans la constellation du Taureau, Fig. 5.1) est une étoile à neutrons magnétisée en rotation.

En juillet 1967, A. Hewish, de l'Université de Cambridge lance un programme d'observation de la scintillation des radiosources extragalactiques. La scintillation radio est provoquée par la réfraction des signaux par les électrons du vent solaire. L'idée de Hewish était d'utiliser cette scintillation pour mesurer la taille apparente des sources (tout comme en optique les sources de diamètre apparent non nul, comme les planètes, ne scintillent pas) et discriminer ainsi entre quasars (découverts en 1963) et radio-galaxies. Dans ce but, A. Hewish et son étudiante, Jocelyn Bell, ont construit un radiotélescope sensible à des sources très faibles et quasi-punctuelles. Au mois d'août 1967, Jocelyn Bell détecte des fluctuations importantes dans le signal du radiotélescope et qui ne ressemblent pas à de la scintillation (elles se produisent notamment la nuit, alors que le gros du vent solaire n'est pas sur la ligne de visée). Le signal se répétant toutes les nuits avec quatre minutes d'avance par rapport à la veille, A. Hewish et J. Bell ont conclu assez rapidement à une origine céleste et non à des interférences terrestres. Le 28 novembre 1967, Hewish et ses collègues détectent une périodicité de 1.337 s dans le signal. L'extrême stabilité de cette périodicité fait quelque temps penser à une origine *artificielle* de la source radio. Mais après réflexion, lorsqu'ils publient leur article en février 1968, Hewish et ses collaborateurs émettent l'hypothèse d'une naine blanche ou d'une étoile à neutrons comme source des signaux. La découverte devait valoir le prix Nobel de Physique à Hewish en 1974. La "source pulsante" détectée par Hewish et Bell est aujourd'hui connue sous le nom de PSR B1919+21. La désignation contemporaine des pulsars est en effet la suivante :

- *PSR* signifie "Pulsating Source of Radio" ;
- *B* signifie que les coordonnées qui suivent sont rapportées à l'équinoxe 1950 ; un *J* aurait signifié qu'il s'agissait de l'équinoxe 2000 (les coordonnées J2000 sont désormais utilisées pour repérer chaque nouveau pulsar) ;

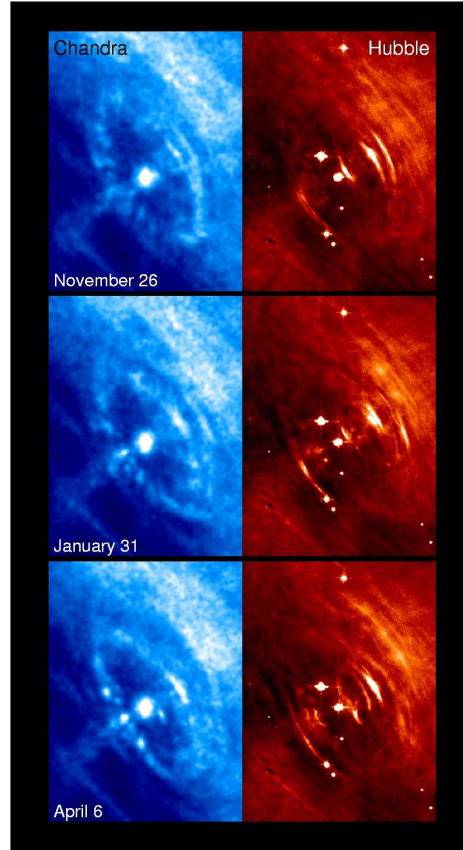


FIG. 5.2 – Voisinage du pulsar du Crabe vu X par Chandra (image de gauche) et en optique par le HST. Noter les variations à l'échelle de quelques semaines [source : NASA].

- $1919+21$  signifie que, dans le système B1950, l'ascension droite du pulsar est 19 h 19 min et sa déclinaison  $+21^\circ$ .

La période aujourd'hui mesurée de PSR B1919+21 est

$$P = 1.337301192269(6) \text{ s} , \quad (5.1)$$

sa variation temporelle

$$\dot{P} = 1.34809 \times 10^{-15} , \quad (5.2)$$

ce qui signifie qu'en un an, le pulsar ne retarde que 40 nanosecondes !

En juin 1968, T. Gold identifie les pulsars comme des étoiles à neutrons et prédit une (très légère !) augmentation de la période (le  $\dot{P}$ ) en raison de la perte d'énergie de rotation par rayonnement électromagnétique.

A la fin de 1968 sont découverts deux des pulsars aujourd'hui les plus étudiés :

- PSR B0833-45, dit *pulsar Vela* car situé la constellation des Voiles, de période 89 ms.
- PSR B0531+21, dit *pulsar du Crabe* car situé dans la nébuleuse du Crabe (cf. Figs. 5.1 et 5.2), confirmant ainsi la prédiction de Pacini et l'hypothèse de Baade et Zwicky sur les supernovæ. La période du pulsar du Crabe n'est que de 33 ms, un record qui ne sera battu qu'en 1982.

La petitesse des périodes de ces deux pulsars a permis de trancher définitivement entre les naines blanches et les étoiles à neutrons dans l'explication du phénomène pulsar. Il est en effet facile de voir qu'une naine blanche en rotation ne pourrait pas supporter une période aussi courte que 33 ms. La vitesse angulaire maximale,  $\Omega_K$ , dite *vitesse keplérienne*, est atteinte lorsque la force centrifuge à l'équateur s'oppose exactement à la force de gravitation :

$$R \Omega_K^2 = \frac{GM}{R^2}, \quad (5.3)$$

où  $R$  est le rayon de l'étoile et  $M$  sa masse. En introduisant la densité moyenne,  $\bar{\rho}$  telle que  $M = 4/3 \pi \bar{\rho} R^3$ , l'Eq. (5.3) donne

$$\Omega_K = 2 \sqrt{\frac{\pi}{3} G \bar{\rho}}, \quad (5.4)$$

d'où la période de rotation minimale

$$P_{\min} = \frac{2\pi}{\Omega_K} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\bar{\rho}}}. \quad (5.5)$$

La densité moyenne des naines blanches est au maximum  $\bar{\rho} \sim 10^{11} \text{ kg m}^{-3}$ , ce qui conduit à  $P_{\min} \sim 1 \text{ s}$  et ne peut donc rendre compte de la période de 33 ms du pulsar du Crabe. Si on invoque, non plus la rotation, mais les oscillations des naines blanches, on obtient également des périodes voisines de la seconde (pour le mode fondamental) ce qui les exclut de même. On peut également penser à des oscillations d'étoiles à neutrons. Mais cette fois-ci, les modes propres ont des périodes beaucoup trop courtes, de l'ordre de la milliseconde, pour rendre compte des observations. Une autre alternative est un système binaire d'étoile à neutrons : la période orbitale pourrait coïncider avec les périodes observées mais une telle binaire perdrait toute son énergie orbitale en quelques heures par rayonnement gravitationnel et finirait par coalescer. Fin 1968 il devient donc clair que les pulsars sont des étoiles à neutrons en rotation.

En 1969 est découvert le  $\dot{P}$  du Crabe :  $\dot{P} = 36 \text{ ns/jour}$ .  $\dot{P} > 0$  conformément à la prédiction de Gold. Cette même année on découvre également les pulses du Crabe dans le domaine optique et des rayons X.

En 1971 sont observés les premiers pulsars X (vus uniquement dans le domaine des X) Her X-1 ( $P = 1.24 \text{ s}$ ) et Cen X-3 ( $P = 4.84 \text{ s}$ ) qui sont interprétés aujourd'hui comme des systèmes binaires contenant une étoile à neutrons qui accrète de la matière de son compagnon (*binaires X*).

En 1974 R.A. Hulse et J.H. Taylor découvrent le premier pulsar binaire, PSR B1913+16. Ce système composé de deux étoiles à neutrons en orbite l'une autour de l'autre perd de l'énergie par rayonnement gravitationnel. Son observation sur plusieurs années a permis à Hulse et Taylor de démontrer l'existence des ondes gravitationnelles, ce qui leur a valu le Prix Nobel de Physique 1993.

En 1982 a été découvert le premier pulsar milliseconde, PSR B1937+21, de période  $P = 1.56 \text{ ms}$ . Auparavant le pulsar le plus rapide connu était celui du Crabe ( $P = 33 \text{ ms}$ ).

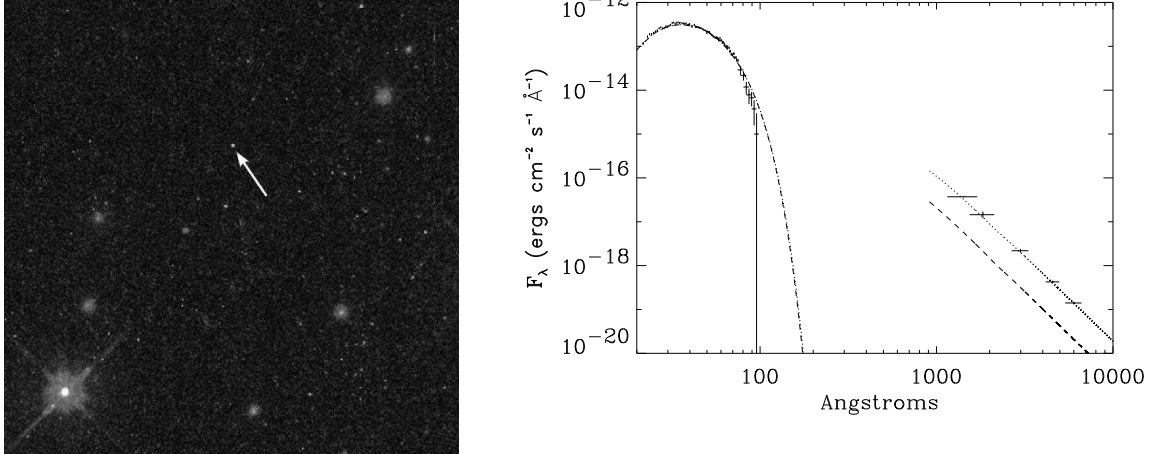


FIG. 5.3 – Étoile à neutrons isolée RX J185635-3754, n'émettant pas comme pulsar, mais seulement par son rayonnement thermique de surface. *A gauche* : image prise par le HST (WFPC2) ; la magnitude de l'étoile à neutrons est d'environ 26. *A droite* : spectre obtenu à l'aide de Chandra (en X) et du HST (les 5 croix entre 1000 Å et 10000 Å). La courbe en tireté est le spectre théorique d'un corps noir à  $T = 7.3 \times 10^5$  K (tenant compte de l'absorption par le milieu interstellaire entre  $\sim 100$  Å et 1000 Å ; la courbe en pointillé ajoute au corps noir précédent un corps noir à  $T = 1.7 \times 10^5$  K pour un meilleur ajustement aux données optiques [d'après Walter & Lattimer 2002].

En février 1987, une douzaine d'antineutrinos électroniques  $\bar{\nu}_e$  ont été détectés sur Terre en provenance de la supernova SN 1987A du Grand Nuage de Magellan (cf. Chap. 4). Il s'agit-là de la preuve directe de la *neutronisation* de la matière dans une explosion de supernova de type II.

En 1992, le chronométrage du pulsar milliseconde PSR B1257+12 par A. Wolszczan et D.A. Frail a permis de déceler trois planètes en orbite autour du pulsar. Il s'agit là de la première découverte de planètes extrasolaires, non démentie à ce jour<sup>1</sup> (cf. Wolszczan 1996).

En 1996, on a identifié en optique et en X une étoile à neutrons isolée, n'émettant pas comme pulsar mais seulement par son rayonnement thermique de surface (RX J185635-3754, cf. Fig. 5.3). Elle se situe à environ 120 pc du système solaire, ce qui en fait une des étoiles à neutrons les plus proches de nous.

En 1998 a été découvert le premier pulsar X milliseconde : SAX J1808.4-3658, de période  $P = 2.5$  ms (Wijnands & van der Klis 1998). Il s'agit du chaînon manquant pour expliquer la formation des pulsars radio milliseconde par accrétion dans un système binaire serré.

En 2002 a été annoncée la toute première mesure du décalage spectral gravitationnel (cf. § 8) à la surface d'une étoile à neutrons, grâce à un spectre pris à l'aide du satellite XMM-Newton :  $z = \Delta\lambda/\lambda = 0.35$  (Cottam et al. 2002). Cette valeur correspond à un paramètre de relativité<sup>2</sup>  $\Xi = GM/(c^2R) = 0.23$ , ce qui montre que les étoiles à neutrons

<sup>1</sup>Notons que la détection en 1993 de deux planètes autour du pulsar PSR B0329+54 a été démentie en 1999.

<sup>2</sup>Contrairement à la formule du § 8, on n'a pas  $\Xi = z$ , car cette dernière relation n'est valable qu'en

sont bien des objets très relativistes.

En 2005, on connaît plus de 1500 pulsars (Manchester et al. 2005). Une centaine environ appartiennent à un système binaire ; 6 d’entre eux ont une autre étoile à neutrons comme compagnon et pour l’un de ceux-ci le compagnon est également un pulsar (pulsar double PSR J0737-3039, Lyne et al. 2004). Environ 90 pulsars sont “milliseconde” ( $P < 10$  ms). Tous les pulsars connus appartiennent à notre Galaxie, sauf 7 qui se trouvent dans les Nuages de Magellan. Le pulsar le plus rapide reste celui découvert en 1982 avec  $P = 1.56$  ms ; le plus lent a une période égale à 8.5 s, la médiane des périodes étant  $\sim 0.6$  s. Le pulsar le plus proche du système solaire est situé à 120 pc (PSR B0950+08).

### 5.1.2 Les étoiles à neutrons comme laboratoires pour la physique fondamentale

Les étoiles à neutrons établissent un lien entre l’astrophysique et divers domaines de la physique fondamentale :

**Relativité générale :** le champ gravitationnel des étoiles à neutrons est si intense qu’il ne peut être décrit correctement que par la théorie relativiste de la gravitation : la relativité générale. Le paramètre de relativité introduit au § 1.1 vaut pour ces objets

$$\Xi := \frac{GM}{c^2 R} \sim \frac{R_s}{R} \sim 0.2 , \quad (5.6)$$

alors que pour une étoile sur la Séquence Principale (le Soleil)  $\Xi \sim 10^{-6}$ . Même pour les naines blanches, qui sont des astres très denses, on a “seulement”  $\Xi \sim 10^{-3}$ . Les étoiles à neutrons sont ainsi les astres “réguliers” (c’est-à-dire pour lesquels l’espace-temps ne possède pas de singularité comme pour un trou noir) les plus relativistes. Elles ont notamment permis de tester la relativité générale *en champ fort* (ce qui n’avait pas été le cas des tests “historiques” effectués dans le système solaire). Réciproquement, la théorie de la relativité générale a permis de mesurer des masses d’étoiles à neutrons a mieux que  $10^{-3}$  près, ce qui constitue un record pour des objets hors du système solaire.

**Physique des particules :** La densité de matière au cœur des étoiles à neutrons dépasse la densité du noyau de l’atome, de sorte que la pression  $y$  est essentiellement fournie par *l’interaction nucléaire forte*. Les étoiles à neutrons sont donc, avec l’univers primordial, le lieu unique d’“observation” de la matière dans un état ultra-dense qui n’est pas reproductible en laboratoire. Les retombées de l’astrophysique vers la physique hadronique, relativement mal connue, sont dans ce cas potentiellement très importantes.

**MHD, physique des plasmas :** Les étoiles à neutrons possèdent un champ magnétique important, de l’ordre de  $10^8$  à  $10^9$  T, et sont entourées d’une magnétosphère constituée

---

régime faiblement relativiste. La relation exacte, qu’il convient d’appliquer ici, est donnée par l’Eq. (5.31) plus bas, en prenant soin de définir  $\Xi$  comme le rapport  $GM/(c^2 R)$  avec  $M$  masse gravitationnelle et  $R$  rayon aérolaire.



par un plasma *non neutre*. Le mécanisme d'émission des pulsars est encore un problème ouvert aujourd'hui.

**Mécanique quantique :** Les étoiles à neutrons sont le siège d'effets quantiques macroscopiques comme la *superfluidité* (des neutrons et des protons) et la *supraconductivité* (des protons).

### 5.1.3 Les étoiles à neutrons comme “sondes” pour l'astrophysique

Parce que les étoiles à neutrons en rotation (pulsars) constituent des horloges ultra-stables, rivalisant avec les meilleurs horloges atomiques terrestres, leur chronométrage permet d'explorer le milieu interstellaire, de mesurer le potentiel gravitationnel galactique ou encore de déceler des corps en orbite autour d'elles. Ainsi les pulsars ont fourni la première détection de planètes extrasolaires (trois planètes autour du pulsar PSR B1257+12) (cf. Wolszczan 1996 pour une revue).

Le chronométrage des pulsars contribue également à la cosmologie, par les contraintes qu'il permet de mettre sur le fond diffus d'ondes gravitationnelles primordiales, ainsi que nous le verrons dans le cours consacré au rayonnement gravitationnel.

## 5.2 Équations de structure : système T.O.V.

### 5.2.1 Hypothèses

Ainsi que nous l'avons mentionné en introduction, les étoiles à neutrons ont un champ gravitationnel si intense qu'il ne peut être décrit correctement que par la relativité générale. La théorie newtonienne serait dans ce cas une bien piètre approximation, les effets relativistes ne pouvant être considérés comme des “petites perturbations” à un champ de gravitation newtonien : les modifications peuvent atteindre 50 à 100 % et certaines propriétés capitales des étoiles à neutrons, comme l'existence d'une *masse maximale*, seraient absentes d'une théorie newtonienne de ces objets.

Plaçons-nous donc dans le cadre de la relativité générale. Afin de simplifier l'étude, on peut faire l'hypothèse d'étoiles à *symétrie sphérique*, ce qui constitue une approximation assez bonne pour les étoiles à neutrons. Excepté pour les pulsars millisecondes, l'aplatissement de l'étoile par la rotation n'est en effet pas très important.

A un très bon niveau d'approximation, la majeure partie de l'étoile peut être décrite comme un *fluide parfait*. Ceci cesse d'être valable pour la croûte, qui est solide, mais cette dernière ne constitue que  $\sim 2\%$  de la masse totale de l'étoile. En relativité, un fluide parfait est entièrement décrit par la donnée de son *tenseur énergie-impulsion*, qui est de la forme

$$T^{\alpha\beta} = \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\alpha u^\beta + p g^{\alpha\beta} , \quad (5.7)$$

où  $g^{\alpha\beta}$  est le tenseur métrique de l'espace-temps engendré par l'étoile,  $u^\alpha$  la quadri-vitesse du fluide,  $\rho$  la densité d'énergie propre du fluide (somme de l'énergie interne et l'énergie de masse) divisée par  $c^2$  et  $p$  sa pression (isotrope).

Il s'agit donc de résoudre l'équation d'Einstein

$$R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g^{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\alpha\beta} , \quad (5.8)$$

avec la forme (5.7) de  $T^{\alpha\beta}$ , sous les hypothèses d'un espace-temps statique à symétrie sphérique. Pour ce faire, il faut choisir un système de coordonnées afin de ramener l'équation tensorielle (5.8) à un système d'équations aux dérivées partielles.

Grâce à l'hypothèse de symétrie sphérique, on peut choisir des coordonnées  $x^\alpha = (t, r, \theta, \phi)$  telles que les composantes du tenseur métrique s'écrivent

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -N^2 c^2 dt^2 + A^2 dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) . \quad (5.9)$$

Dans le cas statique, les coefficients  $N$  et  $A$  ne dépendent que de  $r$ . De telles coordonnées s'appellent *coordonnées de Schwarzschild*<sup>3</sup>.

### 5.2.2 Système de Tolman-Oppenheimer-Volkoff

Par analogie avec la métrique de Schwarzschild (cf. cours de Jérôme Pérez), on définit la fonction  $m(r)$  par

$$A(r) =: \left( 1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r} \right)^{-1/2} . \quad (5.10)$$

On introduit également la fonction  $\varphi(r)$  par

$$N(r) =: \exp(\varphi(r)/c^2) . \quad (5.11)$$

A la limite non relativiste,  $m(r)$  est égal à la masse contenue dans la sphère de rayon  $r$  et  $\varphi(r)$  au potentiel gravitationnel newtonien. La résolution de l'équation d'Einstein se réduit alors à l'intégration du système différentiel suivant, dit *système de Tolman-Oppenheimer-Volkoff* (T.O.V.) :

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad (5.12)$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \left( 1 - \frac{2Gm}{c^2 r} \right)^{-1} \left( \frac{Gm}{r^2} + 4\pi G \frac{p}{c^2} r \right) \quad (5.13)$$

$$\frac{dp}{dr} = - \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) \frac{d\varphi}{dr} . \quad (5.14)$$

A la limite newtonienne, ce système se réduit aux équations de l'hydrostatique bien connues :

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad (5.15)$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{Gm}{r^2} \quad (5.16)$$

$$\frac{dp}{dr} = -\rho \frac{d\varphi}{dr} . \quad (5.17)$$

<sup>3</sup>Un autre choix de coordonnées, tout aussi acceptable, aurait été constitué par les *coordonnées isotropes*  $x^{\alpha'} = (t, \bar{r}, \theta, \phi)$  telles que  $g_{\alpha'\beta'} dx^{\alpha'} dx^{\beta'} = -N^2(\bar{r}) dt^2 + B^2(\bar{r}) [d\bar{r}^2 + \bar{r}^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]$ .

### 5.2.3 Approximation de matière froide catalysée

Afin d'intégrer le système T.O.V., il faut spécifier une relation entre  $p$  et  $\rho$ , c'est-à-dire une *équation d'état*. Or, un certain temps après leur formation (quelques heures à quelques semaines selon les modèles), les étoiles à neutrons se sont suffisamment refroidies pour que l'approximation de température nulle y soit excellente. De plus, au terme d'un temps suffisamment long toutes les réactions nucléaires sont à l'équilibre. On introduit à ce propos le concept de *matière froide catalysée au point final de l'évolution thermonucléaire* (Harrison, Thorne, Wakano & Wheeler 1965). Dans ces conditions toutes les variables d'état sont des fonctions d'un seul paramètre, que nous choisirons être la densité baryonique  $n$  dans le référentiel de la matière. Par exemple, pour un mélange de neutrons, protons et électrons à température nulle, la densité électronique  $n_e$  se déduit entièrement de la densité baryonique  $n$  par (i) la relation  $n = n_p + n_n$ , (ii) la condition de neutralité électrique  $n_p = n_e$  et (iii) par l'égalité des potentiels chimiques  $\mu_n = \mu_p + \mu_e$ , qui traduit l'équilibre des réactions nucléaires faibles du type  $n \rightleftharpoons p + e^-$ . On suppose donc

$$\rho = \rho(n) \quad \text{et} \quad p = p(n) . \quad (5.18)$$

On appelle *indice adiabatique* du fluide la dérivée logarithmique de  $p$  par rapport à  $n$  :

$$\gamma(n) = \frac{n}{p} \frac{dp}{dn} . \quad (5.19)$$

### 5.2.4 Intégration du système T.O.V.

En introduisant l'équation d'état (5.18), le système Tolman-Oppenheimer-Volkoff (5.12)-(5.14) devient

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(n) \quad (5.20)$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right)^{-1} \left(\frac{Gm}{r^2} + 4\pi G \frac{p(n)}{c^2} r\right) \quad (5.21)$$

$$\frac{dn}{dr} = -\frac{\rho(n) + p(n)/c^2}{p(n)} \frac{n}{\gamma(n)} \frac{d\varphi}{dr} . \quad (5.22)$$

D'après le Théorème de Cauchy, ce système différentiel d'ordre un en  $(m(r), \varphi(r), n(r))$  admet une unique solution vérifiant :

$$m(0) = 0, \quad \varphi(0) = \varphi_0 \quad \text{et} \quad n(0) = n_c . \quad (5.23)$$

La relation  $m(0) = 0$  est une condition de régularité du tenseur métrique à l'origine. De son côté, la constante  $\varphi_0$  est entièrement déterminée par le raccord à la métrique de Schwarzschild à l'extérieur de l'étoile, puisque en vertu du théorème de Birkhoff, la seule métrique à symétrie sphérique dans le vide est la métrique de Schwarzschild. Comme les coordonnées choisies coïncident avec les coordonnées de Schwarzschild dans le vide [cf.

Eq.(5.9)], la condition de continuité de la métrique au rayon  $r = R$  de la surface de l'étoile s'écrit, en vertu de la définition de  $\varphi$  :

$$\varphi(R) = \frac{1}{2} \ln \left( 1 - \frac{2Gm(R)}{c^2 R} \right) . \quad (5.24)$$

Puisque le système (5.20)-(5.22) ne détermine  $\varphi$  qu'à une constante additive près, on peut résoudre (5.20)-(5.22) en prenant par exemple  $\varphi_0 = 0$  et ensuite ajouter une constante à la solution  $\varphi(r)$  obtenue de manière à satisfaire (5.24), ce qui imposera la valeur de  $\varphi_0$ .

Ainsi, une fois spécifiée une équation d'état de la forme (5.18), il existe une, et une seule, solution  $(m(r), \varphi(r), n(r))$  du système Tolman-Oppenheimer-Volkoff ayant une densité baryonique centrale  $n_c$  donnée.

### 5.2.5 Quantités globales

Soit une configuration hydrostatique à symétrie sphérique (étoile) de rayon-coordonnées  $r = R$ , solution du système T.O.V. On définit la *masse-énergie totale* de l'étoile (également appelée *masse gravitationnelle*) par

$$M = \int_0^R \rho(r) 4\pi r^2 dr = m(R) , \quad (5.25)$$

où la deuxième égalité résulte de (5.12). En vertu de (5.24), à l'extérieur de l'étoile, la métrique est celle de Schwarzschild avec le coefficient  $1 - 2M/r$ . Cela signifie que, loin de l'étoile, à l'approximation newtonienne,  $M$  est sentie comme la "masse grave" du corps central; on peut par exemple mesurer sa valeur en appliquant la Troisième loi de Kepler à une particule test en orbite.

Le *nombre total de baryons* de l'étoile est

$$\mathcal{A} = \int_0^R A(r) n(r) 4\pi r^2 dr , \quad (5.26)$$

où  $n(r)$  est la densité baryonique propre du fluide. Cette quantité est la densité baryonique  $n(r)$  intégrée sur l'élément de volume  $dV = A(r) 4\pi r^2 dr$ . Ce dernier s'interprète de la manière suivante : considérons un observateur infiniment loin de l'étoile, là où l'espace est plat. Supposons-le muni d'un étalon de longueur (une règle). Déplaçons ensuite cet observateur avec sa règle à l'intérieur de l'étoile, à un rayon-coordonnées  $r$  fixé. A l'aide de sa règle, la distance qu'il mesure entre les points de coordonnées  $(r, \theta, \phi)$  et  $(r + dr, \theta, \phi)$  est  $dl_r = \sqrt{g_{rr}} dr = A(r) dr$ . De même, la distance qu'il mesure entre les points de coordonnées  $(r, \theta, \phi)$  et  $(r, \theta + d\theta, \phi)$  est  $dl_\theta = \sqrt{g_{\theta\theta}} d\theta = r d\theta$  et la distance qu'il mesure entre les points de coordonnées  $(r, \theta, \phi)$  et  $(r, \theta, \phi + d\phi)$  est  $dl_\phi = \sqrt{g_{\phi\phi}} d\phi = r \sin \theta d\phi$ . Les trois axes  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi)$  étant orthogonaux, le volume, mesuré par l'observateur, du cube défini par les trois éléments de longueur ci-dessus est donné par

$$d^3V = dl_r dl_\theta dl_\phi = A(r) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi . \quad (5.27)$$

Cet élément de volume intégré sur  $\theta$  et  $\phi$  donne le volume mesuré par l'observateur de la coquille située entre les rayons-coordonnées  $r$  et  $r + dr$  :

$$dV = A(r)4\pi r^2 dr . \quad (5.28)$$

Maintenant, par définition,  $n$  est la densité de baryons dans le référentiel du fluide. Puisque l'étoile est statique ce référentiel coïncide avec celui de l'observateur ci-dessus. Le nombre de baryons entre les deux coquilles est donc  $n(r)dV$  où  $dV$  est le volume (5.28), de sorte que le nombre total de baryons dans l'étoile est bien donné par l'intégrale (5.26).

Enfin remarquons que dans l'intégrale (5.25) donnant l'énergie, l'élément de volume n'est pas (5.28) mais l'élément "plat"  $4\pi r^2 dr$ . Si cela avait été (5.28), le même raisonnement que ci-dessus montre que  $M$  aurait représenté uniquement l'énergie interne (incluant l'énergie de masse) du fluide constituant l'étoile. Le fait que  $M$  contienne en plus l'énergie du champ gravitationnel se traduit donc par la présence, dans l'intégrale (5.25), de l'élément de volume "plat" et non de l'élément "physique" mesuré localement (5.28).

Le décalage spectral gravitationnel à la surface de l'étoile (effet Einstein, discuté au § 8 pour les naines blanches) est donné par le rapport des temps propres  $dt_s/dt_\infty$  d'un observateur à la surface de l'étoile à un celui d'un observateur au repos à l'infini. En utilisant la métrique (5.9), on obtient

$$z = \frac{\lambda_\infty - \lambda}{\lambda} = \frac{1}{N_s} - 1 \quad (5.29)$$

où, en vertu de l'Eq. (5.24), la valeur en surface du coefficient  $N$  vaut

$$N_s = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right)^{1/2} \quad (5.30)$$

On a donc

$$z = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right)^{-1/2} - 1. \quad (5.31)$$

## 5.3 Équation d'état

### 5.3.1 Des incertitudes...

Pour obtenir un modèle d'étoile à neutrons, il est nécessaire de connaître l'équation d'état (5.18) de la matière froide. Or, comme le montre la Fig. 5.4, l'état de la matière dense est très mal connu, à la fois expérimentalement et théoriquement, lorsque que la densité avoisine la densité du noyau d'un atome :  $n_{\text{nuc}} = 0.16 \text{ fm}^{-3}$ ,  $\rho_{\text{nuc}} = 2.6 \times 10^{17} \text{ kg m}^{-3}$ . Ce sont justement des densités de ce type et même supérieures ( $n_c \sim 10n_{\text{nuc}}$ ) que l'on peut attendre dans les étoiles à neutrons.

La difficulté théorique principale provient de ce que les interactions entre les particules qui constituent l'étoile sont dominées par *l'interaction nucléaire forte* et doivent

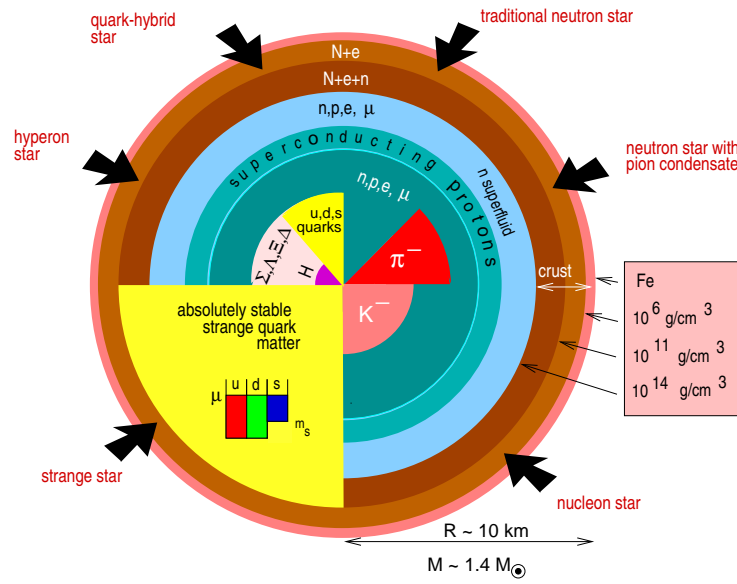


FIG. 5.4 – Différents modèles d'intérieurs d'étoiles à neutrons [d'après Weber (2001)].

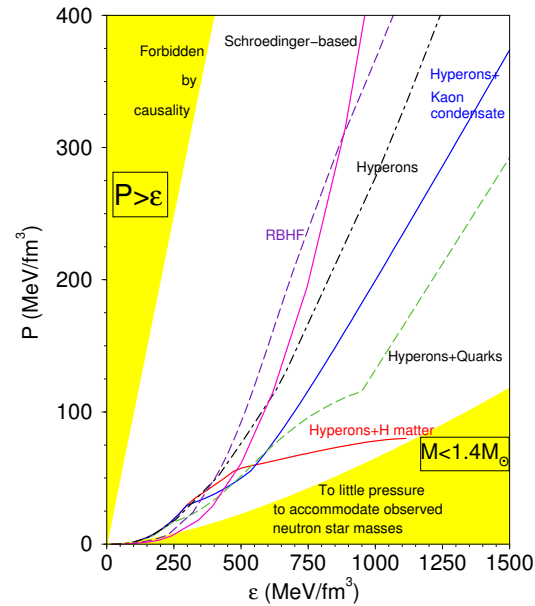


FIG. 5.5 – Différentes équations d'état  $p = p(\varepsilon)$  de la matière à haute densité.  $\varepsilon$  représente la densité d'énergie totale, notée  $\rho c^2$  dans le texte. La densité nucléaire correspond à  $\varepsilon \sim 140 \text{ MeV fm}^{-3}$  [d'après Weber (2001)].

donc être décrites par la *chromodynamique quantique*, théorie bien plus complexe que l'*électrodynamique quantique* utilisée dans l'étude des systèmes d'atomes. En particulier, l'interaction forte a des parties tensorielles et spin-orbite importantes, contrairement aux interactions atomiques qui sont bien représentées par un potentiel qui ne dépend que de la séparation  $r$  entre les atomes. De plus, l'interaction forte comporte d'importants termes à 3 corps et plus, ce qui signifie que l'énergie d'un système ne peut plus être écrite comme une somme de termes d'interaction à 2 corps. En outre, pour  $\rho > \rho_{\text{nuc}}$ , les effets relativistes deviennent importants et se traduisent par l'apparition dans le milieu de nouvelles particules, telles des mésons et des baryons lourds (hypérons). Pour  $\rho > 2 - 3\rho_{\text{nuc}}$ , la composition elle-même de la matière est mal connue (Fig. 5.4) : il pourrait soit s'agir d'une matière baryonique riche en hypérons, soit d'états plus exotiques comme un condensat de Bose de mésons  $\pi$  (pions) ou  $K$  (kaons), ou bien un plasma de quarks déconfinés (pour une revue cf. Haensel 1995 ou Prakash 1998). Certains auteurs ont même proposé que, bien avant la densité nucléaire, l'état fondamental de la matière soit formé de quarks  $s$  (*quarks étranges*)<sup>4</sup>. Lors de la formation d'une étoile à neutrons, la matière pourrait alors subir une transition de phase vers cet état de moindre énergie, donnant naissance à ce que l'on appelle des *étoiles étranges* (quartier en bas à gauche sur la Fig. 5.4).

D'un point de vue expérimental, la matière qui constitue les étoiles à neutrons est très mal connue car sa composition est différente de ce que l'on peut obtenir en laboratoire (accélérateur de particules) : le rapport neutrons/protons  $N/Z$  est bien plus élevé dans une étoile à neutrons (d'où son nom !) que celui que l'on peut obtenir sur Terre : pour les noyaux "riches" en neutrons produits dans les accélérateurs de particules,  $N/Z \simeq 1.5$  alors que dans une étoile à neutrons  $N/Z \simeq 10$ . De plus, les rares échantillons de matière ultra-dense produite sur Terre, comme par exemple dans les collisions d'ions lourds effectuées au GANIL à Caen, le sont à une température bien plus élevée (dissipation de l'énergie cinétique des projectiles) que celle de l'intérieur des étoiles à neutrons :  $\sim 10^{12}$  K contre  $\sim 10^7$  K. Ainsi les modèles semi-empiriques d'équation d'état où de nombreux paramètres sont ajustés à leurs valeurs expérimentales gardent une grande incertitude du fait de l'extrapolation de ces paramètres à des valeurs différentes de  $N/Z$  et de  $T$ .

### 5.3.2 État fondamental de la matière en fonction de la densité

Depuis le début des années 1970, de nombreux travaux ont été consacrés à l'équation d'état de la matière dense, en tentant de répondre à la question suivante : *quel est l'état fondamental (c'est-à-dire de moindre énergie) de la matière à une densité donnée ?* Quelques heures après l'effondrement gravitationnel qui leur a donné naissance (cf. § 5.6), les étoiles à neutrons se sont suffisamment refroidies (essentiellement par émission de neutrinos) pour que l'on puisse considérer que la matière s'y trouve dans son état fondamental. Pour les densités de la croûte cet état fondamental est relativement bien connu. Par contre, il n'en est pas de même pour l'intérieur de l'étoile ainsi que nous l'avons vu ci-dessus. Il en résulte une grande diversité d'équations d'état proposées dans la littérature (cf. Fig. 5.5). Cette diversité reflète notre ignorance et non des situations astrophysiques

<sup>4</sup>rappelons que les baryons ordinaires, protons et neutrons, sont formés de quarks  $u$  (up) et  $d$  (down) seulement.

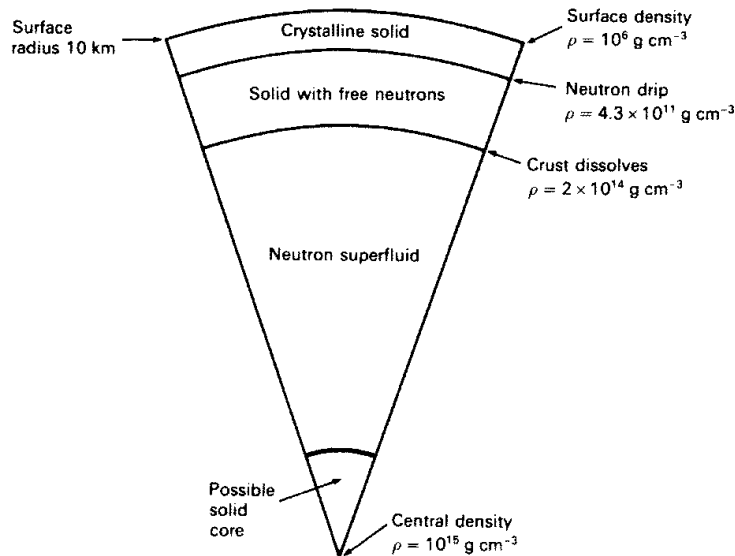


FIG. 5.6 – Coupe (schématique) d'une étoile à neutrons [d'après Lyne & Graham-Smith (1998)].

différentes. On peut quand même dresser le schéma suivant de la structure d'une étoile à neutrons :

- La *surface* ( $\rho < 10^9 \text{ kg m}^{-3}$ , épaisseur  $< 0.1 \text{ km}$ ) : une région où la température et le champ magnétique influencent beaucoup l'équation d'état.
- La *croûte externe* ( $10^9 \text{ kg m}^{-3} < \rho < \rho_{\text{drip}} = 4 \times 10^{14} \text{ kg m}^{-3}$ , épaisseur  $\sim 0.5 \text{ km}$ ) : une région solide dans laquelle un cristal de Coulomb de noyaux lourds coexiste en équilibre beta avec un gaz d'électrons dégénérés et relativistes.  $\rho_{\text{drip}}$  est la densité critique au delà de laquelle apparaissent des neutrons libres dans le milieu. Notons que d'après des études récentes, les noyaux pourraient ne pas former un cristal mais une structure amorphe (cf. Duncan 2004 pour une discussion).
- La *croûte interne* ( $4 \times 10^{14} \text{ kg m}^{-3} < \rho < \rho_{\text{nuc}} = 2.6 \times 10^{17} \text{ kg m}^{-3}$ , épaisseur  $\sim 1 \text{ km}$ ) : région constituée d'un cristal de noyaux riches en neutrons, d'un gaz de neutrons superfluides et d'un gaz d'électrons.  $\rho_{\text{nuc}}$  est de l'ordre de grandeur de la densité dans le noyau de l'atome.
- Le *liquide de neutrons* ( $\rho_{\text{nuc}} < \rho < \rho_{\text{cœur}}$ , épaisseur  $\sim 10 \text{ km}$ ), ne contenant plus de noyaux mais des neutrons superfluides et dans une moindre mesure ( $< 10\%$ ) des protons, également superfluides, et des électrons, non superfluides. Les protons sont également supraconducteurs.
- Le *cœur* ( $\rho > \rho_{\text{cœur}}$ , épaisseur : ?), dont l'existence est hautement spéculative, suivant s'il se produit un condensat de pions ou bien une transition hadron-quark au dessus d'une certaine valeur critique  $\rho_{\text{cœur}}$ .

Cette structure est représentée sur la Fig. 5.6.



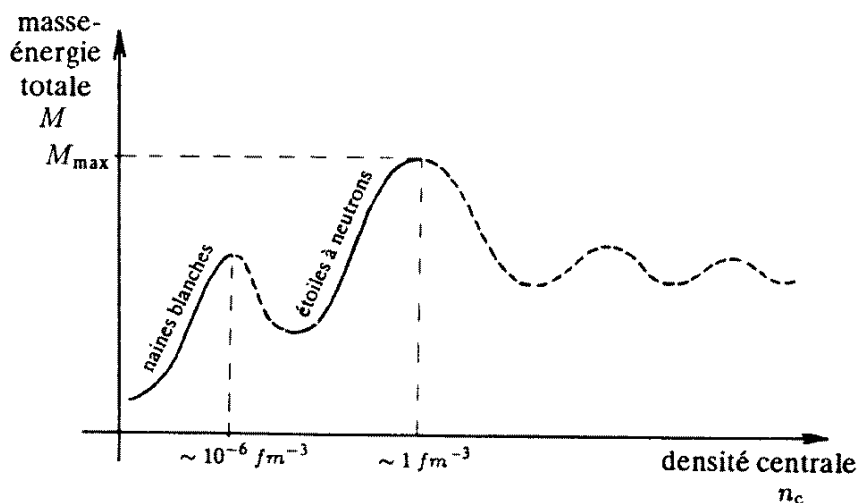


FIG. 5.7 — Masse-énergie totale  $M$  en fonction de la densité baryonique centrale  $n_c$ , pour une équation d'état donnée. Les branches en trait plein correspondent à des équilibres stables, celles en pointillés à des équilibres instables. Le premier maximum correspond aux naines blanches, le second aux étoiles à neutrons. Les maxima suivants sont purement théoriques puisque situés sur une partie instable de la courbe.

## 5.4 Masse maximale

### 5.4.1 Examen à partir des solutions du système T.O.V.

La propriété importante qui distingue *qualitativement* les équilibres hydrostatiques en relativité générale (obtenus par l'intégration du système T.O.V. présenté au §5.2) de leurs équivalents newtoniens est l'existence d'une *masse maximale*,  $M_{\max}$ , au delà de laquelle aucun équilibre n'est possible, et ce, quelle que soit la dureté de l'équation d'état de la matière. La valeur précise de  $M_{\max}$  dépend de l'équation d'état.

Rappelons que les équilibres hydrostatiques newtoniens sont stables si, et seulement si, l'indice adiabatique (5.19) est supérieur à  $4/3$  (cf. § 3.4). Pour une équation d'état dont l'indice adiabatique  $\gamma$  décroît vers  $4/3$  lorsque la densité tend vers l'infini — ce qui est le cas d'un gaz de Fermi dégénéré relativiste — la masse  $M$  des équilibres hydrostatiques newtoniens tend vers une valeur limite lorsque la densité centrale tend vers l'infini. Cette masse limite est appelée *masse de Chandrasekhar* et a été discutée au § 3.4. Si l'indice adiabatique reste toujours bien supérieur à  $4/3$  — ce qui est le cas d'une matière de neutrons en interaction forte — il n'y a, en régime newtonien, pas de limite théorique à la masse des équilibres hydrostatiques.

Dans le cas relativiste, même si  $\gamma$  est supérieur à  $4/3$ , il existe une masse maximale  $M_{\max}$ , qui est atteinte pour une certaine valeur critique,  $n_{\text{crit}}$ , de la densité centrale  $n_c$ . L'existence de  $M_{\max}$  a été montrée pour la première fois par Oppenheimer & Volkoff (1939) dans le cas spécifique d'un gaz de Fermi dégénéré de neutrons. Les équilibres hydrostatiques pour lesquels  $n_c < n_{\text{crit}}$  sont stables, ceux pour lesquels  $n_c > n_{\text{crit}}$ , instables. Le passage par  $n_{\text{crit}}$  se traduit par le développement du mode fondamental des oscillations

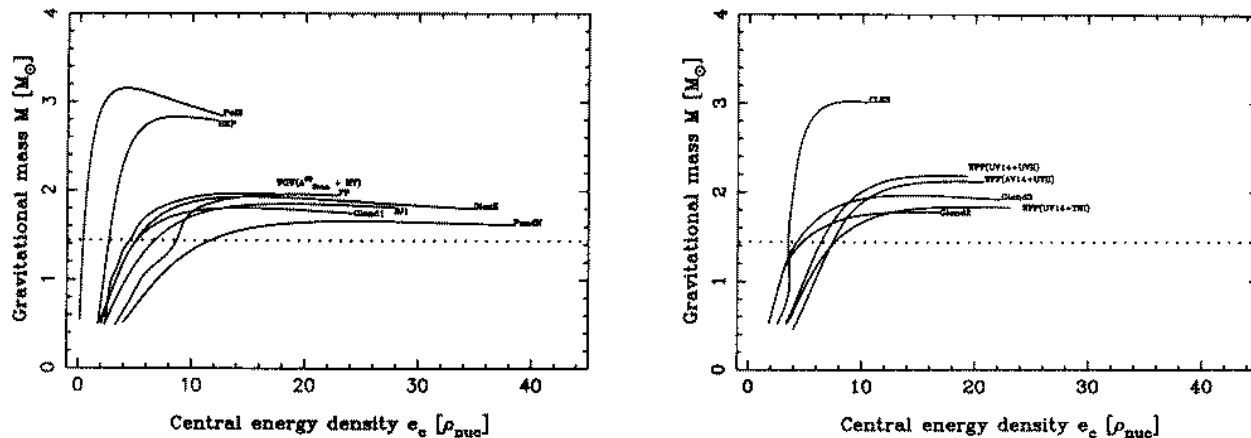


FIG. 5.8 – Masse-énergie totale  $M$  en fonction de la densité d'énergie centrale  $\rho_c$ , pour diverses équations d'état de la matière nucléaire. La ligne en pointillés correspond à la masse du pulsar binaire PSR B1913+16. [D'après Salgado et al. 1994].

radiales de l'étoile, qui se transforme en mouvement d'ensemble : c'est *l'effondrement gravitationnel* de l'étoile. La courbe  $M = M(n_c)$  est représentée schématiquement sur la Fig. 5.7, où l'on a figuré la position des naines blanches et des étoiles à neutrons.

Chaque équation d'état donne une certaine valeur de  $M_{\max}$ . Plus l'équation d'état est "dure" (i.e. plus l'indice adiabatique  $\gamma$  défini par (5.19) est élevé), plus  $M_{\max}$  est important. La Fig. 5.8 représente la masse gravitationnelle  $M$  en fonction de la densité centrale  $\rho_c$  obtenue en intégrant le système T.O.V. pour 14 équations d'état de la matière nucléaire. On constate que  $M_{\max}$  s'échelonne entre 1.6 et 3.1  $M_{\odot}$  et que la densité centrale correspondant à  $M_{\max}$  va de  $7 \times 10^{17}$  à  $4 \times 10^{18}$   $\text{kg m}^{-3}$ . On peut donc écrire

$$1.6 M_{\odot} \leq M_{\max} \leq 3.1 M_{\odot} \quad (\Omega = 0, \text{équations d'état "réalistes"}) \quad (5.32)$$

On peut se demander quelle serait la valeur de  $M_{\max}$  pour l'équation d'état la plus dure possible, équation d'état qui ne serait pas issue de calculs microphysiques détaillés comme celles de la Fig. 5.8 mais serait seulement déterminée par des principes premiers de la physique. Une limite physique est que la vitesse du son ne dépasse pas celle de la lumière. Or l'expression relativiste de la vitesse du son est la suivante

$$c_s = \left( \frac{dp}{d\rho} \right)^{1/2}, \quad (5.33)$$

de sorte que la contrainte dite de *causalité* s'écrit<sup>5</sup>

$$\left( \frac{dp}{d\rho} \right)^{1/2} \leq c. \quad (5.34)$$

<sup>5</sup>En fait,  $(dp/d\rho)^{1/2}$  ne représente que la *vitesse de phase* des ondes sonores et la causalité requiert plutôt que ce soit la *vitesse de groupe* qui soit sub-luminique. Dans un milieu très dispersif, la contrainte (5.34) n'est donc pas justifiée.

Si on suppose l'équation d'état connue en dessous d'une certaine densité critique  $\rho_0$  alors l'équation d'état la plus dure satisfaisant à la contrainte (5.34) a la forme (cf. Fig. 5.5)

$$p = (\rho - \rho_0)c^2 + p_0 \quad \text{pour } \rho \geq \rho_0, \quad (5.35)$$

où  $p_0$  est la valeur de la pression en  $\rho_0$  donnée par la partie connue de l'équation d'état. Rhoades & Ruffini (1974) et Hartle (1978) ont montré que l'équation d'état de la forme (5.35) conduit une masse maximale inversement proportionnelle à la racine carrée de la densité de transition  $\rho_0$  :

$$M_{\max} = 4.3 \left( \frac{\rho_{\text{nuc}}}{\rho_0} \right)^{1/2} M_{\odot} \quad (\Omega = 0, \text{ "causale"}); \quad (5.36)$$

rappelons que nous avons défini  $\rho_{\text{nuc}} := 2.6 \times 10^{17} \text{ kg m}^{-3}$ . Bien entendu, il faut se garder de faire  $\rho_0 \rightarrow 0$  dans (5.36) car on sait que l'équation d'état diffère énormément de la forme extrême pour  $\rho \lesssim 0.5\rho_{\text{nuc}}$ .

Si on relâche la contrainte (5.34),  $M_{\max}$  augmente et devient

$$M_{\max} = 7.1 \left( \frac{\rho_{\text{nuc}}}{\rho_0} \right)^{1/2} M_{\odot} \quad (\Omega = 0, \text{ non "causale"}). \quad (5.37)$$

### 5.4.2 Influence de la rotation

La discussion qui précède est basée sur les solutions du système T.O.V. et donc sur des modèles statiques à symétrie sphérique. On peut se demander dans quelle mesure  $M_{\max}$  est modifiée lorsque l'on prend en compte la rotation de l'étoile. Intuitivement la rotation devrait augmenter la masse des étoiles car les forces centrifuges viennent épauler la pression pour s'opposer à la gravitation.

Lorsque la rotation est suffisamment importante (période de rotation  $\sim 1$  ms), la forme de l'astre s'écarte notablement de la symétrie sphérique et seule la symétrie autour de l'axe de rotation est conservée (*symétrie axiale*). L'étude des configurations stationnaires axi-symétrique en relativité générale est basée sur les travaux de Papapetrou (1966) et Carter (1969, 1973) qui ont montré que, dans le cas où il n'existe pas, en plus du mouvement de rotation, de mouvement de convection méridienne, on peut choisir des coordonnées  $x^\alpha = (t, r, \theta, \phi)$  telles que les composantes du tenseur métrique s'écrivent

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -N^2 c^2 dt^2 + B^2 r^2 \sin^2 \theta (d\phi - N^\phi dt)^2 + A^2 (dr^2 + r^2 d\theta^2), \quad (5.38)$$

où les coefficients  $N$ ,  $N^\phi$ ,  $A$  et  $B$  sont des fonctions de  $(r, \theta)$  uniquement. Il convient de noter que, contrairement au cas statique (cf. Eq. (5.9)), la forme de la métrique (5.38) n'est pas diagonale.

Avec les coordonnées définies par (5.38), l'équation d'Einstein (5.8) se réduit à quatre équations aux dérivées partielles (E.D.P.) en  $(r, \theta)$ , quasi-linéaires, du second ordre et du type elliptique, pour les quatre fonctions  $N$ ,  $N^\phi$ ,  $A$  et  $B$ . L'intégration numérique de ce système d'E.D.P. est beaucoup moins immédiate que celle du système d'équations différentielles ordinaires de la symétrie sphérique (système T.O.V.). La discrétisation

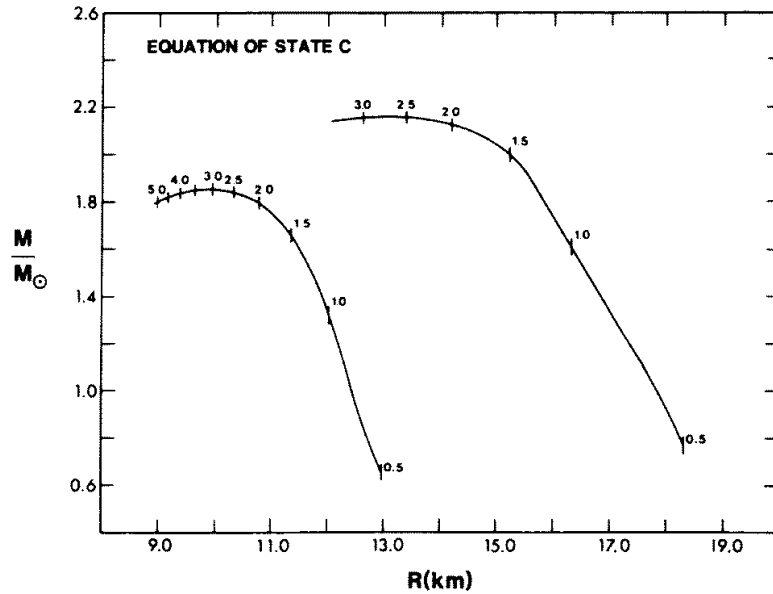


FIG. 5.9 — Relation entre la masse-énergie totale  $M$  et le rayon équatorial  $R$  pour l'équation d'état I de Bethe & Johnson (1974). La courbe la plus à gauche correspond au cas sans rotation (symétrie sphérique), celle la plus à droite au cas de la rotation maximale  $\Omega = \Omega_K$ . Sur chaque courbe, on a figuré la valeur de la densité centrale en unités de  $10^{18} \text{ kg m}^{-3}$ . [D'après Friedman et al. (1986)].

numérique se fait, soit à l'aide de méthodes aux différences finies, soit à l'aide de méthodes spectrales.

Si lors de sa formation, l'étoile à neutrons possédait une rotation différentielle, la viscosité de la matière uniformiserait assez rapidement la rotation. On peut donc considérer seulement le cas de la rotation rigide. Chaque solution dépend alors de deux paramètres : la densité centrale  $n_c$  et la vitesse angulaire de rotation,  $\Omega$ , telle que mesurée par un observateur au repos à l'infini. Pour chaque valeur de  $n_c$ , il existe une valeur maximale de  $\Omega$ ,  $\Omega_K$ , au delà de laquelle aucune configuration stationnaire n'existe. Le cas critique  $\Omega = \Omega_K$  correspond à l'égalité de la force de gravitation centripète et de la force d'inertie centrifuge sur l'équateur de l'étoile. Pour cette raison,  $\Omega_K$  est appelée *vitesse de rotation keplerienne* (cf. Fig. 5.13). Pour  $\Omega > \Omega_K$ , l'étoile perdrait de la matière à l'équateur. Pour une équation d'état donnée, il existe une masse maximale  $M_{\max}$ , obtenue pour  $\Omega \simeq \Omega_K$ .

La Fig. 5.9 compare les modèles statiques et les modèles à rotation keplerienne pour une équation d'état donnée : il est clair que la rotation augmente le rayon de l'étoile ainsi que la masse maximale, qui est atteinte pour une densité inférieure à celle du cas statique. Sur la Fig. 5.10 sont représentées, pour 14 équations d'état différentes, les masses gravitationnelles des étoiles à neutrons qui tournent à la vitesse keplerienne. En comparant les  $M_{\max}$  avec celles de la Fig. 5.8, on constate que l'augmentation due à la rotation est de l'ordre de 20 %.

Si on reprend l'équation d'état "causale" extrême (5.35), la masse maximale des étoiles

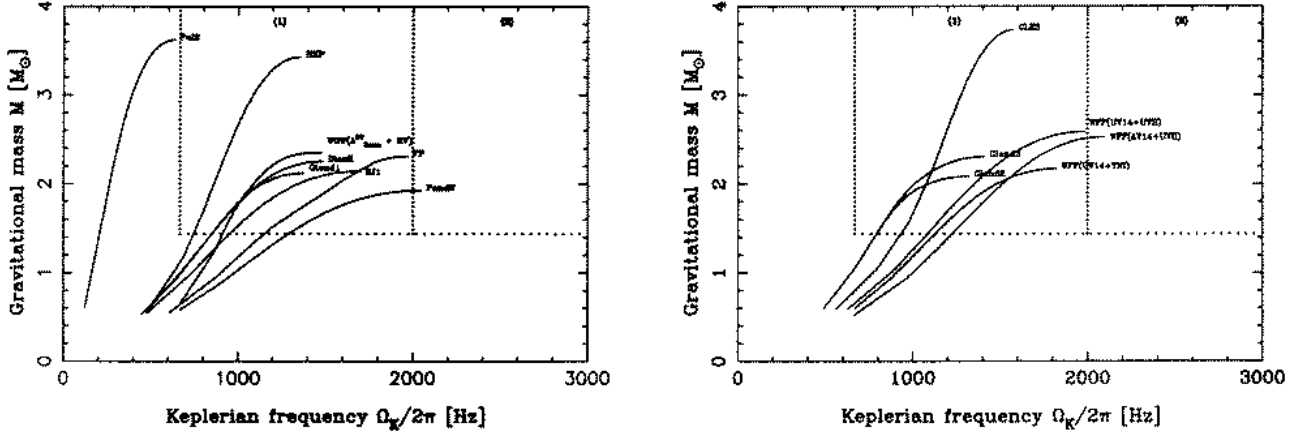


FIG. 5.10 – Masse-énergie totale  $M$  en fonction de la fréquence de rotation keplerienne  $\Omega_K/2\pi$  pour diverses équations d'état de la matière nucléaire. L'équation d'état notée B1 est celle de la Fig. 5.9. La ligne horizontale en pointillés correspond à la masse du pulsar binaire PSR B1913+16 et les lignes verticales en pointillés indiquent les fréquences (i, ligne de gauche) du pulsar milliseconde le plus rapide connu en janvier 1995, PSR B1937+21 ( $P = 1.56$  ms) et (ii, ligne de droite) d'un hypothétique pulsar de période  $P = 0.5$  ms. [D'après Salgado et al. 1994].

à neutrons en rotation devient (Friedman & Ipser 1987, Koranda et al. 1997)

$$M_{\max} = 5.2 \left( \frac{\rho_{\text{nuc}}}{\rho_0} \right)^{1/2} M_{\odot} \quad (\Omega \neq 0, \text{ "causale" }) . \quad (5.39)$$

La masse maximale en rotation obtenue en relâchant la contrainte de "causalité" (5.34) n'a pas été calculée.

### 5.4.3 Comparaison avec les masses mesurées

Les seules masses d'étoiles à neutrons mesurées à ce jour l'ont été dans des *systèmes binaires* : pulsars binaires ou binaires X.

#### Pulsars binaires

On connaît actuellement plus de 80 pulsars membres d'un système binaire dont six ont pour compagnon une deuxième étoile à neutrons, la majorité des autres ayant une naine blanche. Parmi les six pulsars binaires qui ont pour compagnon une étoile à neutrons, il y en a un, découvert très récemment, pour lequel le compagnon est également un pulsar : PSR J0737-3039 (Lyne et al. 2004). On parle alors de *pulsar double*. Outre leur intérêt pour tester la relativité générale en champ fort, les pulsars binaires permettent de mesurer la masse d'une étoile à neutrons. On obtient ainsi (Wolszczan 1997 et Weisberg & Taylor 2003) :

PSR	$P_{\text{pulsar}}$ [ms]	$P_{\text{orb}}$ [h]	$a_1 \sin i$ [km]	$e$	$M_{\text{pulsar}}$ [ $M_{\odot}$ ]	$M_{\text{compagnon}}$ [ $M_{\odot}$ ]	Notes/Réf.
B1913+16	59	7 h 45 min	$7.0 \cdot 10^5$	0.62	1.4408 (3)	1.3873 (3)	[1]
B1534+12	38	10 h 05 min	$1.2 \cdot 10^6$	0.27	1.3332 (10)	1.3452 (10)	[2]
B2127+11C	31	8 h 09 min	$7.6 \cdot 10^5$	0.68	1.344 (23)	1.374 (23)	[3]
J0737-3039	23; 2773	2 h 27 min	$4.2 \cdot 10^5$	0.09	1.337(5)	1.250 (5)	[4]
J1756-2251	28	7 h 40 min	$8.3 \cdot 10^5$	0.18	1.40 (3)	1.18 (3)	[6]
J1141-6545	393	4 h 44 min	$5.6 \cdot 10^5$	0.17	1.30 (2)	0.986 (20)	[5]
B1855+09	5.4	12.3 j	$2.8 \cdot 10^6$	0.00	1.503 (15)	0.262 (2)	
J1713+0747	4.6	68 j	$9.7 \cdot 10^6$	0.00	1.32 (5)	0.22 (2)	

[1] pulsar historique de Hulse & Taylor (Weisberg & Taylor 2003); [2] pulsar de Wolszczan (Stairs et al. 2002); [3] dans l'amas globulaire M 15; [4] pulsar double (Lyne et al. 2004); [5] Bailes et al. 2003; [6] Faulkner et al. 2005

$a_1 \sin i$  désigne la projection du demi-grand axe de l'orbite du pulsar sur le plan du ciel et  $e$  l'excentricité de cette orbite.

Les quatre premières lignes de ce tableau correspondent aux quatre systèmes doubles d'étoiles à neutrons actuellement connus dont le temps de coalescence est inférieur à l'âge de l'Univers. Il convient de noter la grande précision atteinte pour PSR B1913+16 et PSR B1534+12. PSR B1913+16 est ainsi, après le Soleil, l'étoile dont la masse est mesurée la plus précisément. Les compagnons de PSR J1141-6545, B1855+09 et PSR B1713+07 sont des naines blanches et non des étoiles à neutrons (cf. leur faible masse). Ces systèmes sont quasiment vu par la tranche, si bien que le retard Shapiro a pu y être mesuré.

Soulignons que c'est grâce aux effets relativistes (et donc en employant la relativité générale comme un outil) que les masses individuelles de ces étoiles à neutrons ont pu être mesurées. En effet, une analyse newtonienne des signaux reçus permet, en interprétant la modulation de la période du pulsar au cours d'une orbite comme un effet Doppler dû à la vitesse orbitale, de déterminer cinq paramètres du système, dit *paramètres kepleriens*. Ce sont la période orbitale  $P_b$ , l'excentricité de l'orbite  $e$ , la projection du demi-grand axe sur la ligne de visée  $a_1 \sin i$  ( $i$  étant l'angle entre la ligne de visée et la normale au plan orbital), la longitude du périastre  $\omega$  et un instant de passage au périastre  $t_0$ . A partir de ces paramètres, on peut former la *fonction de masse*

$$f = \frac{(a_1 \sin i)^3}{G} \left( \frac{2\pi}{P_b} \right)^2. \quad (5.40)$$

Par la troisième loi de Kepler,  $f$  est reliée aux masses  $M_1$  et  $M_2$  des deux étoiles :

$$f = \frac{(M_2 \sin i)^3}{(M_1 + M_2)^2}. \quad (5.41)$$

Ainsi les paramètres kepleriens ne déterminent qu'une composition des deux masses, composition qui de plus fait intervenir l'inclinaison du plan de l'orbite sur la ligne de visée, quantité inconnue a priori.

Les *paramètres post-keplériens* comprennent entre autres la variation de la période orbitale  $\dot{P}_b$  et l'avance du périastre  $\dot{\omega}$ . En utilisant la relativité générale on peut relier le premier à la perte d'énergie orbitale par rayonnement gravitationnel et le deuxième à la masse totale des étoiles (de même que l'avance du périhélie de Mercure est reliée à la masse du Soleil), selon

$$\dot{\omega} = \frac{3}{1 - e^2} \left( \frac{2\pi}{P_b} \right)^{5/3} \frac{G^{2/3}}{c^2} (M_1 + M_2)^{2/3} . \quad (5.42)$$

Des paramètres keplériens et du seul paramètre post-keplérien  $\dot{\omega}$  on déduit donc la somme des masses  $M_1$  et  $M_2$ . En mesurant un deuxième paramètre post-keplérien (notamment le paramètre noté  $\gamma$  lié à l'effet Doppler transverse et au décalage spectral gravitationnel causé par le compagnon du pulsar), on déduit alors les masses individuelles  $M_1$  et  $M_2$ . Une fois les masses obtenues, les autres paramètres post-keplériens mesurés permettent de tester la relativité générale. Ainsi on peut vérifier que la valeur de  $\dot{P}_b$  est bien celle qui correspond à la perte d'énergie par émission d'ondes gravitationnelles.

Dans le cas du pulsar binaire PSR B1913+16,  $\dot{\omega} = 4.23^\circ/\text{an}$ , valeur que l'on peut comparer aux  $43''/\text{siècle}$  de l'avance du périhélie de Mercure pour mesurer combien le pulsar binaire est un système relativiste par rapport au système solaire. Quant à la diminution de la période orbitale, elle vaut  $\dot{P}_b = -2.42 \times 10^{-12}$ , valeur qui coïncide à 3 pour mille avec celle donnée par l'émission d'ondes gravitationnelles en relativité générale. Cet accord remarquable constitue une preuve de l'existence des ondes gravitationnelles et a valu le Prix Nobel de Physique à Hulse et Taylor en 1993.

## Binaires X

Une binaire X est composée d'une étoile à neutrons qui accrète de la matière, via un disque, depuis une étoile compagnon non compacte. Parmi les binaires X se trouvent les *pulsars X* qui présentent un signal périodique, avec une période allant de  $\sim 0.1$  à  $\sim 10^3$  s, que l'on interprète comme une émission proche des pôles magnétiques d'une étoile à neutrons jeune. En général, les pulsars X appartiennent à des binaires X où le compagnon est une étoile massive de type O ou B (HMXRB pour *High Mass X-Ray Binary*). Cette étoile emplit son lobe de Roche et transfère de la matière à son compagnon compact par le point de Lagrange  $L_1$ . En raison de son moment cinétique, la matière forme un disque d'accrétion autour de l'étoile à neutrons. Cette dernière possède un champ magnétique important, de l'ordre de  $10^8 - 10^9$  T, si bien qu'à proximité de l'étoile, du gaz est arraché au disque et est canalisé le long des lignes de champ en direction des pôles magnétiques. C'est l'impact de ce plasma sur la croûte solide de l'étoile à neutrons qui provoque l'émission X. Il s'agit d'une émission thermique ( $T \sim 10^7$  K). On connaît actuellement une trentaine de pulsars X, parmi lesquels on peut citer Centaurus X-3 ( $P = 4.84$  s) et Hercules X-1 ( $P = 1.24$  s), dans lesquels on observe des éclipses, qui viennent confirmer qu'il s'agit bien d'un système binaire.

Contrairement aux pulsars binaires radio discutés au § 5.4.3, on observe dans les pulsars X à la fois le décalage Doppler du pulsar et celui de son compagnon, par les raies d'absorption du spectre optique de ce dernier (et ce d'autant plus facilement qu'il s'agit

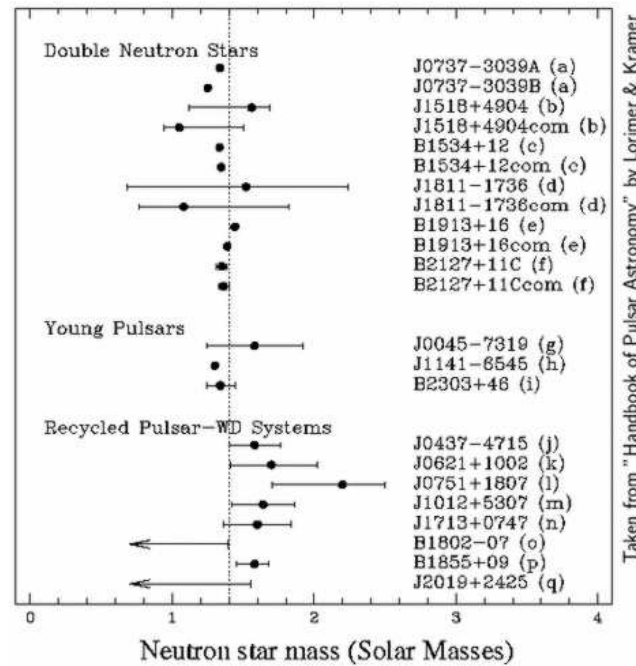


FIG. 5.11 – Masses de 23 étoiles à neutrons déduites d’observations de pulsars dans des systèmes binaires. La ligne verticale en pointillés correspond à  $1.4 M_{\odot}$  [d’après Stairs (2004)].

d’une étoile géante). Il n’est donc pas nécessaire de recourir aux effets relativistes, qui sont d’ailleurs très faibles étant donné la distance entre les deux composantes du système, pour mesurer les masses individuelles des deux étoiles. Le seul paramètre qui entre dans les formules newtoniennes qui déterminent  $M_1$  et  $M_2$  est l’inclinaison  $i$  du plan orbital par rapport à l’observateur. Cette dernière peut être estimée si des éclipses sont observées, en mesurant leur durée. Les résultats sont néanmoins moins précis que ceux du pulsar binaire PSR B1913+16, l’erreur sur la masse de l’étoile à neutrons étant en général supérieure à 20%.

## Bilan

La Fig. 5.11 rassemble les masses d’étoiles à neutrons mesurées dans les pulsars binaires radio. On constate que ces résultats ne permettent pas de discrimination parmi les équations d’état proposées pour la matière dense, puisque la plus petite valeur de  $M_{\max}$  des équations d’état issues de calculs de physique nucléaire est  $1.6 M_{\odot}$  (cf. § 5.4.1), ce qui est supérieur à toutes les valeurs mesurées dans les pulsars binaires radio et entre dans les barres d’erreur de tous les pulsars X. A titre d’anecdote, on peut néanmoins faire remarquer que les observations excluent l’hypothèse d’un gaz de Fermi de neutrons puisque, dans ce cas, le calcul historique d’Oppenheimer & Volkoff (1939) conduit à une masse maximale de  $0.7 M_{\odot}$  seulement ! Les masses mesurées des étoiles à neutrons démontrent donc que ce n’est pas le principe d’exclusion de Pauli qui s’oppose à la gravitation mais bel et bien une interaction entre les neutrons (l’interaction forte).



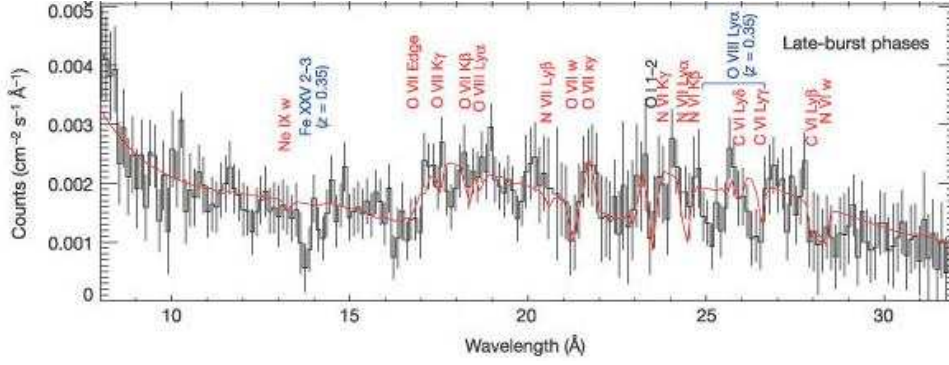


FIG. 5.12 – Spectre de l'étoile à neutrons dans la binaire X de faible masse EXO 0748-676, obtenu à l'aide du satellite XMM-Newton et ayant permis la mesure du décalage spectral spectral gravitationnel :  $z = 0.35$  [source : Cottam et al. 2002].

#### 5.4.4 Mesure du rapport $M/R$

Ainsi que nous l'avons mentionné au § 5.1.1, en 2002, des raies d'absorption ont pu être identifiées pour la première fois à la surface d'une étoile à neutrons (dans la binaire X EXO 0748-676) grâce au satellite XMM-Newton (cf. Fig. 5.12). Il s'agit de raies du fer et de l'oxygène fortement ionisés (Fe XXVI, Fe XXV et O VIII). Le décalage vers le rouge gravitationnel de ces raies est  $z = 0.35$  (Cottam et al. 2002), ce qui, en vertu de la relation (5.31) correspond au rapport  $M/R$  suivant

$$\Xi_{\text{EXO 0748-676}} = \frac{GM}{c^2 R} \Big|_{\text{EXO 0748-676}} = 0.23, \quad (5.43)$$

soit la relation masse-rayon suivante :

$$\frac{M}{1.4 M_{\odot}} = \frac{R}{9 \text{ km}}. \quad (5.44)$$

En 2004, des observations RXTE de flashes X d'origine thermonucléaire à la surface d'EXO 0748-676 ont permis de déterminer sa période de rotation :  $P = 22$  ms (Villarreal & Strohmayer 2004). La largeur des raies spectrales observées par XMM-Newton est compatible avec une telle période de rotation pourvu que le rayon de l'étoile soit compris entre 9.5 et 15 km, ce qui colle bien avec les modèles standard d'étoile à neutrons.

## 5.5 Vitesse de rotation maximale

### 5.5.1 Valeur théorique

Ainsi que nous l'avons vu au § 5.4.2, pour une équation d'état donnée, il existe une vitesse maximale de rotation  $\Omega_K$ , dite vitesse keplerienne, au delà de laquelle aucun équilibre n'est possible. Un modèle d'étoile tournant à  $\Omega_K$  est représenté sur la Fig. 5.13. Le point anguleux au niveau de l'équateur est la signature de  $\Omega_K$  : pour une vitesse supérieure de la matière s'échapperait des régions équatoriales.

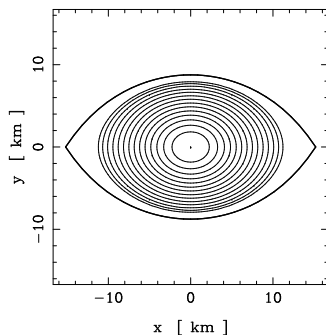


FIG. 5.13 – Coupe dans un plan méridien d’une étoile à neutrons de  $1.47 M_{\odot}$  construite à partir de l’équation d’état I de Bethe-Johnson (1974) (même équation d’état que celle de la Fig. 5.9) et tournant à la vitesse angulaire maximale  $\Omega_K$ . On a représenté les lignes isodensité  $\rho = \text{const}$ ; le trait épais marque la surface de l’étoile [d’après Salgado et al. (1994)].

$\Omega_K$  est d’autant plus grande que l’équation d’état est molle, car  $\Omega_K$  diminue lorsque le rayon de l’étoile augmente et les équations d’état molles sont celles qui donnent les plus petits rayons. Cependant l’équation d’état ne doit pas être trop molle pour pouvoir rendre compte de la masse  $M = 1.44 M_{\odot}$  du pulsar binaire PSR B1913+16 (§ 5.4.3). Tenant compte de cette contrainte, la limite théorique est alors obtenue pour un intérieur le plus dur possible (limite causale) et des couches externes les plus molles possibles. Elle vaut (Koranda et al. 1997) :

$$P_{\min} = 0.28 \text{ ms} . \quad (5.45)$$

La variation de  $\Omega_K$  en fonction de la masse de l’étoile et de l’équation d’état est représentée sur la Fig. 5.10.

### 5.5.2 Comparaison avec les vitesses observées

On a porté sur la Fig. 5.10 la valeur de la plus grande vitesse angulaire observée : il s’agit de celle du pulsar milliseconde PSR B1937 + 21 dont la période vaut  $P = 1.56 \text{ ms}$  (ligne verticale de gauche). On constate que pour des masses supérieures à  $\sim 1.0 M_{\odot}$ , toutes les équations d’état issues de la physique nucléaire autorise une telle vitesse de rotation. Ce n’est pas le cas de l’équation d’état Pol2 mais il s’agit d’une équation d’état artificielle (polytrophe  $\gamma = 2$ ) très dure à basse densité. Ainsi les périodes observées des pulsars ne permettent pas de discrimination entre les diverses équations d’état proposées. Ce ne serait plus le cas si on découvrait un pulsar avec une période de  $0.5 \text{ ms}$  (ligne verticale de droite sur la Fig. 5.10) : la plupart des équations d’état serait à éliminer ; seules subsisteraient les équations d’état notées PandN et WFF(AV14+UVII) et encore dans un domaine de masse bien particulier ( $\sim 2 M_{\odot}$ ). La recherche des pulsars millisecondes avec des périodes les plus courtes possible est donc potentiellement riche de retombées sur la physique des particules.

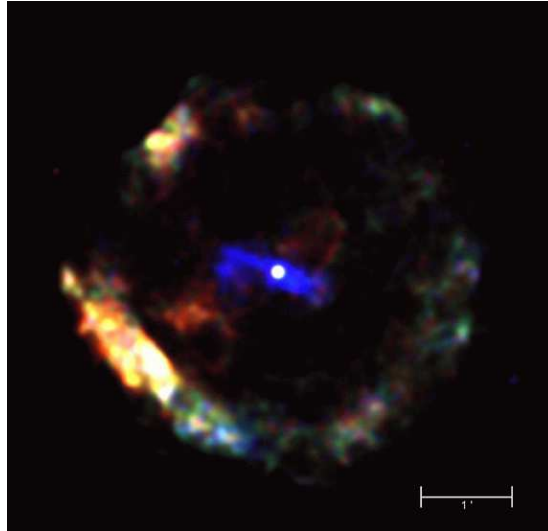


FIG. 5.14 – Image en X du reste G11.2-0.3 de la supernova de l’an 386, obtenue par le satellite Chandra. La source ponctuelle au centre est un pulsar X, de période 65 ms [d’après Kaspi et al. (2001)].

## 5.6 Formation et évolution des étoiles à neutrons

### 5.6.1 Effondrement gravitationnel

#### Supernova de type II

Le scénario standard de la formation d’une étoile à neutrons est l’effondrement gravitationnel du cœur d’une étoile massive (supernova de type II, Ib ou Ic), phénomène qui a été étudié au Chap. 4. Comme appui de ce scénario, on observe des pulsars dans 16 restes de supernova (Camilo 2003), les plus fameux étant le pulsar du Crabe dans le reste de SN 1054 et le pulsar de Vela<sup>6</sup>. Le plus rapide d’entre eux est celui découvert en 1998 à l’aide du satellite Rossi X-ray Time Explorer dans le reste de supernova N157B au sein du Grand Nuage de Magellan : sa période est de 16.1 ms (la moitié de celle du pulsar du Crabe). Récemment les observations X à haute résolution angulaire du satellite Chandra ont permis d’établir le lien entre un pulsar X (découvert en 1997 par le satellite ASCA) et le reste de la supernova de l’an 386 (cf. Fig. 5.14 et § 4.1.1). Chandra a également permis de découvrir un pulsar X (confirmé ensuite en radio) dans le reste de la supernova de l’an 1181 : PSR J0205+6449, de période  $P = 66$  ms (Murray et al. 2002).

Par ailleurs, une douzaine de neutrinos a été détectée en provenance de la supernova SN 1987A dans le Grand Nuage de Magellan (cf. § 4.4.4). Ces neutrinos ne prouvent cependant pas qu’une étoile à neutrons existe actuellement à l’endroit de la supernova car la “proto”-étoile à neutrons qui a émis les neutrinos a très bien pu s’effondrer en trou noir dans les secondes ou minutes qui ont suivi, si une bonne partie des couches externes n’a pas atteint la vitesse de libération et est retombée vers le centre.

<sup>6</sup>On connaît cependant environ 200 restes de supernova ; la plupart n’ont donc pas de pulsars détecté en leur sein

## Scénarios alternatifs

En dehors de l'effondrement du cœur d'une étoile massive en fin d'évolution, d'autres scénarios astrophysiques peuvent conduire à la formation d'étoiles à neutrons. Un exemple parfois proposé est un système binaire d'étoiles contenant une naine blanche qui accrète de la matière depuis un compagnon non compact. Lorsque la masse de la naine blanche atteint la masse de Chandrasekhar (cf. § 5.4.1), elle s'effondre et, à condition que cela n'entraîne pas l'explosion thermonucléaire de l'étoile (supernova de type I), une étoile à neutrons pourrait se former.

### 5.6.2 “Recyclage” des pulsars

Les pulsars millisecondes ( $P < 10$  ms) tournent trop vite pour avoir été formés dans un effondrement gravitationnel : un pulsar “tout juste” issu d'une supernova comme le pulsar du Crabe a une période supérieure ( $P = 33$  ms). De plus le champ magnétique des pulsars millisecondes est très faible, ce qui signifie qu'il s'agit d'objets âgés (le champ magnétique se dissipe au cours du temps en raison de la résistivité non nulle des étoiles à neutrons). On interprète actuellement les pulsars millisecondes comme de vieux pulsars qui auraient été “recyclés”, c'est-à-dire accélérés à un moment donné de leur existence. Cette accélération serait possible si le pulsar milliseconde a fait partie d'un système binaire. De fait plus de la moitié des pulsars millisecondes sont des pulsars binaires. On pense ainsi que les pulsars millisecondes sont issus de binaires X de faible masse (LMXRB). L'accrétion de matière sur l'étoile à neutrons s'accompagne aussi d'une accrétion de moment cinétique, d'où l'accélération du pulsar.

Ce scénario a été confirmé par la découverte en 1998 d'un pulsar X de période 2.5 ms (SAX J1808.4-3658) au sein d'une LMXRB (Wijnands & van der Klis 1998), suivie en 2002 de la découverte de deux autres pulsars X millisecondes : XTE J1751-305 ( $P = 2.3$  ms, Markwardt et al. 2002) et 4U 1636-53 ( $P = 1.7$  ms, Strohmayer & Markwardt 2002). Début 2005 a été annoncée la découverte du pulsar X accréant le plus rapide à ce jour : IGR J00291+5934, de période  $P = 1.67$  ms (Galloway et al. 2005). Il s'agit d'un objet découvert à l'aide du satellite INTEGRAL et dont la période de rotation a été établie à l'aide du satellite RXTE.

## Bibliographie

Pour plus de détails sur les étoiles à neutrons, on pourra consulter les monographies ou articles de revue suivants :

- **Théorie (aspects généraux) :**

Hartle J.B. 2003 : *Gravity, an introduction to Einstein's General Relativity*, Addison Wesley (San Fransisco)

Prakash M. 1998 : *Neutron stars*, in *Nuclear and particle astrophysics*, Eds. J.G. Hirsch & D. Page, Cambridge University Press (Cambridge)

Shapiro S.L., Teukolsky S.A. 1983 : *Black holes, white dwarfs and neutron stars*, John Wiley & Sons (New York)  
 Straumann N. 1984 : *General Relativity and relativistic astrophysics*, Springer-Verlag (Berlin)

• **Théorie (aspects plus spécialisés) :**

Blandford R.D., Hewish A., Lyne A.G., Mestel L. (eds.) 1993 : *Pulsars as physics laboratories*, Oxford University Press (Oxford)  
 Glendenning N.K. 1997 : *Compact stars*, Springer-Verlag (New York)  
 Harrison B.K., Thorne K.S., Wakano M., Wheeler J.A. 1965 : *Gravitation Theory and Gravitational Collapse*, University of Chicago Press (Chicago)  
 Haensel P. 1995 : *Recent progress in condensed matter physics*, dans *Physical processes in astrophysics, Lecture notes in physics* 458, eds. I.W. Roxburgh, J.L. Masnou. Springer-Verlag (Berlin)  
 Michel F.C. 1991 : *Theory of neutron star magnetospheres*, University of Chicago Press (Chicago)  
 Weber F. 1999 : *Pulsars as astrophysical laboratories for nuclear and particle physics*, Institute of Physics Publishing (Bristol)

• **Observations :**

Buccheri R., van Paradijs J., Alpar M.A. (eds.) 1998 : *The many faces of neutron stars*, Kluwer (Dordrecht)  
 Lorimer D.R. 2001 : *Binary and millisecond pulsars at the new millennium*, *Living Reviews in Relativity* **4**, 5, [<http://www.livingreviews.org/lrr-2001-5>]  
 Lorimer D.R., Kramer M. 2005 : *Handbook of pulsar astronomy*, Cambridge University Press (Cambridge) [<http://www.jb.man.ac.uk/~pulsar/handbook/>]  
 Lyne A.G., Graham-Smith F. 1998 : *Pulsar astronomy* (2nd edition), Cambridge University Press (Cambridge)

Autres références mentionnées dans le texte :

Bailes M., Ord S.M., Knight H.S., Hotan A.W. 2003 : *Self-consistency of relativistic observables with general relativity in the white dwarf-neutron star binary PSR J1141-6545*, *Astrophys. J.* **595**, L49  
 Bethe, H.A., Johnson, M.B. 1974 : *Dense baryon matter calculations with realistic potentials*, *Nucl. Phys. A* **230**, 1  
 Carter B. 1969 : *Killing horizons and orthogonally transitive groups in space-time*, *J. Math. Phys.* **10**, 70  
 Carter B. 1973 : *Black hole equilibrium states*, in *Black holes — Les Houches 1972*, Eds. C. DeWitt & B.S. DeWitt, Gordon & Breach (New York)  
 Camilo F. 2003 : *Deep searches for young pulsars*, in *Radio pulsars*, Eds. M. Bailes, D.J. Nice & S.E. Thorsett, *ASP Conf. Ser.* **302**  
 Cottam J., Paerels F., Mendez M. 2002 : *Gravitationally redshifted absorption lines in the X-ray burst spectra of a neutron star*, *Nature* **420**, 51  
 Duncan R.C. 2004 : *Triggers of magnetar outbursts*, dans *Cosmic explosions in three dimensions*, P. Höflich, P. Kumar, J.C. Wheeler (eds), Cambridge Univ. Press (Cambridge)  
 Faulkner A.J. et al. 2005 : *PSR J1756-2251 : A new relativistic double neutron star system*, *Astrophys. J.* **618**, L119  
 Friedman B., Pandharipande V.R. 1981 : *Nucl. Phys.* **A361**, 502  
 Friedman J.L, Ipser J.R. 1987 : *On the maximum mass of a uniformly rotating neutron star*, *Astrophys. J.* **314**, 594  
 Friedman J.L, Ipser J.R., Parker L. 1986 : *Rapidly rotating neutron star models*, *Astrophys. J.* **304**, 115  
 Galloway D.K. et al. 2005 : *Discovery of the accretion-powered millisecond X-ray pulsar IGR J00291+5934*, *Astrophys. J.*, sous presse [preprint : astro-ph/0501064]  
 Hartle J.B. 1978 : *Bounds on the mass and moment of inertia of non-rotating neutron stars*, *Phys. Rep.* **46**, 201  
 Hulse R.A., Taylor J.H. 1975 : *Discovery of a pulsar in a binary system*, *Astrophys. J.* **195**, L51  
 Kaspi V.M. et al. 2001 : *Chandra X-ray observations of G11.2-0.3 : implications for pulsar ages*, *Astrophys. J.* **560**, 371

- Koranda S., Stergioulas N., Friedman J.L. 1997 : *Upper limits set by causality on the rotation and mass of uniformly rotating relativistic stars*, *Astrophys. J.* **488**, 799
- Landau L.D., Lifchitz E.M. 1984 : *Physique statistique* (3ème édition), Mir (Moscou)
- Lyne et al. 2004 : *A double-pulsar system — A rare laboratory for relativistic gravity and plasma physics*, *Science* **303**, 1153
- Manchester R.N., Hobbs G.B., Teoh A., Hobbs M. 2005 : *The ATNF pulsar catalogue*, *Astron. J.*, sous presse [preprint : astro-ph/0412641]
- Markwardt C.B. et al. 2002 : *Discovery of a second millisecond accreting pulsar : XTE J1751-305*, *Astrophys. J.* **575**, L21
- Murray S.S., Slane P.O., Seward F.D., Ransom S.M., Gaensler B.M. 2002 : *Discovery of X-ray pulsations from the compact central source in the supernova remnant 3C 58*, *Astrophys. J.* **568**, 226
- Oppenheimer J.R., Volkoff G. 1939 : *On massive neutron cores*, *Phys. Rev.* **55**, 374
- Papapetrou A. 1966 : *Champs gravitationnels stationnaires à symétrie axiale* *Ann. Inst. H. Poincaré (Phys. Théorique)*, **A 4**, 83
- Rhoades C.E., Ruffini R. 1974 : *Maximum mass of a neutron star*, *Phys. Rev. Lett.* **32**, 324
- Salgado M., Bonazzola S., Gourgoulhon E., Haensel P. 1994 : *High precision rotating neutron star models*, *Astron. Astrophys.* **291**, 155
- Stairs I.H. 2004 : *Science* **304**, 547
- Stairs I.H., Thorsett S.E., Taylor J.H., Wolszczan A. 2002 : *Studies of the relativistic binary pulsar PSR B1534+12. I. Timing analysis*, *Astrophys. J.* **581**, 501
- Strohmayer T.E., Markwardt C.B. 2002 : *Evidence for a millisecond pulsar in 4U 1636-53 during a superburst*, *Astrophys. J.* **577**, 337
- Villarreal A.R., Strohmayer T.E. 2004 : *Discovery of the neutron star spin frequency in EXO 0748-676*, *Astrophys. J.* **614**, L121
- Walter F.M., Matthews L.D. 1997 : *The optical counterpart of the isolated neutron star RX J185635-3754*, *Nature* **389**, 358
- Walter F.M., Lattimer J.M. 2002 : *Astrophys. J.* **576**, L145
- Weber F. 2001 : *Strangeness in neutron stars*, *J. Phys. G* **27**, 465
- Weisberg J.M., Taylor J.H. 2003 : *The relativistic binary pulsar B1913+16*, in *Radio Pulsars*, Proc. of August 2002 meeting in Chania, Crete, Eds. M. Bailes, D.J. Nice & S.E. Thorsett, *ASP Conference Series* **302**, 93.
- Wijnands R., van der Klis M. 1998 : *A millisecond pulsar in an X-ray binary system*, *Nature* **394**, 344
- Wolszczan A. 1996 : *Planets around pulsars*, in *Compact stars in binaries*, Eds. J. van Paradijs, E.P.J. van den Heuvel, E. Kuulkers, Kluwer (Dordrecht)
- Wolszczan A. 1997 : *Relativistic binary pulsars*, in *Relativistic Gravitation and Gravitational Radiation*, Eds. J.-A. Marck, J.-P. Lasota, Cambridge University Press (Cambridge)

# Chapitre 6

## Accrétion dans les systèmes binaires

version 2004-2005

### Sommaire

---

6.1	Considérations énergétiques . . . . .	103
6.2	Systèmes binaires serrés . . . . .	106
6.3	Évolution du système binaire sous l'effet du transfert de masse	113
6.4	Application : preuve de l'existence des ondes gravitationnelles	116
6.5	Disques d'accrétion . . . . .	119

---

## 6.1 Considérations énergétiques

### 6.1.1 Luminosité d'accrétion

Ainsi que nous l'avons vu au § 1.2.1, l'énergie cinétique acquise par une particule de masse  $m$  qui tombe depuis l'infini sur un corps de masse  $M$  et de rayon  $R$  est (travail de la force de gravitation) :

$$E_{\text{cin}} = \frac{GMm}{R} . \quad (6.1)$$

Pour un flot continu de matière,  $dm = \dot{m} dt$ . Définissons alors la *luminosité d'accrétion* comme l'énergie cinétique gagnée par la matière accrétée par unité de temps :  $L_{\text{acc}} = dE_{\text{cin}}/dt$ . On obtient

$$L_{\text{acc}} = \frac{GM\dot{m}}{R} . \quad (6.2)$$

On peut faire apparaître dans cette formule le paramètre de relativité introduit au § 1.1 :  $\Xi = GM/(Rc^2)$  et écrire

$$\boxed{L_{\text{acc}} = \Xi \dot{m} c^2} . \quad (6.3)$$

De part sa définition, la luminosité d'accrétion est la puissance électromagnétique maximale que peut dégager l'accrétion. La formule (6.3) montre que, pour un taux d'accrétion

$\dot{m}$  donné, cette luminosité maximale ne dépend que du facteur de relativité de l'objet central.

Ainsi, pour une naine blanche,  $\Xi \sim 10^{-4}$  et (6.3) se traduit numériquement par

$$L_{\text{acc}}^{\text{NB}} \sim 10^{26} \text{ W} \left( \frac{\dot{m}}{10^{-10} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}} \right), \quad (6.4)$$

alors que pour une étoile à neutrons,  $\Xi \sim 0.2$  et

$$L_{\text{acc}}^{\text{EN}} \sim 10^{29} \text{ W} \left( \frac{\dot{m}}{10^{-10} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}} \right). \quad (6.5)$$

Pour un trou noir,  $\Xi \sim 1$ , mais l'énergie cinétique pourrait disparaître sous l'horizon, auquel cas  $L_{\text{acc}} = 0$ . Plutôt que (6.3), on pose donc, pour un trou noir,

$$L_{\text{acc}}^{\text{TN}} = \eta \dot{m} c^2, \quad (6.6)$$

où le paramètre  $\eta$  est appelé *efficacité de l'accrétion*. Cette efficacité est maximale si l'accrétion s'effectue en spirale par une succession d'orbites quasi-circulaires et varie de  $\eta = 0.057$  pour un trou noir de Schwarzschild jusqu'à  $\eta = 0.42$  pour un trou noir de Kerr en rotation maximale (Shapiro & Teukolsky 1983, § 14.5).

### 6.1.2 Luminosité d'Eddington

La luminosité effective d'un processus d'accrétion ne peut pas être arbitrairement grande : pour des luminosités importantes, la pression de radiation du rayonnement électromagnétique sortant entre en jeu et peut compenser entièrement la force de gravitation qui s'exerce sur la matière accrétée : le taux d'accrétion atteint alors son maximum, que l'on appelle *taux d'Eddington*. La luminosité correspondante s'appelle *luminosité d'Eddington*.

On peut calculer la luminosité d'Eddington comme suit. Supposons une accrétion à symétrie sphérique sur corps de masse  $M$  et de rayon  $R$ . La matière accrétée est un plasma protons-électrons. La densité d'impulsion du rayonnement électromagnétique est :

$$\frac{\mathbf{S}}{c^2} = \epsilon_0 \mathbf{E} \wedge \mathbf{B}, \quad (6.7)$$

où  $\mathbf{S}$  désigne le vecteur de Poynting (flux d'énergie électromagnétique). Tenant compte de la symétrie sphérique, la norme de  $\mathbf{S}$  est reliée à la luminosité totale  $L$  par

$$S = \frac{L}{4\pi r^2}, \quad (6.8)$$

où  $r$  est la distance au centre du corps accrétant.

L'interaction matière-rayonnement s'effectue principalement par le biais de la diffusion Thompson sur les électrons. L'impulsion moyenne reçue par un électron pendant un intervalle de temps  $dt$  est alors

$$d\mathbf{p}_{\text{em}} = \sigma_{\text{T}} c dt \frac{\mathbf{S}}{c^2}, \quad (6.9)$$



où  $\sigma_T = 6.7 \times 10^{-29} \text{ m}^2$  est la section efficace de diffusion Thompson. La force qu'exerce le rayonnement sur les électrons est donc, compte tenu de (6.8),

$$\mathbf{f}_{\text{em}} = \frac{d\mathbf{p}_{\text{em}}}{dt} = \frac{\sigma_T L}{4\pi c r^2} \mathbf{e}_r . \quad (6.10)$$

En raison de l'interaction électrostatique entre les protons et les électrons, on peut considérer que cette force est exercée, non pas sur un électron, mais sur une paire (électron, proton). Cette même paire (électron, proton) est soumise à la force gravitationnelle

$$\mathbf{f}_{\text{grav}} = -\frac{GM(m_p + m_e)}{r^2} \mathbf{e}_r . \quad (6.11)$$

La luminosité d'Eddington  $L_{\text{Edd}}$  est atteinte lorsque  $\mathbf{f}_{\text{em}} + \mathbf{f}_{\text{grav}} = 0$ .  $r^2$  s'élimine de cette équation et l'on obtient (en négligeant  $m_e$  devant  $m_p$ )

$$L_{\text{Edd}} = \frac{4\pi GM m_p c}{\sigma_T} . \quad (6.12)$$

La luminosité d'Eddington ne dépend donc que la masse du corps central. L'application numérique donne

$$L_{\text{Edd}} = 1.3 \times 10^{31} \text{ W} \left( \frac{M}{M_\odot} \right) . \quad (6.13)$$

En comparant avec la luminosité d'accrétion donnée par (6.5), on voit que pour une étoile à neutrons, le taux d'accrétion d'Eddington est

$$\dot{m}_{\text{Edd}}^{\text{EN}} = 10^{-8} M_\odot \text{ yr}^{-1} . \quad (6.14)$$

### 6.1.3 Domaine électromagnétique d'émission

Essayons à présent de voir dans quel domaine du spectre électromagnétique est rayonnée la luminosité d'accrétion considérée ci-dessus, en faisant l'hypothèse que toute la puissance (6.3) fournie par le champ gravitationnel se trouve à terme dissipée sous forme de rayonnement électromagnétique. On peut distinguer deux cas, suivant l'opacité de la matière accrétée près de l'objet compact :

#### Cas optiquement épais

Dans ce cas, l'essentiel du rayonnement se fait suivant la loi du corps noir :

$$L_{\text{acc}} = 4\pi R^2 \sigma T^4 , \quad (6.15)$$

où  $\sigma = \pi^2 k^4 / (60c^2 \hbar^3) = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$  est la constante de Stefan-Boltzmann. L'énergie moyenne d'un photon est alors, dans ce cas

$$\epsilon \sim kT \sim k \left( \frac{L_{\text{acc}}}{4\pi R^2 \sigma} \right)^{1/4} . \quad (6.16)$$

Pour une naine blanche,  $L_{\text{acc}} \sim 10^{26}$  W (en supposant un taux d'accrétion  $\dot{m} = 10^{-10}$  yr $^{-1}$ , cf. Eq. (6.4)) et  $R \sim 5000$  km, si bien que  $\epsilon \sim 5$  eV. Autrement dit, le domaine électromagnétique d'émission est l'optique.

Pour une étoile à neutrons,  $L_{\text{acc}} \sim 10^{29}$  W (en supposant un taux d'accrétion  $\dot{m} = 10^{-10}$  yr $^{-1}$ , cf. Eq. (6.5)) et  $R \sim 10$  km, si bien que  $\epsilon \sim 0.5$  keV. L'émission s'effectue donc plutôt dans le domaine des X mous.

### Cas optiquement mince

Dans ce cas, une estimation du domaine d'émission peut être obtenue en supposant que l'énergie cinétique acquise par un proton accrété est intégralement transmise à un seul photon. L'énergie de ce dernier est alors

$$\epsilon \sim \frac{GMm_p}{R} \sim \Xi m_p c^2 . \quad (6.17)$$

Pour une naine blanche ( $\Xi \sim 10^{-4}$ ), on obtient  $\epsilon \sim 100$  keV, ce qui situe l'émission dans le domaine des X. Pour une étoile à neutrons ( $\Xi \sim 10^{-1}$ ), si bien que  $\epsilon \sim 100$  MeV, ce qui situe l'émission dans le domaine gamma.

## 6.2 Systèmes binaires serrés

### 6.2.1 Nomenclature

On considère un système binaire formé d'un astre compact (naine blanche, étoile à neutrons ou trou noir) et d'une étoile "normale" (étoile sur la séquence principale ou géante rouge). Cette dernière sera qualifiée dans la suite de *compagnon* et les grandeurs la décrivant auront l'indice '2', l'indice '1' étant attribué à l'astre compact. Notons qu'un tel indiciage ne présuppose rien sur l'ordre des masses. On pourra avoir tout aussi bien  $M_2 < M_1$  — le système binaire étant alors dit de *faible masse* — que  $M_2 > M_1$  — le système binaire étant alors dit de *grande masse*. On notera

$$q := \frac{M_2}{M_1} . \quad (6.18)$$

Dire qu'un tel système binaire est *serré* signifie que le champ gravitationnel de l'astre compact a une influence appréciable sur la structure du compagnon.

D'un point de vue observationnel, les systèmes binaires serrés contenant un objet compact qui accrète de la matière du compagnon sont rangés en deux catégories :

- **variables cataclysmiques** : l'objet compact est une naine blanche ;
- **binaires X** : l'objet compact est une étoile à neutrons ou un trou noir.

### 6.2.2 Forme et taille des orbites

Dans le problème à deux corps, il est bien connu qu'à moment cinétique fixé, l'orbite qui minimise l'énergie est l'orbite circulaire. Ainsi tout mécanisme qui dissipe de l'énergie

plus vite que du moment cinétique conduit à une orbite circulaire. Un tel mécanisme dissipatif dans les systèmes binaires serrés est constitué par les forces de marées engendrées par l'astre compact sur son compagnon étendu. Un deuxième effet des forces de marées est de synchroniser la période de rotation du compagnon avec la période orbitale (cf. la Lune). Par contre, les forces de marées exercées par le compagnon sur l'objet compact sont minimales, étant donnée la faible extension de l'objet compact. Ce dernier a donc a priori une période de rotation sans rapport avec la période orbitale.

La séparation  $a$  entre les centres de masse des deux étoiles dépend de la période orbitale  $P$  suivant la troisième loi de Kepler :

$$a^3 = \frac{G(M_1 + M_2)}{\Omega^2} = G(M_1 + M_2) \frac{P^2}{4\pi^2} . \quad (6.19)$$

Cette relation suppose (i) la gravitation est newtonienne (i.e. non relativiste), (ii) les deux corps sont à symétrie sphérique. L'hypothèse (i) est très bonne car, même si l'objet compact est un trou noir, la distance entre les deux centres de masses ( $\sim 10^5$  km) est très grande devant le rayon de Schwarzschild ( $\sim 10$  km). L'hypothèse (ii) est également très bonne pour l'objet compact. Par contre, elle est plus discutable pour le compagnon, qui peut être appréciablement déformé par les forces de marées. La correction qu'il faudrait apporter à (6.19) est néanmoins très petite. Numériquement, (6.19) se traduit par

$$a = 1 \text{ UA} \left( \frac{M_1}{M_\odot} \right)^{1/3} (1+q)^{1/3} \left( \frac{P}{1 \text{ an}} \right)^{2/3} ; \quad (6.20)$$

$$a = 2.9 \times 10^6 \text{ km} \left( \frac{M_1}{M_\odot} \right)^{1/3} (1+q)^{1/3} \left( \frac{P}{1 \text{ j}} \right)^{2/3} ; \quad (6.21)$$

$$a = 3.5 \times 10^5 \text{ km} \left( \frac{M_1}{M_\odot} \right)^{1/3} (1+q)^{1/3} \left( \frac{P}{1 \text{ h}} \right)^{2/3} . \quad (6.22)$$

Il convient de remarquer que pour des périodes de quelques heures, la séparation est du même ordre de grandeur que la taille du compagnon, si ce dernier est une étoile sur la séquence principale.

### 6.2.3 Problème de Roche

Pour l'étude du système binaire, il est commode de se placer dans le référentiel en co-rotation, c'est-à-dire le référentiel où les centres de masses de  $M_1$  et  $M_2$  sont fixes. Un tel référentiel est en rotation à la vitesse  $\Omega = 2\pi/P$  par rapport à un référentiel inertiel, si bien que l'équation d'Euler s'y écrit

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi_1 - \nabla \Phi_2 , \quad (6.23)$$

où  $\mathbf{v}$  désigne la vitesse du fluide (matière du compagnon ou matière en écoulement vers l'astre compact) par rapport au référentiel en co-rotation,  $p$  la pression du fluide,  $\rho$  sa densité de masse,  $\Phi_1$  le potentiel gravitationnel de l'astre compact et  $\Phi_2$  celui du compagnon.

En regroupant tous les termes qui dérivent d'un potentiel (gravitation + accélération centrifuge), cette équation peut se réécrire

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + 2 \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi , \quad (6.24)$$

avec

$$\Phi := \Phi_1 + \Phi_2 - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r})^2 . \quad (6.25)$$

L'approximation de Roche consiste à considérer que les deux astres sont à symétrie sphérique, si bien que dans le vide, on peut écrire, en vertu du théorème de Gauss

$$\Phi_i = -\frac{GM_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \quad (i = 1, 2) , \quad (6.26)$$

où  $\mathbf{r}_1$  (resp.  $\mathbf{r}_2$ ) désigne la position du centre de masse de l'astre compact (resp. du compagnon). Ainsi que nous l'avons déjà dit, cette approximation est très bonne pour l'astre compact, mais plus discutable pour le compagnon. Elle sera néanmoins d'autant meilleure que la masse du compagnon est concentrée près de son centre, comme c'est le cas pour une étoile sur la séquence principale. Sous cette approximation, le potentiel  $\Phi$  donné par (6.25) peut être remplacé par le *potentiel de Roche*

$$\Phi_R(\mathbf{r}) := -\frac{GM_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} - \frac{GM_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r})^2 . \quad (6.27)$$

Ainsi le potentiel de Roche est la somme des potentiels gravitationnels des deux astres (réduits à une masse ponctuelle — théorème de Gauss) et du potentiel centrifuge. Les lignes iso-potentielles de  $\Phi_R$  dans le plan orbital sont représentées sur la Fig. 6.1. Une coupe suivant l'axe qui joint les centres de masse est représentée sur la Fig. 6.2. Il convient de noter que la forme des isopotentielles de  $\Phi_R$  ne dépend que du rapport de masse  $q$ . Choisissons en effet un repère  $(G, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  centré sur le centre de masse  $G$  du système et tel que  $\mathbf{e}_x$  soit le long de la ligne des centres de masses des deux corps et  $\mathbf{e}_z$  le long de l'axe de rotation. En posant  $X := x/a$ ,  $Y := y/a$  et  $Z := z/a$  et en utilisant (6.19), la relation (6.27) s'écrit

$$\Phi_R = -\frac{GM_1}{a} \left[ \frac{1}{\sqrt{(X - X_1)^2 + Y^2 + Z^2}} + \frac{q}{\sqrt{(X - X_2)^2 + Y^2 + Z^2}} + \frac{1}{2} (1 + q) (X^2 + Y^2) \right] . \quad (6.28)$$

Mis à par le facteur d'échelle  $GM_1/a$ , cette expression ne dépend clairement que de  $q$ .

Il existe cinq points où  $\nabla \Phi_R$  s'annule; ces points sont appelés *points de Lagrange* et notés  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$ ,  $L_4$  et  $L_5$ . Ils sont tous dans le plan orbital (cf. Fig. 6.1).  $L_1$  est un point selle, alors que  $L_4$  et  $L_5$  sont des maxima locaux<sup>1</sup>. Les isosurfaces  $\Phi_R(\mathbf{r}) = \Phi_R(L_1)$ ,  $\Phi_R(\mathbf{r}) = \Phi_R(L_2)$  et  $\Phi_R(\mathbf{r}) = \Phi_R(L_3)$  sont représentées respectivement sur les Figs. 6.3, 6.4 et 6.5.

<sup>1</sup>Bien que maxima du potentiel,  $L_4$  et  $L_5$  sont des points d'équilibre stables pour des masses  $M_1$  et  $M_2$  très différentes :  $q > 25$  ou  $q < 0.04$ , car la force de Coriolis tend alors à ramener vers  $L_4$  ou  $L_5$  toute particule qui s'en écarterait. Ce sont d'ailleurs aux points de Lagrange  $L_4$ - $L_5$  du système Soleil-Jupiter que l'on trouve les astéroïdes troyens.

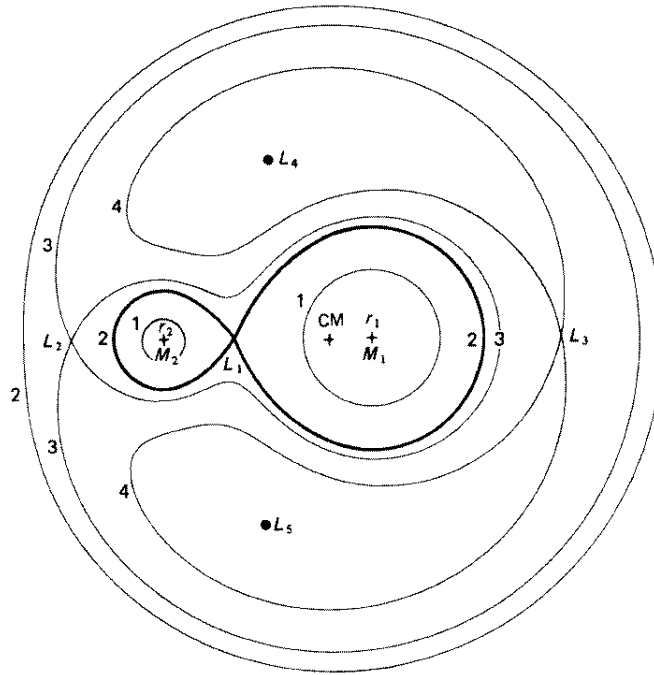


FIG. 6.1 – Lignes de niveau du potentiel de Roche dans le plan orbital pour un système binaire avec un rapport de masse  $q = 0.2$ . Les lobes de Roches sont marqués en trait gras [d'après Frank et al. (1992)].

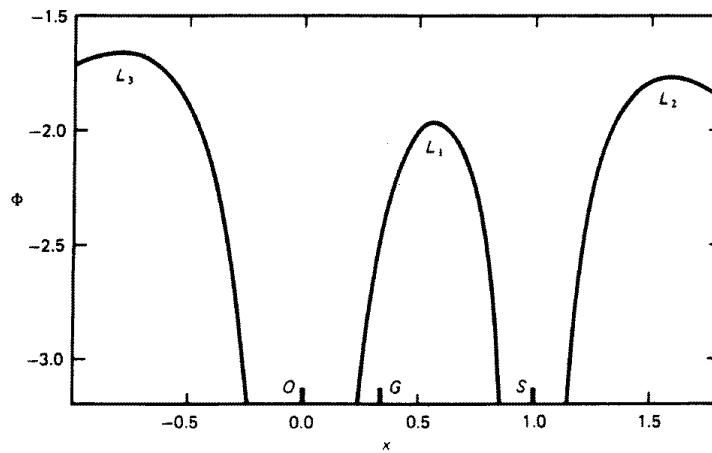


FIG. 6.2 – Potentiel de Roche le long de l'axe qui joint les centres de masse, dans le cas où le rapport de masse est  $q = 0.5$ .

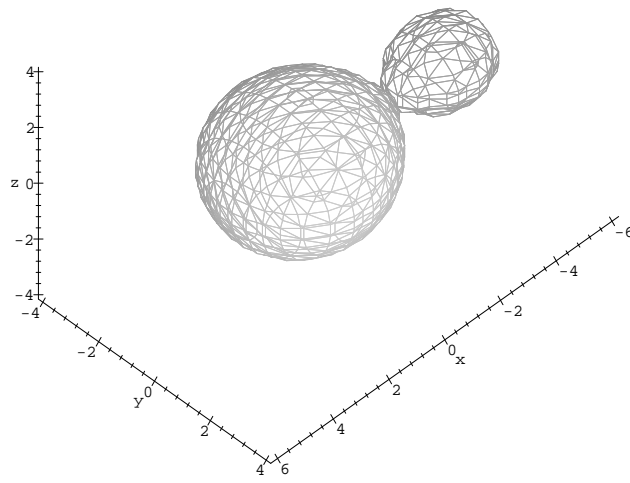


FIG. 6.3 – Isosurface du potentiel de Roche correspondant à la valeur au point de Lagrange  $L_1$  (lobes de Roche).

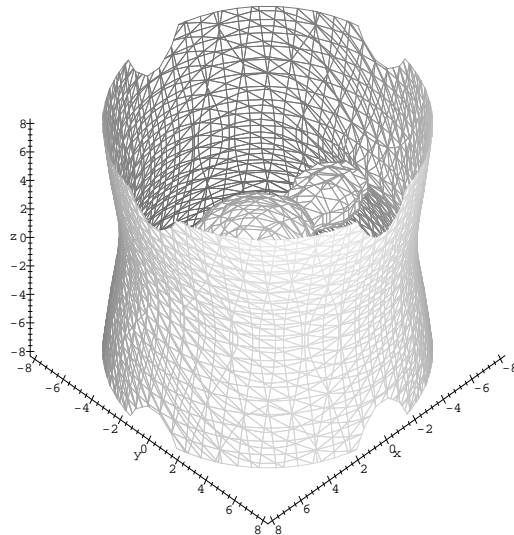


FIG. 6.4 – Isosurface du potentiel de Roche correspondant à la valeur au point de Lagrange  $L_2$ .

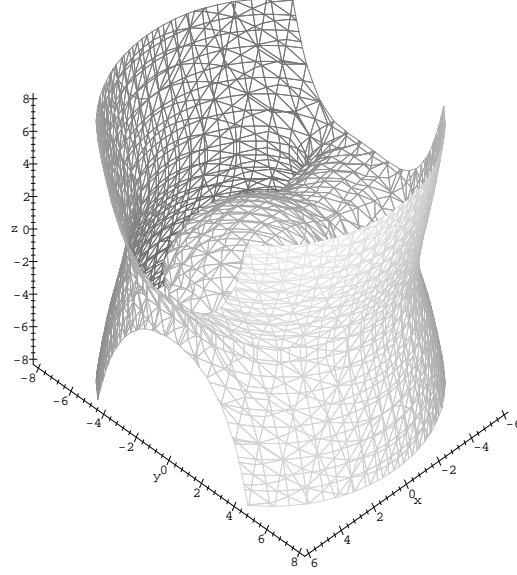


FIG. 6.5 – Isosurface du potentiel de Roche correspondant à la valeur au point de Lagrange  $L_3$ .

Le compagnon étant en rotation synchrone (cf. § 6.2.2), le fluide qui le compose vérifie  $\mathbf{v} = 0$ , si bien que l'équation d'Euler (6.24) se réduit à

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = -\nabla \Phi_R . \quad (6.29)$$

On en déduit immédiatement que les surfaces iso-pression du compagnon coïncident avec les isosurfaces du potentiel de Roche. En particulier, la surface du compagnon ( $p = 0$ ) doit être une équipotentielle de  $\Phi_R$ . Examinons donc ces équipotentielles en détail. Près d'un des deux astres, elles ont une topologie sphérique, centrée sur l'astre, car  $\Phi_R$  est dominé par le potentiel gravitationnel de l'astre en question. Lorsqu'on s'éloigne, on atteint la première équipotentielle connexe qui entoure les deux corps ; elle passe par  $L_1$  et constitue ce que l'on appelle les *lobes de Roche* (cf. Figs. 6.1 et 6.3). Au delà, les équipotentielles prennent une forme relativement compliquée (cf. Fig. 6.4 et 6.5). A grande distance du système binaire, les équipotentielles deviennent cylindriques,  $\Phi_R$  étant alors dominé par le potentiel centrifuge.

Suivant la position de chaque corps par rapport à son lobe de Roche, trois cas peuvent se produire :

1. chaque astre est bien en deça de son lobe de Roche ; le système est dit *détaché* ; c'est le cas de binaires éloignées et de la majorité des binaires X de grande masse ;
2. un des deux astres emplit son lobe de Roche ; le système est dit *semi-détaché* ; c'est le cas des variables cataclysmiques, des binaires X de faible masse et de certaines binaires X de grande masse ;
3. les deux astres emplissent leur lobe de Roche ; le système est dit *en contact* ; un exemple est constitué par la binaire W UMa. Un tel cas n'est pas possible lorsque l'un des deux composants est un astre compact, vu la taille des lobes de Roche.

La taille du lobe de Roche de l'astre no.  $i$  est mesurée par le rayon  $R_i$  de la sphère qui aurait le même volume que le lobe de Roche. Une valeur approchée de ce rayon est donnée par la formule de Paczyński (1971), valable pour  $0 < q < 0.8$  :

$$R_2 \simeq \beta a \left( \frac{q}{1+q} \right)^{1/3} \quad \beta := \frac{2}{3^{4/3}} \simeq 0.462 . \quad (6.30)$$

On peut calculer la densité moyenne du compagnon lorsqu'il remplit son lobe de Roche par  $\bar{\rho}_2 = M_2/(4\pi R_2^3/3)$ . En vertu de la formule ci-dessus et de la troisième Loi de Kepler (6.19), on obtient

$$\bar{\rho}_2 = \frac{3\pi}{\beta^3 GP^2} , \quad (6.31)$$

c'est-à-dire

$$\bar{\rho}_2 = 1.1 \times 10^5 \text{ kg m}^{-3} \left( \frac{1 \text{ h}}{P} \right)^2 . \quad (6.32)$$

Si le compagnon est sur la séquence principale ( $\bar{\rho}_2 \sim 10^3 - 10^4 \text{ kg m}^{-3}$ ), il remplit donc son lobe de Roche pour des périodes orbitales de quelques heures.

#### 6.2.4 Transfert de masse via le point de Lagrange $L_1$

Considérons le cas où le compagnon emplit son lobe de Roche (système semi-détaché). La surface du compagnon est alors en contact avec le point de Lagrange  $L_1$ . Étant donné qu'il s'agit d'un point selle (maximum de  $\Phi_R$  suivant la direction qui relie les deux astres et minimum de  $\Phi_R$  dans la direction perpendiculaire), de la matière peut s'échapper par  $L_1$  en direction de l'astre compact et entrer dans le lobe de Roche de ce dernier. Il est facile de voir qu'elle est alors piégée dans le lobe de Roche de l'astre compact (cf. Fig. 6.6). En effet, l'ordre de grandeur de la vitesse de "chute" vers l'objet compact étant la vitesse orbitale  $\Omega a$ , cette vitesse est supersonique, si bien que l'on peut négliger les effets de pression et réécrire l'équation d'Euler (6.24) comme

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v} = -\nabla\Phi_R . \quad (6.33)$$

On déduit de cette équation une intégrale première du mouvement,

$$\frac{v^2}{2} + \Phi_R = \text{const} , \quad (6.34)$$

appelée *intégrale de Jacobi*. La constante est déterminée par l'approximation  $\mathbf{v} \simeq 0$  au point  $L_1$ . Puisqu'en tout point du lobe Roche,  $\Phi_R = \Phi_R(L_1)$ , on déduit de l'intégrale de Jacobi que chaque fois que la particule remonte le potentiel  $\Phi_R$ , elle atteint le lobe de Roche avec une vitesse nulle et ne peut donc pas s'échapper.



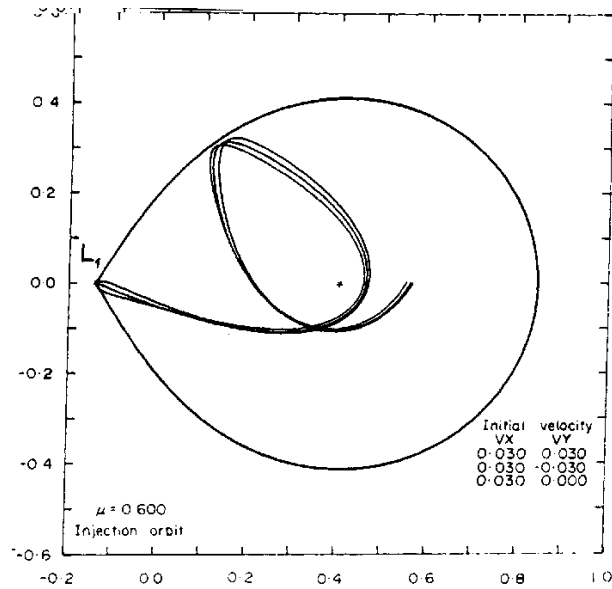


FIG. 6.6 – Trajectoires autour de l'objet compact de particules test ayant une faible vitesse initiale au point de Lagrange  $L_1$  [d'après Flannery (1975)].

## 6.3 Évolution du système binaire sous l'effet du transfert de masse

Le transfert de masse du compagnon vers l'objet compact peut s'effectuer sous deux formes :

- soit par remplissage du lobe de Roche et débordement au point de Lagrange  $L_1$  (§ 6.2.4) ;
- soit par vent stellaire, lorsque le compagnon est une étoile massive et/ou animée de rotation rapide (ex : étoile de type Be).

La diminution de  $M_2$  et l'augmentation de  $M_1$  qui en résultent modifient la dynamique du système, suivant des lois que nous allons établir ci-après.

### 6.3.1 Évolution de la séparation et des lobes de Roche

Il est raisonnable de supposer que la masse totale du système se conserve (ce n'est pas tout à fait vrai en cas de fort vent stellaire du compagnon) :

$$M = M_1 + M_2 = \text{const.} \quad (6.35)$$

Par ailleurs, on peut négliger les moments cinétiques de rotation des deux composantes sur elles-mêmes devant leurs moments cinétiques orbitaux et écrire que le moment cinétique total du système par rapport à l'axe de rotation est

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_1^{\text{orb}} + \mathbf{J}_2^{\text{orb}} . \quad (6.36)$$

La norme de  $\mathbf{J}$  est donc

$$J = M_1 a_1^2 \Omega + M_2 a_2^2 \Omega, \quad (6.37)$$

avec  $a_1 = a M_2/M$  et  $a_2 = a M_1/M$ , si bien que

$$J = a^2 \Omega \frac{M_1 M_2}{M}. \quad (6.38)$$

En utilisant la troisième Loi de Kepler (6.19), il vient

$$J = M_1 M_2 \sqrt{\frac{G a}{M}}. \quad (6.39)$$

Dérivons cette relation par rapport au temps :

$$\frac{\dot{J}}{J} = \frac{\dot{M}_1}{M_1} + \frac{\dot{M}_2}{M_2} + \frac{1}{2} \frac{\dot{a}}{a}, \quad (6.40)$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$\frac{\dot{a}}{a} = -2 \frac{(-\dot{J})}{J} + 2 \frac{(-\dot{M}_2)}{M_2} (1 - q). \quad (6.41)$$

Par ailleurs, en dérivant la relation de Paczyński (6.30), on obtient une équation pour l'évolution de la taille du lobe de Roche du compagnon :

$$\frac{\dot{R}_2}{R_2} = \frac{\dot{a}}{a} + \frac{1}{3} \frac{\dot{M}_2}{M_2}. \quad (6.42)$$

En combinant avec (6.41), il vient

$$\frac{\dot{R}_2}{R_2} = -2 \frac{(-\dot{J})}{J} + 2 \frac{(-\dot{M}_2)}{M_2} \left( \frac{5}{6} - q \right). \quad (6.43)$$

### 6.3.2 Nécessité d'une perte de moment cinétique

Supposons dans un premier temps que le système binaire ne perd pas de moment cinétique :  $\dot{J} = 0$ . Les équations (6.41) et (6.43) conduisent alors à

$$\dot{a} \leq 0 \iff q \geq 1 \quad (6.44)$$

$$\dot{R}_2 \leq 0 \iff q \geq \frac{5}{6} \simeq 0.83. \quad (6.45)$$

Deux cas se présentent donc :

1. **binaire de grande masse** :  $q \geq 1$  : l'accrétion se traduit alors par une diminution de la séparation et de la taille du lobe de Roche. La contraction du lobe de Roche "épluche" le compagnon : le transfert s'auto-entretient et peut même s'emballer jusqu'à l'inversion du rapport de masse.

2. **binaire de faible masse** :  $q \leq 5/6 \sim 1$  : l'accrétion se traduit alors par une augmentation de la séparation et de la taille du lobe de Roche. Cette dilatation du lobe de Roche conduit à la perte de contact du compagnon avec son lobe de Roche et à l'arrêt du transfert par  $L_1$ .

En conclusion, le transfert dans une binaire de faible masse n'est possible que si le système perd du moment cinétique<sup>2</sup>.

Il existe essentiellement deux mécanismes de perte de moment cinétique :

- **effet Schatzman** : il s'agit du couplage du vent stellaire avec le champ magnétique du compagnon. Les particules chargées qui quittent une étoile magnétisée en rotation sont en effet astreintes à se déplacer le long des lignes de champ magnétique et donc à être en co-rotation avec l'étoile (du moins, au voisinage de celle-ci), c'est-à-dire à avoir une vitesse *angulaire* constante au fur et à mesure qu'elles s'éloignent. Elles emportent donc beaucoup plus de moment cinétique que si leur vitesse angulaire diminuait en s'éloignant de l'étoile.
- **rayonnement gravitationnel** : il s'agit-là d'un mécanisme à l'œuvre dans tous les systèmes binaires, mais il n'est réellement effectif que dans les binaires serrées (grandes vitesses orbitales).

### 6.3.3 Prise en compte de la structure interne du compagnon

Plaçons-nous dans le cas où le compagnon remplit son lobe de Roche. Supposons qu'il obéit à une relation masse-rayon du type

$$R_2 = \alpha M_2^\zeta . \quad (6.46)$$

Deux cas peuvent notamment être envisagés :

- pour une étoile sur la séquence principale,  $\zeta \simeq 1$  et  $\alpha = R_\odot/M_\odot = 3.5 \times 10^{-22} \text{ m kg}^{-1}$  ;
- pour un polytrope d'indice adiabatique  $\gamma$ ,  $\zeta = (\gamma - 2)/(3\gamma - 4)$  [cf. Eq. (3.24)]. En particulier pour une étoile dégénérée de faible masse,  $\gamma = 5/3$  et  $\zeta = -1/3$ .

En dérivant (6.46) par rapport au temps, il vient

$$\frac{\dot{R}_2}{R_2} = \zeta \frac{\dot{M}_2}{M_2} , \quad (6.47)$$

ce qui, une fois reporté dans (6.43), conduit à une relation entre le taux de transfert de masse et le taux de perte de moment cinétique :

$$\frac{(-\dot{M}_2)}{M_2} = \frac{1}{\frac{5}{6} + \frac{\zeta}{2} - q} \frac{(-\dot{J})}{J} . \quad (6.48)$$

On peut reporter cette dernière relation dans (6.41) pour obtenir la variation de la séparation orbitale en fonction du taux de perte de moment cinétique :

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{\frac{1}{3} - \zeta}{\frac{5}{6} + \frac{\zeta}{2} - q} \frac{(-\dot{J})}{J} . \quad (6.49)$$

<sup>2</sup>Le transfert par vent stellaire n'est pas effectif dans les binaires de faible masse, puisque par définition, le compagnon n'est pas une étoile massive.

Par ailleurs, en combinant la relation densité moyenne-période (6.31) (où l'on remplace  $\bar{\rho}_2$  par  $M_2/(4\pi R_2^3/3)$ ) avec la relation masse-rayon (6.46), on obtient une relation masse du compagnon - période orbitale :

$$M_2 = \left( \frac{\beta^3 G}{4\pi^2 \alpha^3} \right)^{\frac{1}{3\zeta-1}} P^{\frac{2}{3\zeta-1}} . \quad (6.50)$$

Dans le cas  $\zeta = 1$  (étoile sur la séquence principale), cette relation devient

$$M_2 = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{G\beta^3}{\alpha^3} \right)^{1/2} P \quad (\zeta = 1) , \quad (6.51)$$

alors que dans le cas  $\zeta = -1/3$  (étoile dégénérée de faible masse), elle s'écrit

$$M_2 = 2\pi \left( \frac{\alpha^3}{G\beta^3} \right)^{1/2} \frac{1}{P} \quad (\zeta = -1/3) . \quad (6.52)$$

Il convient de noter que ces relations ne sont pas valables pour tout système binaire, mais seulement pour ceux dont le compagnon remplit son lobe de Roche.

## 6.4 Application : preuve de l'existence des ondes gravitationnelles

Proposons-nous d'interpréter la distribution observée des périodes orbitales des variables cataclysmiques (objet compact = naine blanche) et des binaires X de faible masse (objet compact = étoile à neutrons ou trou noir) telle que montrée sur la Fig. 6.7. Nous allons voir que le pic entre  $P = 80$  min et  $P = 2$  h pour les variables cataclysmiques ne s'explique que par l'existence du rayonnement gravitationnel.

### 6.4.1 Explication de la période maximale $P_{\max} \simeq 12$ h

On observe sur la Fig. 6.7 que les variables cataclysmiques ont presque toutes une période inférieure à environ 12 h. On peut l'expliquer comme suit. Nous avons vu au § 6.3.2 que, pour les binaires de grande masse, le transfert par débordement du lobe de Roche est très efficace : l'évolution de ces systèmes est très rapide, si bien que l'on doit peu en observer dans un échantillon comme celui de la Fig. 6.7. Nous partirons donc de l'hypothèse que toutes les variables cataclysmiques sont des binaires de faible masse :  $q < 1$ , ce qui signifie que la masse du compagnon doit être inférieure à la masse de la naine blanche. Or cette dernière admet une masse maximale, la masse de Chandrasekhar (§ 3.4),  $M_{\text{Chandra}} \simeq 1.4 M_{\odot}$ . On a donc nécessairement  $M_2 < M_{\text{Chandra}}$ . En reportant dans la formule (6.51), on obtient

$$P_{\max} = 2\pi M_{\text{Chandra}} \left( \frac{\alpha^3}{G\beta^3} \right)^{1/2} , \quad (6.53)$$

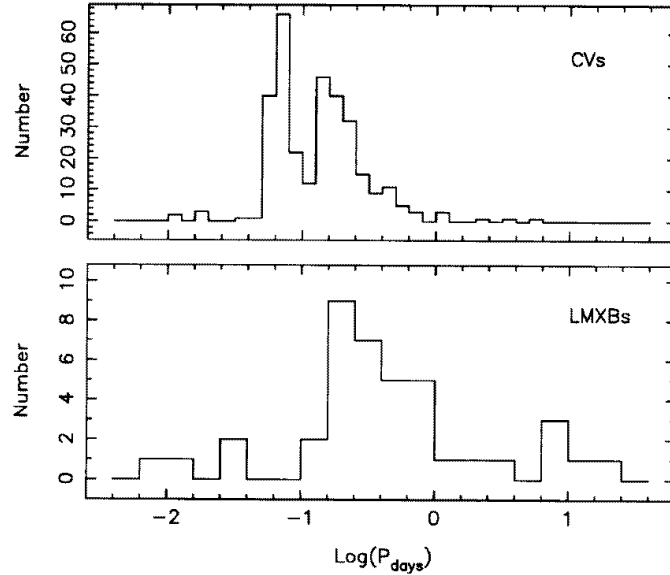


FIG. 6.7 – Distribution des périodes orbitales observées dans les variables cataclysmiques (CVs) et les binaires X de faible masse (LMXBs) [d’après van Paradijs (1998)].

c’est-à-dire

$$P_{\max} = 12.5 \text{ h} , \quad (6.54)$$

ce qui coïncide assez bien avec le maximum observé sur la Fig. 6.7.

La Fig. 6.7 montre également que l’on observe des binaires X de faible masse à des périodes orbitales plus grande que 12.5 h, jusqu’à quelques jours. Cela vient du fait que l’objet compact est dans ce cas une étoile à neutrons ou un trou noir, dont la masse maximale est beaucoup plus grande (pour un trou noir, la masse “maximale” est dictée par la masse du progéniteur).

### 6.4.2 Explication des périodes comprises entre 3 h et 12 h

Les variables cataclysmiques de périodes comprises entre 3 h et 12 h (cf. Fig. 6.7) doivent perdre du moment cinétique. Sinon il n’y aurait pas de transfert (cf. § 6.3.2) et le système binaire ne serait pas observé sous forme de variable cataclysmique. Le mécanisme de perte de moment cinétique pour ces périodes-là est le mécanisme de Schatzman décrit au § 6.3.2.

### 6.4.3 Explication du “trou” entre 2 h et 3 h

Au vu de la Fig. 6.7, il semble que pour  $P < 3 \text{ h}$  le mécanisme de Schatzman ne soit pas efficace. Calculons la masse du compagnon correspondant à cette période, en vertu de l’Eq. (6.51) : on obtient  $M_2 = 0.34M_{\odot}$ . Or il s’agit justement de la masse en dessous

de laquelle les étoiles perdent leur cœur radiatif et deviennent entièrement convectives. Cela a pour conséquence la disparition du champ magnétique dipolaire et donc l'arrêt du freinage magnétique (effet Schatzman). Comme montré au § 6.3.2, cela conduit à l'arrêt du transfert de masse. Ainsi, il existe sûrement des binaires naine blanche - étoile de faible masse sur la séquence principale avec des périodes légèrement inférieures à 3 h, mais, en l'absence de transfert de masse, de tels systèmes n'apparaissent pas comme des variables cataclysmiques.

#### 6.4.4 Explication du “pic” entre 80 min et 2 h

Pour  $P \lesssim 2$  h, il y a de nouveau transfert de masse entre les deux composantes, puisque l'on observe sur la Fig. 6.7 de nombreuses variables cataclysmiques de période comprise entre 80 min et 2 h. Étant donnée la petitesse des périodes mises en jeu, un autre mécanisme de perte de moment cinétique entre en effet en jeu : le rayonnement gravitationnel. La relativité générale prédit en effet

$$\frac{\dot{J}}{J} = -\frac{32}{5} \frac{G^{5/3}}{c^5} \frac{M_1 M_2}{M^{1/3}} \left(\frac{2\pi}{P}\right)^{8/3}. \quad (6.55)$$

En reportant cette valeur de  $\dot{J}$  dans (6.48), on obtient une relation entre le taux de transfert et la période orbitale :

$$\dot{M}_2 = -\frac{32}{5} \frac{G^{8/3}}{c^5} \frac{1}{4/3 - q} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3 \frac{M_1}{M^{1/3}} \left(\frac{2\pi}{P}\right)^{2/3} \quad (\zeta = 1). \quad (6.56)$$

L'application numérique donne

$$\dot{M}_2 = -1.0 \times 10^{-10} M_\odot \text{ yr}^{-1} \left(\frac{2 \text{ h}}{P}\right)^{2/3}. \quad (6.57)$$

#### 6.4.5 Explication de la période minimale $P_{\min} = 80$ min

On n'observe quasiment pas de variables cataclysmiques de période orbitale inférieure à 80 min (cf. Fig. 6.7). Cela s'explique comme suit. Pour des périodes de l'ordre de l'heure, la masse du compagnon, obtenue par la formule (6.51), est de l'ordre de  $0.1 M_\odot$ . Pour des masses aussi faibles les réactions thermonucléaires s'arrêtent : l'étoile quitte la séquence principale et devient dégénérée. Étant de faible masse, elle donc décrite par un polytrophe  $\gamma = 5/3$ , ce qui correspond à l'exposant  $\zeta = -1/3$  dans (6.46). La relation masse-période n'est donc plus (6.51), mais plutôt (6.52). Comme cette dernière est décroissante, le transfert de masse se traduit donc cette fois par une augmentation de la période. D'où l'existence d'une période minimale de l'ordre de l'heure.

#### 6.4.6 Conclusion

Il est remarquable que pour expliquer la distribution observée des périodes orbitales des variables cataclysmiques, comme montrée sur la Fig. 6.7, il faille invoquer l'existence

des ondes gravitationnelles. On peut donc présenter cela comme un test de leur existence. Ce test est certes quantitativement plus faible que celui du pulsar binaire PSR B1913+16 (§ 5.4.3), mais il fait appel à des observations astronomiques plus classiques : observations optiques ou ultra-violettes d'objets beaucoup moins relativistes que les pulsars : naines blanches avec compagnons sur la séquence principale.

## 6.5 Disques d'accrétion

Une fois passé le point de Lagrange  $L_1$ , la matière échappée du compagnon n'atteint pas directement l'objet compact, car ce dernier n'occupe qu'une toute petite fraction du lobe de Roche (cf. Fig. 6.6). La matière a plutôt une trajectoire en boucle et revient interagir avec elle même. Ce processus aboutit à la formation d'un disque, appelé *disque d'accrétion*, autour de l'objet compact. C'est dans ce disque que la matière en provenance du compagnon peut perdre son moment cinétique, par dissipation visqueuse, et tomber finalement sur l'objet compact.

### 6.5.1 Équations de conservation

Faisons les hypothèses (i) d'un disque mince, (ii) d'une vitesse de la forme

$$\mathbf{v} = v_\phi \mathbf{e}_\phi + v_r \mathbf{e}_r, \quad (6.58)$$

avec  $|v_r| \ll |v_\phi|$ , la composante  $v_r$  n'étant due qu'à la dissipation visqueuse.

En terme de la densité surfacique de masse,  $\Sigma = \rho H$  ( $H$  est l'épaisseur du disque, supposée petite devant  $r$ ), l'équation de conservation de la masse s'écrit

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Sigma v_r) = 0. \quad (6.59)$$

L'équation de conservation du moment cinétique s'écrit, quant à elle,

$$r^3 \frac{\partial}{\partial t} (\Sigma \Omega) = - \frac{\partial}{\partial r} (r^3 v_r \Sigma \Omega) + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial G}{\partial r}, \quad (6.60)$$

où  $G$  est le couple exercé par l'anneau  $[r, r + dr]$  sur l'anneau  $[r - dr, r]$  (valeur algébrique le long de  $\mathbf{e}_z$ ). Le couple induit par la viscosité de cisaillement  $\eta$  est

$$G = 2\pi \nu \Sigma r^3 \frac{\partial \Omega}{\partial r}, \quad (6.61)$$

où  $\nu$  est la viscosité cinématique de cisaillement :  $\nu = \eta / \rho$ .

On peut montrer que la viscosité moléculaire est beaucoup trop faible, de plusieurs ordre de grandeur, pour fournir un transport de moment cinétique suffisant pour expliquer la luminosité observée dans les variables cataclysmiques ou les binaires X. On fait alors appel à la viscosité turbulente dans le disque, que l'on paramétrise suivant la prescription de Shakura & Sunyaev (1973) :

$$\nu = \alpha c_s H, \quad (6.62)$$

où  $c_s$  désigne la vitesse du son dans le fluide et  $\alpha$  est un paramètre libre. Les modèles de disques ainsi obtenus sont appelés *disques  $\alpha$* .

### 6.5.2 Accrétion stationnaire

Dans le cas stationnaire ( $\partial/\partial t = 0$ ), l'équation de conservation de la masse (6.59) conduit à la constance du taux d'accrétion  $\dot{m}$  :

$$\dot{m} = -2\pi r \Sigma v_r = \text{const} . \quad (6.63)$$

Par ailleurs, l'équation de conservation du moment cinétique (6.60), combinée avec la relation (6.61), conduit à

$$\nu \Sigma \frac{\partial \Omega}{\partial r} = -\frac{1}{2\pi} \left( \dot{m} \frac{\Omega}{r} + \frac{C}{r^3} \right) , \quad (6.64)$$

où  $C$  est une constante, qui peut être déterminée en considérant la couche limite au voisinage de l'objet compact (rayon  $R_*$ , masse  $M$ ) :

$$C = -\dot{m} \sqrt{GM R_*} . \quad (6.65)$$

### 6.5.3 Disques képlériens

En supposant que la vitesse de rotation dans le disque est égale à la vitesse képlérienne,

$$\Omega = \left( \frac{GM}{r^3} \right)^{1/2} , \quad (6.66)$$

l'équation (6.64) conduit à la relation suivante entre la viscosité cinématique  $\nu$ , la densité surfacique  $\Sigma$  et le taux d'accrétion  $\dot{m}$  :

$$\nu \Sigma = \frac{\dot{m}}{3\pi} \left( 1 - \sqrt{\frac{R_*}{r}} \right) . \quad (6.67)$$

### 6.5.4 Puissance dissipée dans le disque

La puissance dissipée par la viscosité par unité de volume est donnée par

$$p = \frac{1}{2} \rho \nu (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) (\nabla^i v^j + \nabla^j v^i) . \quad (6.68)$$

Dans le cas présent, on obtient

$$p = \rho \nu r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) . \quad (6.69)$$

La puissance dissipée dans tout le disque est

$$L = \int_{R_*}^{\infty} \int_{-H/2}^{H/2} p 2\pi r dr dz . \quad (6.70)$$



On obtient ainsi

$$L = \frac{GM\dot{m}}{2R_*} = \frac{1}{2}L_{\text{acc}} \quad . \quad (6.71)$$

Il convient de noter que ce résultat est indépendant de  $\nu$ . En fait,  $\nu$  intervient pour fixer la valeur de  $\dot{m}$  (cf. Eq. (6.67)) : plus la viscosité est grande et plus le taux d'accrétion est grand.

Le fait que la puissance dissipée  $L$  soit la moitié de la luminosité d'accrétion  $L_{\text{acc}}$  introduite au § 6.1.1 montre que les disques d'accrétion sont des mécanismes très efficaces de libération de l'énergie potentielle gravitationnelle de la matière accrétée par l'objet compact.

## Bibliographie

Pour plus de détails sur les processus d'accrétion dans les binaires serrées, on pourra consulter les articles de revues ou les ouvrages suivants :

- Frank J., King A.R., Raine D.J. 2002 : *Accretion power in astrophysics* (3rd edition), Cambridge University Press (Cambridge)
- Hilditch R.W. 2001 : *An introduction to close binary stars*, Cambridge University Press (Cambridge)
- King A.R. 1993 : *Accretion in close binaries*, in *Galactic high-energy astrophysics, high-accuracy timing and positional astronomy* (EADN Astrophysics School IV), Eds. J. van Paradijs, H.M. Maitzen, Springer-Verlag (Berlin)
- King A.R. 1997 : *The evolution of close binary systems driven by gravitational radiation*, in *Relativistic Gravitation and Gravitational Radiation*, Eds. J.-A. Marck, J.-P. Lasota, Cambridge University Press (Cambridge)
- Lasota J.P. 1987 : *Les disques d'accrétion*, *Ann. Phys. Fr.* **5**, 59
- Longair M.S. 1994 : *High energy astrophysics*, Cambridge University Press (Cambridge)
- Shapiro S.L., Teukolsky S.A. 1983 : *Black holes, white dwarfs and neutron stars, the physics of compact objects*, Wiley (New-York)

Autres références mentionnées dans le texte :

- Flannery B. 1975 : *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **170**, 325
- Paczynski B. 1971 : *Evolutionary processes in close binary systems*, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **9**, 183
- Shakura N.I., Sunyaev R.A. 1973 : *Astron. Astrophys.* **24**, 337
- van Paradijs J. 1998 : *Neutron stars and black holes in X-ray binaries*, in *The many faces of neutron stars*, Eds. Bucccheri R., van Paradijs J., Alpar M.A., Kluwer (Dordrecht)



# Chapitre 7

## Trous noirs

version 2004–2005

### Sommaire

---

7.1	Le concept de trou noir . . . . .	123
7.2	Propriétés élémentaires de la métrique de Schwarzschild . . .	128
7.3	Trous noirs dans les binaires X . . . . .	132
7.4	Trous noirs massifs dans les noyaux galactiques . . . . .	137

---

## 7.1 Le concept de trou noir

### 7.1.1 Définition

Un *trou noir* est une région de l'espace-temps causalement déconnectée du reste de l'univers. Autrement dit aucune géodésique de genre lumière (les trajectoires des photons) ne sort d'un trou noir. La frontière (immatérielle) qui sépare le trou noir du reste de l'univers s'appelle l'*horizon des événements*.

C'est le champ gravitationnel, particulièrement intense, qui est responsable de ce comportement. Les trous noirs sont les plus compacts des objets compacts et on ne peut les décrire correctement qu'en utilisant la relativité générale.

### 7.1.2 Trous noirs “newtoniens”

Même si les trous noirs sont des objets relativistes par excellence, on peut prédire leur existence dans le cadre de la théorie newtonienne de la gravitation, pour peu que l'on traite les photons comme des particules ordinaires soumises à la gravitation. Ainsi que l'ont remarqué l'Anglais J. Michell et le Français Laplace à la fin du XVIIIème siècle, la vitesse de libération d'un corps (sphérique) de masse  $M$  et de rayon  $R$  atteint la vitesse de la lumière lorsque

$$\frac{1}{2}c^2 = \frac{GM}{R} . \tag{7.1}$$

Ainsi, un corps dont le rapport  $M/R$  obéirait à l'équation ci-dessus ne laisserait pas s'échapper la lumière : ce serait donc un trou noir.

Il convient de remarquer que les trous noirs ne correspondent pas nécessairement à des objets extrêmement denses, contrairement à une certaine imagerie populaire qui leur attribue une densité infinie. En effet le critère (7.1) est en  $M/R$ , alors que la densité varie comme  $M/R^3$ . Si l'on introduit la densité moyenne par  $\bar{\rho} := M/(4/3\pi R^3)$ , on peut récrire (7.1) comme

$$\frac{1}{2}c^2 = \frac{4}{3}\pi G\bar{\rho}R^2, \quad (7.2)$$

de sorte que pour toute valeur de  $\bar{\rho}$ , même petite, il suffit que le corps soit suffisamment étendu pour vérifier le critère de trou noir. Ainsi Michell avait calculé qu'un astre de même densité que le Soleil mais de rayon 500 fois plus grand serait un trou noir.

Remarquons qu'en terme du paramètre de relativité  $\Xi$  introduit au Chap. 1, le critère (7.1) se traduit par

$$\Xi = \frac{1}{2}, \quad (7.3)$$

ce qui montre bien que les trous noirs doivent avoir un champ gravitationnel intense. Il convient donc d'arrêter là leur description newtonienne et de se tourner vers la relativité générale.

### 7.1.3 La solution de Schwarzschild

Deux mois après la publication de la théorie de la relativité générale par Einstein en 1915, l'astrophysicien allemand Karl Schwarzschild présente une solution exacte des équations d'Einstein à symétrie sphérique dans le vide. Dans un certain système de coordonnées  $x^\alpha = (t, r, \theta, \varphi)$ , dites *coordonnées de Schwarzschild*, le tenseur métrique de cette solution prend la forme suivante (cf. cours de Jérôme Pérez<sup>1</sup>)

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (7.4)$$

Cette solution n'a qu'un seul paramètre :  $M$ , qui représente la masse de l'objet central. On peut voir en effet que pour  $r$  grand, dans la région de champ faible, les trajectoires des particules test sont des trajectoires kepleriennes dans un potentiel gravitationnel  $-GM/r$ . Schwarzschild avait obtenu la solution (7.4) en cherchant la métrique à l'extérieur d'une étoile quelconque et non pas en cherchant un trou noir. Il a d'ailleurs donné quelques semaines plus tard la solution correspondant à l'intérieur d'une étoile de densité constante et à laquelle il faudrait raccorder (7.4) pour  $r > R$  (où  $R$  désigne la coordonnée  $r$  de la surface de l'étoile) afin d'avoir une solution complète. Mais si l'étoile a un rayon  $R$  plus petit que

$$R_s := \frac{2GM}{c^2}, \quad (7.5)$$

<sup>1</sup>NB : nous utilisons une convention de signature pour le tenseur métrique différente de celle de Jérôme Pérez, à savoir  $(-, +, +, +)$  contre  $(-, -, -, +)$  dans le cours de Jérôme Pérez.

alors un problème survient : d'après (7.4) le coefficient métrique  $g_{rr}$  diverge en  $r = R_s$  et  $g_{tt}$  s'annule !  $R_s$  est appelé *rayon de Schwarzschild*. On peut voir que la singularité en  $r = R_s$  n'est pas une singularité de l'espace-temps mais seulement une pathologie des coordonnées de Schwarzschild. Les quantités invariantes que l'on peut former à partir du tenseur de courbure sont en effet parfaitement régulières en  $r = R_s$ . Par contre la divergence des coefficients métriques que l'on observe en  $r = 0$  dans (7.4) correspond bel et bien à une singularité de l'espace-temps : le tenseur de courbure diverge en  $r = 0$ .

La meilleure façon de se convaincre que l'espace-temps est bien régulier en  $r = R_s$  est d'effectuer le changement de coordonnées suivant :

$$\tilde{t} := t + \frac{2M}{c^3} \ln \left| \frac{c^2 r}{2GM} - 1 \right|, \quad (7.6)$$

$$\tilde{r} := r \quad (7.7)$$

$$\tilde{\theta} := \theta \quad (7.8)$$

$$\tilde{\varphi} := \varphi. \quad (7.9)$$

Les coordonnées  $x^{\tilde{\alpha}} = (\tilde{t}, \tilde{r}, \tilde{\theta}, \tilde{\varphi})^2$  sont appelées *coordonnées d'Eddington-Finkelstein*. Elles sont liées aux géodésiques lumières (rayons lumineux) radiales et entrantes, puisque ces dernières obéissent à l'équation toute simple

$$c\tilde{t} + \tilde{r} = \text{const.} \quad (7.10)$$

Dans les coordonnées d'Eddington-Finkelstein, les composantes  $g_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}$  du tenseur métrique s'écrivent

$$\begin{aligned} g_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} dx^{\tilde{\alpha}} dx^{\tilde{\beta}} = & - \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 d\tilde{t}^2 + \frac{4GM}{c r} d\tilde{t} dr + \left( 1 + \frac{2GM}{c^2 r} \right) dr^2 \\ & + r^2 (d\tilde{\theta}^2 + \sin^2 \tilde{\theta} d\tilde{\varphi}^2) \end{aligned} \quad (7.11)$$

*Exercice* : déduire (7.11) de (7.4) en utilisant la loi de transformation des composantes covariantes d'un tenseur  $g_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} = g_{\mu\nu} \partial x^\mu / \partial x^{\tilde{\alpha}} \partial x^\nu / \partial x^{\tilde{\beta}}$ , avec la matrice jacobienne  $\partial x^\mu / \partial x^{\tilde{\alpha}}$  déduite de (7.6)-(7.9).

Les coefficients métriques  $g_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}$  que l'on peut lire sur (7.11) sont clairement réguliers en  $r = R_s$ . Tout au plus a-t-on  $g_{00} = 0$  en  $r = R_s$ , mais cela n'a aucune signification quant à la nature de l'espace-temps : ce qui compte c'est l'ensemble de la matrice  $(g_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}})$  qui doit correspondre à une forme bilinéaire non dégénérée et de signature  $(-, +, +, +)$ . On peut faire deux remarques à partir de (7.11) :

- contrairement aux composantes en coordonnées de Schwarzschild, les composantes du tenseur métrique en coordonnées d'Eddington-Finkelstein ne forment pas une matrice diagonale, puisque le terme  $g_{\tilde{t}\tilde{r}}$  n'est pas nul ;
- en faisant  $g_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} dx^{\tilde{\alpha}} dx^{\tilde{\beta}} = 0$  (géodésique de genre lumière) et  $d\tilde{\theta} = 0$  et  $d\tilde{\varphi} = 0$  (trajectoires purement radiales) dans (7.11), on obtient

$$-c^2 d\tilde{t}^2 + dr^2 + \frac{2GM}{c^2 r} (c d\tilde{t} + dr)^2 = 0, \quad (7.12)$$

<sup>2</sup>Dans ce qui suit on ne distingue plus  $(r, \theta, \varphi)$  et  $(\tilde{r}, \tilde{\theta}, \tilde{\varphi})$ .

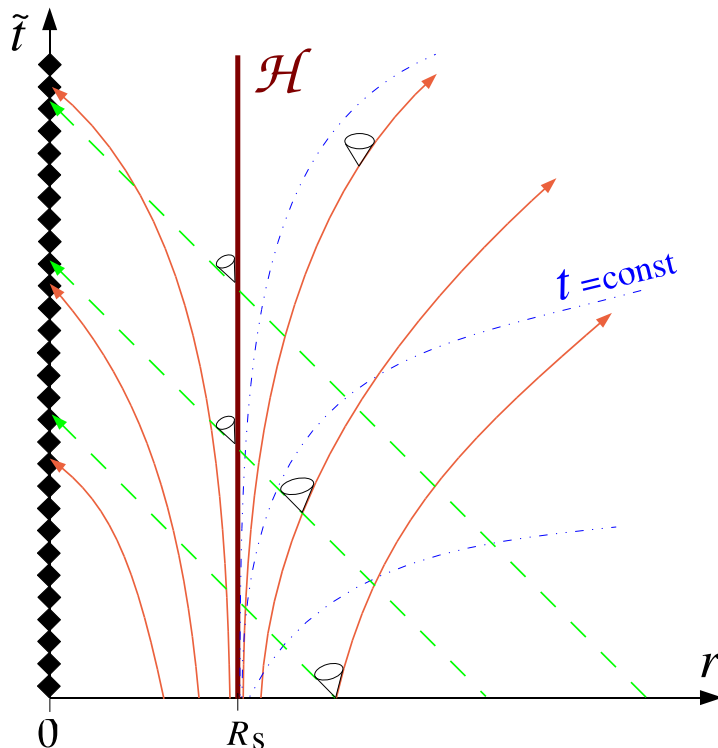


FIG. 7.1 – Diagramme d’espace-temps représentant un trou noir de Schwarzschild en coordonnées d’Eddington-Finkelstein  $(\tilde{t}, r, \theta, \varphi)$  (les dimensions correspondant à  $\theta$  et  $\varphi$  ont été supprimées). L’horizon des événements  $\mathcal{H}$  correspond à la droite verticale d’équation  $r = R_s$ . Les lignes continues rouge (resp. lignes pointillées vertes) représentent les géodésiques lumineuses (lignes d’univers des photons) radiales sortantes (resp. entrantes). En vertu de la propriété (7.10), les géodésiques lumineuses entrantes sont de simples droites inclinées à  $45^\circ$  dans ce dessin. Par ailleurs, on constate que pour  $r < R_s$ , les deux familles de géodésiques lumineuses radiales sont dirigées vers l’intérieur et se terminent sur la singularité en  $r = 0$ . Cette impossibilité d’atteindre la région  $r > R_s$  traduit l’existence du trou noir. On a également représenté sur ce diagramme des hypersurfaces  $t = \text{const}$  où  $t$  est la composante  $x^0$  des coordonnées de Schwarzschild. Le comportement de ces hypersurfaces au voisinage de l’horizon (et notamment le fait qu’aucune d’entre elles ne traverse l’horizon) est le reflet de la pathologie des coordonnées de Schwarzschild en  $r = R_s$ .

et on constate que les courbes d’équation  $c\tilde{t} = -r + \text{const}$  sont solutions, comme annoncé ci-dessus [Eq. (7.10)].

#### 7.1.4 Trous noirs relativistes

Comme discuté ci-dessus, pour un corps à symétrie sphérique de rayon  $R > R_s$ , la métrique de Schwarzschild (7.4) représente le champ gravitationnel à l’extérieur de ce corps (théorème de Birkhoff, cf. § 5.2.4). Ainsi par exemple, appliquée au Soleil (pour lequel  $R = 7 \times 10^5 \text{ km} \gg R_s = 3 \text{ km}$ ) elle rend très bien compte des effets relativistes dans le système solaire.

Lorsqu’on considère la métrique de Schwarzschild dans tout l’espace, c’est-à-dire pour  $0 \leq r < \infty$ , elle décrit l’espace-temps d’un trou noir statique. La sphère  $r = R_s$  est alors l’horizon des événements. Cet espace-temps est représenté en coordonnées d’Eddington-

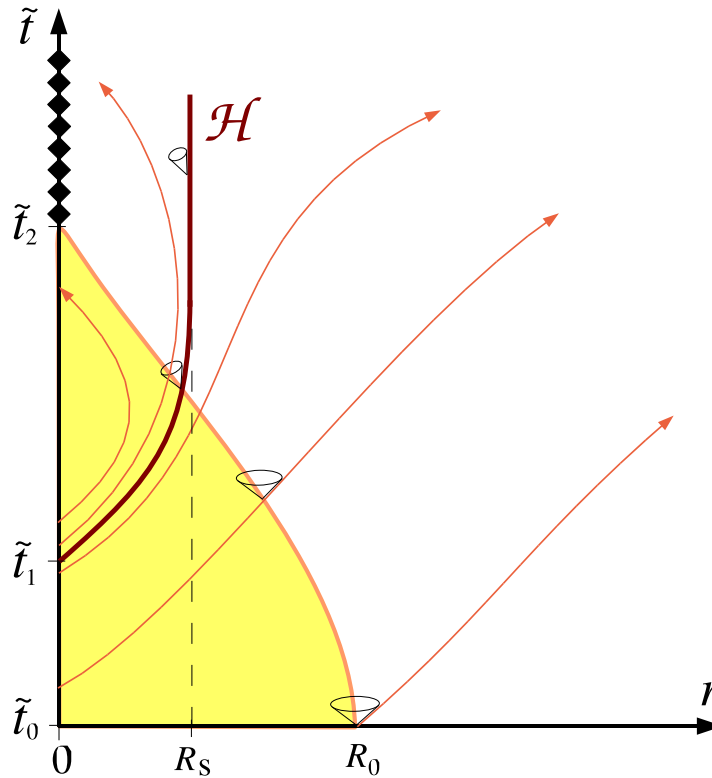


FIG. 7.2 – Diagramme d'espace-temps décrivant l'effondrement gravitationnel d'une étoile dans des coordonnées de type Eddington-Finkelstein. La partie de l'espace-temps occupée par la matière est la partie coloriée en jaune. Les lignes avec des extrémités fléchées représentent les lignes d'univers des photons émis vers l'extérieur. A l'instant initial  $\tilde{t}_0$ , le rayon de l'étoile est  $R_0$ . A l'instant  $\tilde{t}_1$  apparaît l'horizon des événements  $\mathcal{H}$  au centre de l'étoile. Tous les photons émis à l'intérieur du domaine délimités par  $\mathcal{H}$  sont piégés. A l'instant  $\tilde{t}_2$  l'effondrement est achevé et une singularité apparaît en  $r = 0$ .

Finkelstein sur la figure 7.1.

En 1939 J.R. Oppenheimer et son étudiant H. Snyder ont étudié l'effondrement gravitationnel d'une étoile sphérique en relativité générale. Ils ont fait l'hypothèse simplificatrice d'une pression nulle, ce qui permet d'obtenir une solution analytique. Ils ont ainsi montré qu'un observateur situé à l'infini voit l'effondrement se ralentir et s'arrêter lorsque la surface de l'étoile atteint le rayon de Schwarzschild  $r = R_s$ . Ce comportement, qui est un cas extrême de l'effet Einstein – encore appelé décalage vers le rouge gravitationnel – (cf. § 8), justifie le terme d'*étoiles gelées* qui a prévalu pour qualifier les trous noirs jusqu'à l'invention du terme *trou noir* par John Wheeler en 1967. Bien entendu, pour un observateur comobile avec l'étoile l'effondrement ne s'arrête pas au rayon de Schwarzschild mais se poursuit jusqu'à la singularité centrale, qui est atteinte en un temps fini (cf. Fig. 7.2).

La solution de Schwarzschild décrit les trous noirs statiques. Sa généralisation au cas de la rotation a été découverte en 1963 par le mathématicien néo-zélandais R. Kerr. Cette solution est axisymétrique et peut être mise sous la forme (5.38), où les coefficients métriques  $N$ ,  $N^\phi$ ,  $A$  et  $B$  sont des fonctions analytiques de  $(r, \theta)$  ne contenant que deux paramètres : la masse  $M$  et le moment cinétique  $J$  du corps central. C'est R.H. Boyer et

B. Carter qui ont montré en 1965 que la métrique de Kerr correspond à un trou noir en rotation, que l'on appelle depuis *trou noir de Kerr*. Au début des années 1970, B. Carter, S. Hawking et W. Israel ont établi le théorème d'unicité qui stipule que tous les trous noirs stationnaires en rotation sont des trous noirs de Kerr. Ce théorème confirme la conjecture dite *d'absence de chevelure* établie au milieu des années 1960 par les physiciens soviétiques V.L. Ginzburg, Ya. B. Zeldovich et I. Novikov. L'absence de chevelure signifie que la structure d'un trou noir en rotation est extrêmement simple. Il suffit de deux paramètres scalaires,  $M$  et  $J$  pour la décrire entièrement. Ceci contraste avec le cas des étoiles en rotation, pour lesquelles la métrique (5.38) ne peut pas être décrite par seulement quelques paramètres scalaires, même à l'extérieur de l'étoile. Elle dépend en effet de la distribution de masse et d'impulsion à l'intérieur de l'étoile.

### 7.1.5 Le trou noir comme objet astrophysique

Par essence même un trou noir est inobservable. On ne peut espérer le détecter que par ses effets sur son environnement immédiat. Étant le plus compact des objets compacts, c'est l'astre sur lequel l'accrétion de matière est susceptible de libérer le plus d'énergie. Comme nous l'avons vu au § 6.1.1, l'accrétion sur un trou noir en rotation peut dégager jusqu'à 42% de l'énergie de masse de la matière accrétée. Cela explique pourquoi dès la découverte des quasars, au début des années 1960, les trous noirs furent invoqués pour expliquer l'incroyable source d'énergie de ces objets. A partir de 1970, le développement de l'astronomie X allait fournir les preuves observationnelles de l'existence des trous noirs. Le premier candidat trou noir clairement identifié fut Cyg X-1 en 1972. Ce fut le seul pendant toute une décennie.

Les trous noirs font aujourd'hui partie intégrante du bestiaire de l'astrophysique. On distingue deux classes de trous noirs :

- les **trous noirs stellaires**, qui sont des restes d'étoiles massives, après l'explosion en supernova (cf. § 4.4) ; leur masse varie entre la masse maximale des étoiles à neutrons ( $\sim 3 M_{\odot}$ ) et une ou deux dizaines de masses solaire ;
- les **trous noirs massifs** dans les noyaux de galaxies : leur masse varie entre  $\sim 10^5$  et  $10^9 M_{\odot}$ .

## 7.2 Propriétés élémentaires de la métrique de Schwarzschild

### 7.2.1 Géodésiques et lois de conservation

Rappelons tout d'abord qu'en relativité, une particule (photon ou bien particule massive) est entièrement décrite par sa ligne d'univers et son vecteur 4-impulsion  $\mathbf{p}$ . Ce dernier est tangent à la ligne d'univers et vérifie la relation de normalisation :

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = -m^2 c^2, \quad (7.13)$$



où  $m$  est la masse au repos de la particule (zéro pour un photon) et  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}$  désigne le produit scalaire du 4-vecteur  $\mathbf{p}$  avec lui-même pris avec la métrique d'espace-temps  $\mathbf{g}$  :  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{g}(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = g_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta = p_\alpha p^\alpha$ . Dans le cas d'une particule massive ( $m > 0$ ),  $\mathbf{p}$  est relié à la 4-vitesse  $\mathbf{u}$  par

$$\mathbf{p} = m\mathbf{u}. \quad (7.14)$$

Rappelons que, dans un système de coordonnées  $x^\alpha = (t, r, \theta, \varphi)$  donné, la 4-vitesse a pour composantes :

$$u^\alpha = (u^t, u^r, u^\theta, u^\varphi) = \left( \frac{dt}{d\tau}, \frac{1}{c} \frac{dr}{d\tau}, \frac{d\theta}{d\tau}, \frac{d\varphi}{d\tau} \right), \quad (7.15)$$

où  $\tau$  est le temps propre le long de la ligne d'univers de la particule. L'écriture ci-dessus suppose que l'on paramètre la ligne d'univers par le temps propre :  $x^\alpha = x^\alpha(\tau)$ . Rappelons à ce sujet l'interprétation fondamentale du tenseur métrique  $\mathbf{g}$  : la longueur mesurée par  $\mathbf{g}$  le long d'une ligne d'univers donnée est justement le temps propre écoulé dans le référentiel de la particule associée à la ligne d'univers. Il en découle la normalisation suivante de la 4-vitesse :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -c^2, \quad (7.16)$$

ce qui est compatible avec les relations (7.13) et (7.14).

La 4-accélération le long d'une ligne d'univers est le 4-vecteur dérivée de la 4-vitesse par rapport au temps propre :

$$\mathbf{a} := \frac{d\mathbf{u}}{d\tau}. \quad (7.17)$$

On peut réécrire la 4-accélération en terme de la dérivée covariante (par rapport à la connexion d'espace-temps  $\nabla$ ) de  $\mathbf{u}$  le long de  $\mathbf{u}$  :

$$\mathbf{a} = \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u}, \quad (7.18)$$

c'est-à-dire, en composantes :

$$a^\alpha = u^\beta \nabla_\beta u^\alpha. \quad (7.19)$$

Une propriété fondamentale de la 4-accélération est d'être orthogonale à la 4-vitesse :  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = 0$ . 4-vitesse et 4-accélération le long d'une ligne d'univers donnée sont représentées sur la Fig. 7.3.

Une ligne d'univers est une *géodésique* de l'espace-temps si, et seulement si, sa 4-accélération est nulle :  $\mathbf{a} = 0$ , c'est-à-dire, au vu des composantes (7.19)

$$u^\beta \nabla_\beta u^\alpha = 0. \quad (7.20)$$

Les géodésiques généralisent la notion de "ligne droite" aux espaces courbes. En relativité générale, elles correspondent aux lignes d'univers des particules qui ne sont pas soumises à d'autre force que le champ gravitationnel. Une classe particulière de géodésiques, celles de *longueur nulle* ou de *genre lumière* a été considérée au § 7.1.3. Elle correspond aux lignes d'univers des photons (rayons lumineux).

L'espace-temps de Schwarzschild possède de nombreuses symétries : stationnarité + symétrie sphérique. La définition indépendante de tout système de coordonnées de ces

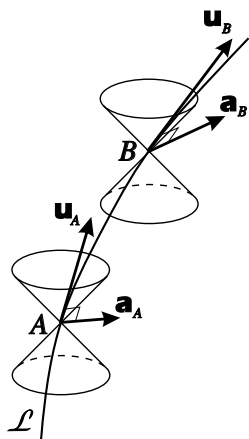


FIG. 7.3 – 4-vitesse  $\mathbf{u}$  et 4-accelération  $\mathbf{a}$  en deux points  $A$  et  $B$  d'une ligne d'univers.  $\mathbf{u}$  est un 4-vecteur de genre temps (à l'intérieur du cône de lumière), alors que la 4-accelération, qui lui est orthogonale, est de genre espace.

symétrie fait appel à la notion d'invariance de la métrique sous l'action d'un groupe de transformation de l'espace-temps. Ainsi la stationnarité se traduit par l'invariance sous un groupe à un paramètre et homéomorphe à  $(\mathbb{R}, +)$ , appelé *groupe des translations dans le temps*. Graphiquement, l'action du groupe sur l'espace-temps est représenté par ses orbites, l'*orbite* d'un point étant l'ensemble de ses images sous l'action de tous les membres du groupe. Dans le cas d'un groupe à un paramètre, les orbites sont des lignes de l'espace-temps. Tout paramétrage  $\lambda$  des éléments du groupe se traduit immédiatement par un paramétrage  $\lambda$  des orbites. On peut alors considérer le champ de vecteurs  $\xi$  tangents aux orbites et associé au paramétrage en question.  $\xi$  est une représentation vectorielle du groupe de transformation (il s'agit en fait d'un générateur infinitésimal du groupe). Dans le cas où la métrique est invariante sous le groupe de transformation, on dit que  $\xi$  est un *vecteur de Killing*. Il obéit alors à l'équation suivante :

$$\nabla_{\alpha}\xi_{\beta} + \nabla_{\beta}\xi_{\alpha} = 0. \quad (7.21)$$

Dans le cas de la métrique de Schwarzschild, le champ de vecteurs de Killing associé à la stationnarité et de carré scalaire  $-1$  à l'infini est le vecteur  $\xi_{\text{stat}}$  dont les composantes par rapport aux coordonnées de Schwarzschild sont

$$\xi_{\text{stat}}^{\alpha} = (1, 0, 0, 0). \quad (7.22)$$

Ses composantes par rapport aux coordonnées d'Eddington-Finkelstein sont tout aussi bien

$$\xi_{\text{stat}}^{\tilde{\alpha}} = (1, 0, 0, 0). \quad (7.23)$$

Les symétries de l'espace-temps se traduisent par l'existence de quantités conservées le long des géodésiques suivant la règle

$$\xi \text{ vecteur de Killing} \implies \xi \cdot \mathbf{u} = \text{const}, \quad (7.24)$$

où  $\mathbf{u}$  est la 4-vitesse le long de la géodésique. Il est facile d'établir cette propriété : la variation du scalaire  $\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{u}$  le long de la géodésique s'écrit

$$\begin{aligned}
 u^\alpha \nabla_\alpha (\xi_\beta u^\beta) &= u^\alpha u^\beta \nabla_\alpha \xi_\beta + \xi_\beta \underbrace{u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta}_{=0} \\
 &= u^\alpha u^\beta \underbrace{\nabla_\alpha \xi_\beta}_{=-\nabla_\beta \xi_\alpha} \\
 &= -u^\alpha u^\beta \nabla_\alpha \xi_\beta \\
 &= 0,
 \end{aligned} \tag{7.25}$$

où l'on a utilisé l'équation des géodésiques (7.20) pour obtenir la seconde ligne et l'équation de Killing (7.21) pour obtenir la troisième ligne. La quatrième ligne s'obtient en comparant les seconde et troisième lignes. Puisque la masse au repos  $m$  est constante le long de la ligne d'univers, on peut réécrire la propriété (7.24) en terme de la 4-impulsion [cf. Eq. (7.14)], sous la forme

$$\boxed{\boldsymbol{\xi} \text{ vecteur de Killing} \implies \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{p} = \text{const}}. \tag{7.26}$$

Sous cette forme, la loi de conservation est valable pour toutes les géodésiques, y compris celle de longueur nulle (photons).

Appliquée à la stationnarité de la métrique de Schwarzschild la propriété (7.26) conduit à la conservation le long de toute géodésique de la quantité

$$\boldsymbol{\xi}_{\text{stat}} \cdot \mathbf{p} = \xi_{\text{stat}}^\alpha p_\alpha. \tag{7.27}$$

En vertu des composantes (7.22) de  $\boldsymbol{\xi}_{\text{stat}}$  dans les coordonnées de Schwarzschild,  $\xi_{\text{stat}}^\alpha p_\alpha = p_t$ , si bien que la quantité conservée le long de toute géodésique est la composante temporelle covariante de la 4-impulsion :

$$\boldsymbol{\xi}_{\text{stat}} \cdot \mathbf{p} = p_t. \tag{7.28}$$

Si la ligne d'univers de la particule atteint l'infini,  $p_t$  a une interprétation physique très simple :  $E = -p_t c$  n'est autre que l'énergie de la particule mesurée par un observateur inertiel immobile par rapport au trou noir, car  $\boldsymbol{\xi}_{\text{stat}}$  n'est alors autre que la 4-vitesse de cet observateur.

## 7.2.2 Effet Einstein

La conservation de  $p_t$  va nous permettre d'établir la loi du décalage spectral gravitationnel. Considérons en effet un photon émis radialement vers l'extérieur depuis un point de coordonnée  $r = r_{\text{em}}$ . L'énergie de ce photon mesurée par un observateur de 4-vitesse  $\mathbf{u}_{\text{em}}$  fixe par rapport aux coordonnées de Schwarzschild  $(r, \theta, \varphi)$  est

$$E_{\text{em}} = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_{\text{em}} = -p_\alpha u_{\text{em}}^\alpha = -p_t u_{\text{em}}^t, \tag{7.29}$$

car  $p_\alpha = (p_t, p_r, 0, 0)$  (photon émis radialement) et  $u_{\text{em}}^\alpha = (u_{\text{em}}^t, 0, 0, 0)$  (observateur situé à une valeur fixe de  $(r, \theta, \varphi)$ ). La loi de normalisation de la 4-vitesse [Eq. (7.16)] impose

$$g_{tt}(u_{\text{em}}^t)^2 = -c^2. \tag{7.30}$$

En utilisant la valeur de  $g_{tt}$  donnée par (7.4), il vient

$$u_{\text{em}}^t = c \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1/2}. \quad (7.31)$$

En reportant dans (7.29), on obtient

$$E_{\text{em}} = -c p_t \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1/2}. \quad (7.32)$$

Considérons un deuxième observateur, également fixe par rapport aux coordonnées  $(r, \theta, \varphi)$ , et qui reçoit le photon. En notant par  $r_{\text{rec}}$  sa position radiale et par  $\mathbf{u}_{\text{rec}}$  sa 4-vitesse, l'énergie du photon que mesure cet observateur est

$$E_{\text{rec}} = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_{\text{rec}} = -c p_t \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r_{\text{rec}}} \right)^{-1/2}. \quad (7.33)$$

En faisant tendre  $r_{\text{rec}}$  vers l'infini, cette expression se réduit à

$$E_{\infty} := E_{\text{rec}} = -c p_t, \quad (7.34)$$

en accord avec la remarque faite précédemment sur l'interprétation de  $p_t$ . Puisque  $p_t$  est conservée le long de la trajectoire du photon, on déduit de (7.32) et (7.34) que

$$E_{\infty} = \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r_{\text{rec}}} \right)^{1/2} E_{\text{em}}. \quad (7.35)$$

Puisque l'énergie des photons est liée à leur longueur d'onde par  $E = hc/\lambda$ , on en déduit immédiatement la relation entre les longueurs d'ondes mesurées à l'émission et à la réception à l'infini :

$$\lambda_{\infty} = \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r_{\text{em}}} \right)^{-1/2} \lambda_{\text{em}}, \quad (7.36)$$

ou de manière équivalente le décalage spectral

$$z := \frac{\lambda_{\infty} - \lambda_{\text{em}}}{\lambda_{\text{em}}} = \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r_{\text{em}}} \right)^{-1/2} - 1 \quad (7.37)$$

On constate que l'on a toujours  $z > 0$  : il s'agit-là de l'*effet Einstein* ou *rougissement gravitationnel*.

### 7.3 Trous noirs dans les binaires X

Comme rappelé au § 7.1.5, il faut rechercher les trous noirs dans les sources à haute énergie. Les candidats naturels sont donc les *binaires X*. L'objet compact accrétant dans une binaire X peut être soit une étoile à neutrons, soit un trou noir. L'argument principal d'identification d'un trou noir est la détermination d'une borne inférieure de la masse de l'objet compact qui soit supérieure à la masse maximale des étoiles à neutrons. C'est ce critère de masse que nous allons examiner dans un premier temps.

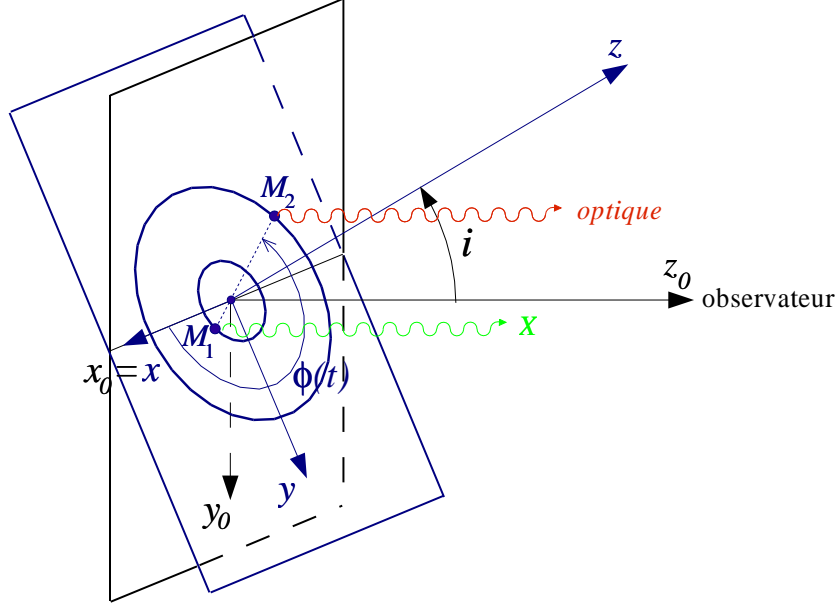


FIG. 7.4 – Géométrie d’une binaire X par rapport à l’observateur terrestre. Le plan du ciel (resp. plan orbital) est le plan  $(x_0, y_0)$  (resp.  $(x, y)$ ). La ligne des nœuds est suivant l’axe  $x$  (= axe  $x_0$ ).  $M_1$  désigne l’objet compact, au voisinage duquel a lieu l’émission X (disque d’accrétion), et  $M_2$  l’étoile compagne, que l’on observe dans le visible.

### 7.3.1 Le critère de masse

Les candidats trous noir sont recherchés dans des binaires X pour lesquelles on dispose d’observations optiques de l’étoile compagne de suffisamment bonne qualité. On peut alors mesurer la vitesse radiale de cette étoile par spectroscopie (effet Doppler-Fizeau) et accéder ainsi en partie à la dynamique du système.

La vitesse radiale du compagne par rapport à l’observateur est

$$V_{\text{rad}}(t) = \dot{z}_0(t) + V_0, \quad (7.38)$$

où  $z_0(t)$  désigne la coordonnée  $z_0$  du compagne dans le repère lié au plan du ciel défini sur la Fig. 7.4 et  $V_0$  dénote la vitesse radiale du centre de masse du système par rapport à l’observateur (supposée constante à l’échelle de temps des observations). En notant  $i$  l’inclinaison du plan orbital sur la ligne de visée, on a la relation suivante entre les coordonnées  $(x, y, z)$  liées au plan orbital et les coordonnées  $(x_0, y_0, z_0)$  liées à l’observateur :

$$\begin{cases} x_0 = x \\ y_0 = y \cos i - z \sin i \\ z_0 = y \sin i + z \cos i \end{cases} . \quad (7.39)$$

Pour un mouvement dans le plan orbital,  $z = 0$ , de sorte que (7.38) devient

$$V_{\text{rad}}(t) = \dot{y}(t) \sin i + V_0 . \quad (7.40)$$

Nous avons vu au § 6.2.2 que les forces de marées circularisent les orbites d'un système serré, si bien que la loi horaire du mouvement du compagnon est très simple :

$$\begin{cases} x(t) = a_2 \cos(\Omega t) \\ y(t) = a_2 \sin(\Omega t) \end{cases}, \quad (7.41)$$

où  $a_2$  désigne le rayon de l'orbite du compagnon autour du centre de masse du système et  $\Omega = 2\pi/P$ ,  $P$  étant la période orbitale. On déduit immédiatement de (7.40) et (7.41) que

$$V_{\text{rad}}(t) = K_2 \cos(\Omega t) + V_0, \quad (7.42)$$

avec la demi-amplitude

$$K_2 := \frac{2\pi}{P} a_2 \sin i. \quad (7.43)$$

En utilisant la troisième loi de Kepler

$$\frac{G(M_1 + M_2)}{(a_1 + a_2)^3} = \left(\frac{2\pi}{P}\right)^2 \quad (7.44)$$

et la relation  $M_1 a_1 = M_2 a_2$ , on déduit facilement que

$$K_2^3 P = 2\pi G \frac{M_1^3 \sin^3 i}{(M_1 + M_2)^2}. \quad (7.45)$$

Dans cette équation apparaît la *fonction de masse*

$$f(M_1, M_2, i) := \frac{M_1^3 \sin^3 i}{(M_1 + M_2)^2}. \quad (7.46)$$

C'est donc cette combinaison des masses qui peut être déterminée en mesurant la vitesse radiale de  $M_2$ , l'équation (7.45) donnant

$$f(M_1, M_2, i) = \frac{K_2^3 P}{2\pi G}. \quad (7.47)$$

Les grandeurs  $K_2$  et  $P$  se déduisent de la courbe  $V_{\text{rad}}(t)$ . Un exemple de telle courbe est montré sur la Fig. 7.5 pour la binaire X V404 Cygni, qui contient un trou noir d'au moins 6 masses solaires.

Remarquons deux petites différences par rapport à la fonction de masse introduite au § 5.4.3 pour les pulsars binaires : (i) pour un pulsar binaire, c'est l'objet compact ( $M_1$  dans nos notations) qui est observé et (ii) on ne mesure pas la vitesse radiale mais le temps  $a_1 \sin i/c$  mis par la lumière pour traverser le système, car on chronomètre les retards (ou avances) d'arrivée des pulses radio. L'équation (5.40) peut ainsi s'écrire au vu de la notation introduite par (7.46)

$$f(M_2, M_1, i) = \frac{4\pi^2 (a_1 \sin i)^3}{GP^2}. \quad (7.48)$$

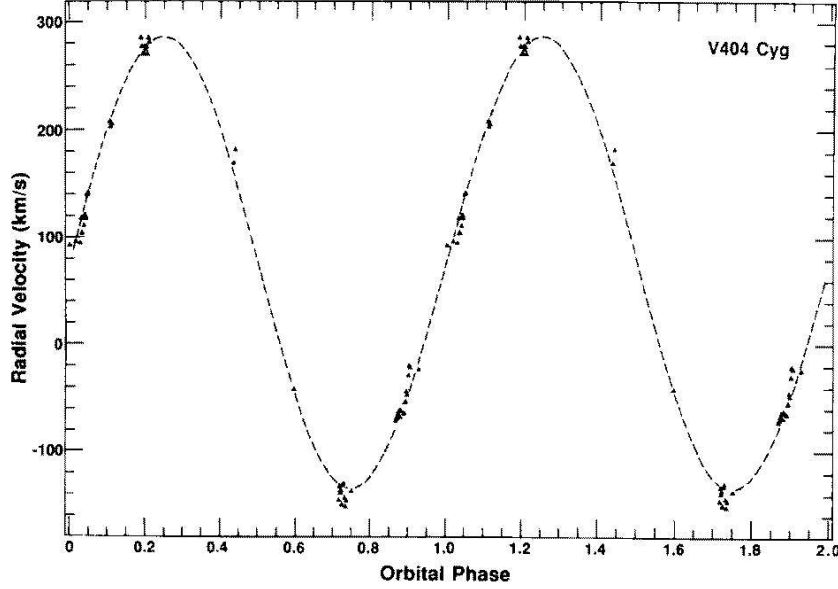


FIG. 7.5 – Variation temporelle de la vitesse radiale du compagnon optique de la binaire X V404 Cygni, mesurée au Télescope William Herschel (4.2 m) aux Canaries. La ligne en pointillés est un ajustement par une sinusoïde, conformément à la loi (7.42), qui donne  $K_2 = 208 \text{ km s}^{-1}$  et  $P = 6.5$  jours [d’après Casares et al. (1992)].

C’est bien  $f(M_2, M_1, i)$  qui apparaît dans cette formule, et non  $f(M_1, M_2, i)$ , et ce en vertu du point (i). Le point (ii) se traduit par le membre de droite (celui des observables) différent de celui de (7.47).

L’intérêt de la fonction de masse  $f(M_1, M_2, i)$  est qu’elle constitue une borne inférieure sur  $M_1$ . En effet on a toujours  $\sin^3 i \leq 1$  et  $M_1^2 / (M_1 + M_2)^2 < 1$ , si bien que (7.46) conduit à

$$M_1 > f(M_1, M_2, i) . \quad (7.49)$$

Si  $f(M_1, M_2, i)$  est supérieur à la masse maximale des étoiles à neutrons (cf. § 5.4), on peut conclure que l’objet compact de la binaire X est un trou noir. Étant données nos connaissances actuelles, on ne connaît en effet pas d’objet intermédiaire entre les étoiles à neutrons et les trous noirs. Par exemple pour V404 Cygni (Fig. 7.5),  $f(M_1, M_2, i) = 6.1 M_\odot$ , ce qui est supérieur à la limite théorique pour des étoiles à neutrons construites sur des équations d’état causales (cf. Eq. (5.39)).

Dans le cas où  $f(M_1, M_2, i) < M_{\text{max}}^{\text{et. neutrons}}$  — ce qui est par exemple celui du candidat trou noir historique Cyg X-1, pour lequel  $f(M_1, M_2, i) = 0.25 M_\odot$  — on peut quand même conclure quant à l’existence d’un trou noir en estimant les paramètres supplémentaires  $i$  et  $M_2$ . Ainsi la présence d’éclipse permet de dire que  $i$  est voisin de  $\pi/2$ . On peut également contraindre  $i$  à partir de la forme de la courbe de lumière optique. Par ailleurs, on peut déduire  $M_2$  du type spectral du compagnon puisqu’il s’agit d’une étoile sur la séquence principale. La connaissance de  $M_2$  et  $i$  conduit à la détermination de  $M_1$ .

La Table 7.1 donne la liste des 18 binaires X qui ont passé avec succès le critère de masse  $M_1 > M_{\text{max}}^{\text{et. neutrons}}$  et que l’on considère donc comme contenant un trou noir. Les noms des

source X	autre nom	année publi.	$P$	type comp.	$f(M_1, M_2, i)$ [ $M_\odot$ ]	$M_2$ [ $M_\odot$ ]	$M_1$ [ $M_\odot$ ]	Réf.
Cyg X-1		1972	5.6 j	O9I	$0.25 \pm 0.01$	33	7 – 20	[1]
LMC X-3		1983	1.7 j	B3V	$2.3 \pm 0.3$	6	7 – 14	[2]
LMC X-1		1987	4.2 j	O7III	$0.14 \pm 0.5$	6	4 – 10	[2a]
A 0620-00	XN Mon 75	1986	7.8 h	K5V	$2.91 \pm 0.08$	0.6	$10 \pm 5$	[3]
GS 2023+338	V404 Cyg	1992	6.5 j	K0IV	$6.08 \pm 0.06$	0.6	$12 \pm 2$	[4]
GRS 1124-683	XN Mus 91	1992	10.4 h	K3/K5V	$3.01 \pm 0.15$	0.8	$6_{-2}^{+5}$	[5]
GRO J1655-40	XN Sco 94	1995	2.6 j	F6IV	$2.73 \pm 0.09$	1.7 – 3.3	5.5 – 7.9	[6a,b]
GS 2000+250	XN Vul 88	1995	8.3 h	K5V	$5.01 \pm 0.12$	0.5	$10 \pm 0.4$	[7a,b]
GRO J0422+32	XN Per 92	1995	5.1 h	M2V	$1.21 \pm 0.06$	0.3	$10 \pm 5$	[8]
H 1705-250	XN Oph 77	1996	12.5 h	K3/K7V	$4.86 \pm 0.13$	0.3	$6 \pm 2$	[9]
4U 1543-47	IL Lup	1998	27.0 h	A2V	$0.22 \pm 0.02$	2.5	$5.0 \pm 2.5$	[10]
GRS 1009-45	XN Vel 93	1999	6.8 h	K7/M0V	$3.17 \pm 0.12$		6 – 8	[10a]
XTE J1859+226	V406 Vul	2001	9.2 h		$7.4 \pm 1.1$		$10 \pm 3$	[11]
XTE J1550-564	V381 Nor	2001	37.0 h	G8/K0IV	$6.86 \pm 0.71$		$> 7.4$	[12]
SAX J1819.3-2525	V4641 Sgr	2001	2.8 j	B9III	$2.74 \pm 0.12$		$10 \pm 1.5$	[13]
XTE J1118+480	KV UMa	2001	4.1 h	K7/M0V	$6.1 \pm 0.3$	0.09 – 0.5	6.0 – 7.7	[14]
GRS 1915+105	V1487 Aql	2001	33.5 j	K/MIII	$9.5 \pm 3.0$	$1.2 \pm 0.2$	$14 \pm 4$	[15]
GX 339-4	V821 Ara	2003	42.1 h		$5.8 \pm 0.5$			[16]

TAB. 7.1 – Trous noirs dans les binaires X. Les deux premières lignes correspondent à des HMXB, les suivantes à des LMXB. La colonne “année publi.” donne l’année de la première publication qui annonce la détermination de  $M_1$ . Références : [1] Gies et al. 1982; [2] Cowley et al. 1983; [2a] Cowley et al. 1995; [3,4,5,9] Charles 1999; [6a] Bailyn et al. 1995; [6b] Shahbaz et al. 1999; [7a] Casares et al. 1995; [7b] Filippenko et al. 1995a; [8] Filippenko et al. 1995b; [10] Orosz et al. 1998; [10a] Filippenko et al. 1999; [14] Wagner et al. 2001., McClintock et al. 2003; [15] Greiner et al. 2001., Harlaftis & Grenier 2004; [16] Hynes et al. 2003

sources X sont formés à partir des noms des satellites X ou  $\gamma$  qui les ont observées : GS pour Ginga, GRS pour Granat/Sigma, GRO pour Compton-Gamma Ray Observatory, 4U pour le 4ème catalogue du satellite Uhuru, XTE pour Rossi X-ray Timing Explorer, et SAX pour Beppo-SAX. Les meilleurs candidats trous noirs sont ceux observés dans les binaires X de faible masse (LMXB) où c’est le trou noir qui domine la dynamique du système. Au contraire, dans les binaires X de grande masse (HMXB), une petite erreur sur la détermination de  $M_2$  résulte dans une grande erreur sur  $M_1$ . Les trous noirs dans les LMXB appartiennent tous à la sous-classe des sources X molles transitoires (*soft X-ray transient* en Anglais). Elles sont sujettes à des phases “éruptives”, d’où le nom de *novæ X* qui leur a été donné (initiales XN dans la Table 7.1).

### 7.3.2 Mise en évidence d’horizon des événements

Le critère de masse présenté ci-dessus est un critère par défaut : on conclut qu’un objet est un trou noir parce qu’on ne voit pas ce que cela pourrait être d’autre. Il serait plus satisfaisant de disposer d’un critère faisant appel à une caractéristique propre du trou noir. La caractéristique par excellence est l’horizon des événements. Des observations récentes à l’aide du satellite Chandra ont montré que, dans la période de quiescence, les novæ X



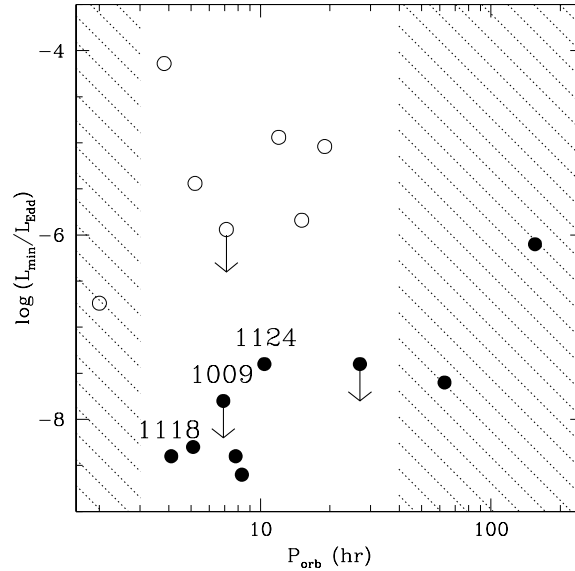


FIG. 7.6 – Luminosité (rapportée à la luminosité d’Eddington) dans la période de quiescence des novæ X, en fonction de leur période orbitale. Les cercles vides correspondent à des novæ X qui contiennent une étoile à neutrons et les pleins à celles qui contiennent un trou noir : de la gauche vers la droite, il s’agit respectivement de GRO J0422+32, XTE J1118+480, GRS 1009-45, A 0620+00, GS 2000+25, GRS 1124-683, 4U 1543-47, GRO J1655-40 et V404 Cyg (cf. Table 7.1). Les zones hachurées sont des domaines où la comparaison entre binaires à trou noir et à étoile à neutrons n’est pas possible, faute d’éléments [d’après McClintock et al. (2003)].

qui contiennent un trou noir, identifiées d’après le critère de masse, sont moins lumineuses que les novæ X qui contiennent une étoile à neutrons (Fig. 7.6). Cette sous-luminosité est interprétée comme la signature du passage de la matière accrétée sous l’horizon des événements.

Pour effectuer cette comparaison entre les novæ X à trou noir et celles à étoile à neutrons, on utilise la luminosité X,  $L$ , en dehors des éruptions (phase de quiescence). Pendant les éruptions  $L$  est proche de la luminosité d’Eddington  $L_{\text{Edd}}$  (cf. § 6.1.2). Il convient évidemment de comparer les valeurs de  $L$  pour le même taux d’accrétion  $\dot{M}_2$ . Or pour les binaires X à courte période orbitale utilisées dans la comparaison, c’est le rayonnement gravitationnel qui constitue le mécanisme de perte de moment cinétique nécessaire au transfert de masse (cf. § 6.3.2). L’Eq. (6.56) montre alors que  $\dot{M}_2/L_{\text{Edd}}$  est une fonction de la seule période orbitale  $P$  et ne dépend pas de  $M_1$ . C’est la raison pour laquelle on a porté  $P$  en abscisse sur la Fig. 7.6.

## 7.4 Trous noirs massifs dans les noyaux galactiques

Cf. les cours d’Isabelle Grenier et d’Hélène Sol.

## Bibliographie

Pour plus de détails sur la physique et les observations des trous noirs, on pourra consulter les articles de revues ou les ouvrages suivants :

- Les trous noirs*, Dossier hors-série de *Pour la Science*, juillet 1997  
 Celotti A., Miller J.C., Sciama D.W. 1999 : *Astrophysical evidence for the existence of black holes*, *Class. Quantum Grav.* **16**, A3  
 Hartle J.B. 2003 : *Gravity, an introduction to Einstein's General Relativity*, Addison Wesley (San Francisco)  
 Kormendy J. 2004 : *The stellar-dynamical search for supermassive black holes in galactic nuclei*, in *Carnegie Observatories Astrophysics Series, Vol. 1 : Coevolution of Black Holes and Galaxies*, Ed. Ho L., Cambridge Univ. Press (Cambridge) [preprint : astro-ph/0306353]  
 Luminet J.-P. 1992 : *Les trous noirs*, Editions du Seuil (Paris)  
 McClintock J.E., Remillard R.A. 2004 : *Black hole binaries*, in *Compact Stellar X-ray Sources*, Eds. Lewin W.H.G., van der Klis M., Cambridge Univ. Press (Cambridge), sous presse [preprint : astro-ph/0306213]  
 Narayan R. 2003 : *Evidence for the black hole event horizon*, *Astron. Geophys.* **44**, 6.22  
 Poutanen J., Svensson R. 1999 : *High energy processes in accreting black holes*, *Astron. Soc. Pacific Conf. Ser.* **161**  
 Thorne K.S. 1997 : *Trous noirs et distorsions du temps*, Flammarion (Paris)  
 Wald R.M. (Ed.) 1998 : *Black holes and relativistic stars*, Univ. Chicago Press (Chicago)

Autres références mentionnées dans le texte :

- Bailyn C.D., Orosz J.A., McClintock J.E., Remillard R.A. 1995 : *Dynamical evidence for a black hole in the eclipsing X-ray nova GRO J1655-40*, *Nature* **378**, 157  
 Casares J., Charles P.A., Marsh T.R. 1995 : *Dynamical evidence for a black hole in the X-ray transient QZ Vul (=GS 2000+25)*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **277**, L45  
 Casares J., Charles P.A., Naylor T. 1992 : *A 6.5-day periodicity in the recurrent nova V404 Cygni implying the presence of a black hole*, *Nature* **355**, 614  
 Cowley A.P. et al. 1983 : *Astrophys. J.* **272**, 118  
 Cowley A.P., Schmidtke P.C., Anderson A.L., McGrath T.K. 1995 : *Determination of the optical counterpart of LMC X-1*, *PASP* **107**, 145  
 Charles P. 1999 : *Black holes in our Galaxy*, in *Observational evidence for black holes in the Universe*, Ed. Chakrabarti S.K., Kluwer (Dordrecht)  
 Filippenko A.V., Leonard D.C., Matheson T., Li W., Moran E.C., Riess A.G. 1999 : *A black hole in the X-ray nova Velorum 1993*, *PASP* **111**, 969  
 Filippenko A.V., Matheson T., Barth A.J. 1995a : *A black hole in the X-ray nova GS 2000+25*, *Astrophys. J.* **455**, L139  
 Filippenko A.V., Matheson T., Ho L.C. 1995b : *The mass of the probable black hole in the X-ray nova GRO J0422+32*, *Astrophys. J.* **455**, 614  
 Gies D.R., Bolton C.T. 1982 : *Astrophys. J.* **260**, 240  
 Greiner J., Cuby J.-G., McCaughrean M.J. 2001 : *An unusually massive stellar black hole in the Galaxy*, *Nature* **414**, 522  
 Harlaftis E.T., Greiner J. 2004 : *The rotational broadening and the mass of the donor star of GRS 1915+105*, *Astron. Astrophys.* **414**, L13  
 Hynes R.I., Steeghs D., Casares J., Charles P.A., O'Brien K. 2003 : *Dynamical evidence for a black hole in GX 339-4*, *Astrophys. J.* **583**, L95  
 McClintock J.E., Narayan R., Garcia M.R., Orosz J.A., Remillard R.A., Murray S.S. 2003 : *Multiwavelength spectrum of the black hole XTE J1118+480 in quiescence*, *Astrophys. J.* **593**, 435  
 Orosz J.A., Jain R.K., Bailyn C.D., McClintock J.E., Remillard R.A. 1998 : *Orbital parameters for the Soft X-Ray Transient 4U 1543-47 : evidence for a black hole*, *Astrophys. J.* **499**, 375  
 Penrose R. 1997 : *La singularité du trou noir*, in *Les trous noirs*, *Pour la Science*, dossier hors-série  
 Shahbaz T., van der Hooft F., Casares J., Charles P.A., van Paradijs J. 1999 : *The mass of X-ray nova Scorpii 1994 (=GRO J1655-40)*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **306**, 89  
 Wagner R.M. et al. 2001 : *The halo black hole X-ray transient XTE J1118+480*, *Astrophys. J.* **556**, 42

# Chapitre 8

## Ondes gravitationnelles

version 2004-2005

### Sommaire

---

8.1	Introduction . . . . .	139
8.2	Quelques ordres de grandeur . . . . .	140
8.3	Preuves observationnelles de l'existence des ondes gravitationnelles . . . . .	143
8.4	Détection des ondes gravitationnelles . . . . .	145
8.5	Sources astrophysiques de rayonnement gravitationnel . . . . .	151
8.6	Effondrements gravitationnels . . . . .	152
8.7	Coalescence d'un système binaire . . . . .	155
8.8	Autres sources . . . . .	161
8.9	Conclusion . . . . .	164

---

### 8.1 Introduction

Le rayonnement électromagnétique a été le vecteur d'information quasi-exclusif de l'astronomie du XXème siècle. Quelques exceptions sont constituées par les rayons cosmiques, les échantillons minéraux issus de l'exploration spatiale et les neutrinos (en provenance du Soleil et de la supernova 1987A). Or le XXIème siècle va voir l'émergence d'un nouveau vecteur d'information : *le rayonnement gravitationnel*. Il s'agit-là d'un vecteur que l'on peut qualifier d'"orthogonal" au rayonnement électromagnétique, car les phénomènes astrophysiques qui émettent des ondes gravitationnelles en grande quantité n'émettent pas ou peu dans le domaine électromagnétique et réciproquement.

Les ondes gravitationnelles ont été prédites par Einstein en 1916 comme conséquences naturelles de sa théorie de la relativité générale. Dans cette dernière, l'espace-temps possède une dynamique propre, dictée par son contenu en matière. Toute accélération

de matière comprenant une composante au moins quadrupolaire engendre des perturbations de l'espace-temps qui se propagent à la vitesse de la lumière, tout comme les ondes électromagnétiques résultent de l'accélération de charges électriques. Une différence est que les ondes électromagnétiques sont des oscillations du champ électromagnétique qui se propagent *à travers* l'espace-temps alors que les ondes gravitationnelles sont des oscillations de l'espace-temps *lui-même*. En termes naïfs, ce dernier point signifie que l'écoulement du temps et la mesure des distances sont modifiés au passage d'une onde gravitationnelle. Ainsi la distance  $L$  entre deux particules, mesurée par le temps d'aller-retour d'un faisceau lumineux, varie comme

$$\Delta L \approx h L , \quad (8.1)$$

où  $h$  est l'*amplitude* de l'onde gravitationnelle. Bien entendu, l'effet est extrêmement petit, si bien que nos sens ne le perçoivent jamais. Même à l'aide de dispositifs expérimentaux, aucune onde gravitationnelle n'a été détectée à ce jour. Nous verrons au § 8.2 qu'aucune expérience du type de celle de Hertz pour la mise en évidence des ondes électromagnétiques ne peut générer d'ondes gravitationnelles détectables en laboratoire. Il n'en va pas de même pour les sources astrophysiques. L'amplitude estimée de leur rayonnement gravitationnel se situe au dessus du seuil de détectabilité des détecteurs actuellement en cours de construction ou en projet. Ceci marque le début de l'astronomie "gravitationnelle".

## 8.2 Quelques ordres de grandeur

### 8.2.1 Formule du quadrupôle

Dans la nature, tout mouvement de matière ayant au moins une composante quadrupolaire émet des ondes gravitationnelles. Cependant, l'argument qui va suivre montre que seules les sources astrophysiques faisant intervenir des astres compacts ou certains mécanismes exotiques (cordes cosmiques) peuvent émettre une quantité détectable de rayonnement gravitationnel. A cet effet, rappelons tout d'abord quelques formules classiques relatives à des sources peu relativistes (faible autogravitation et lentement variables). A grande distance  $r$  de la source, dans des coordonnées dites *transverses et sans trace* ( $TT$ ), la perturbation  $h_{\alpha\beta}^{TT}$  apportée au tenseur métrique  $g_{\alpha\beta}$  par les ondes gravitationnelles est telle que  $h_{00}^{TT} = h_{0i}^{TT} = 0$  et  $h_{ij}^{TT}$  est donné par la formule du quadrupôle, issue de l'équation d'Einstein linéarisée :

$$\boxed{h_{ij}^{TT}(\vec{r}, t) = \frac{2G}{c^4} \frac{1}{r} \ddot{Q}_{ij}^{TT} \left( \vec{r}, t - \frac{r}{c} \right) + O\left(\frac{1}{r^2}\right)} , \quad (8.2)$$

où

$$\ddot{Q}_{ij}^{TT} \left( \vec{r}, t - \frac{r}{c} \right) := \left[ P_i^k P_j^l - \frac{1}{2} P_{ij} P^{kl} \right] \ddot{Q}_{kl} \left( t - \frac{r}{c} \right) , \quad (8.3)$$

$P_{ij} = P_{ij}(\vec{r})$  étant le tenseur de projection transverse à la direction de la source,  $P_{ij}(\vec{r}) := \delta_{ij} - x_i x_j / r^2$  et  $Q_{ij}$  le *moment quadrupolaire* de la distribution de masse  $\rho(t, \mathbf{x})$  de la

source, défini par

$$Q_{ij}(t) = \int_{\text{source}} \rho(t, \mathbf{x}) \left( x_i x_j - \frac{1}{3} \mathbf{x}^2 \delta_{ij} \right) d^3 x . \quad (8.4)$$

Notons que  $Q_{ij}$  n'est pas autre chose que la partie sans trace du moment d'inertie tensoriel de la source par rapport à l'origine des coordonnées, si bien qu'en utilisant le théorème du viriel, on peut relier l'amplitude  $h$  de  $h_{ij}^{\text{TT}}$  à la composante non sphérique  $E^{\text{NS}}$  de l'énergie cinétique de la source :

$$h \sim \frac{G}{c^4} \frac{E^{\text{NS}}}{r} . \quad (8.5)$$

### 8.2.2 Flux d'énergie

Les ondes gravitationnelles transportent de l'énergie et de l'impulsion ; le tenseur énergie-impulsion (effectif) correspondant est le tenseur d'Isaacson

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{32\pi G} \left\langle \frac{\partial h_{ij}^{\text{TT}}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial h_{ij}^{\text{TT}}}{\partial x^\beta} \right\rangle , \quad (8.6)$$

où les crochets  $\langle \dots \rangle$  indiquent une moyenne sur plusieurs longueurs d'ondes. Cette expression n'est valable que loin de la source, là où l'espace-temps peut être assimilé à un espace plat. Le flux d'énergie  $F$  transporté par une onde gravitationnelle s'obtient en prenant la composante  $T_{tz}$  du tenseur (8.6) ( $z$  étant la direction de propagation). On obtient ainsi

$$F = \frac{c^3}{16\pi G} \langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 \rangle , \quad (8.7)$$

où  $h_+$  et  $h_\times$  sont les deux composantes indépendantes de  $h_{ij}^{\text{TT}}$ . Pour une onde monochromatique d'amplitude  $h$  et de fréquence  $f$ , la moyenne sur quelques longueurs d'ondes vaut  $\langle \dot{h}_+^2 \rangle = \langle \dot{h}_\times^2 \rangle = (2\pi f)^2 h^2 / 2$ , si bien que

$$F = \frac{\pi c^3}{4G} f^2 h^2 . \quad (8.8)$$

Numériquement :

$$F = 0.3 \left( \frac{f}{1 \text{ kHz}} \right)^2 \left( \frac{h}{10^{-21}} \right)^2 \text{ W m}^{-2} . \quad (8.9)$$

Cette formule montre qu'une onde gravitationnelle d'amplitude aussi petite que  $10^{-21}$  transporte une quantité appréciable d'énergie. En considérant une onde gravitationnelle comme une "déformation" de l'espace-temps, on peut ainsi dire, par analogie avec la théorie de l'élasticité, que l'espace-temps est un milieu très rigide.

### 8.2.3 Luminosité gravitationnelle

En intégrant l'équation (8.6) sur une sphère entourant la source et en utilisant la formule du quadripôle (8.2), on obtient la *luminosité gravitationnelle* de la source (énergie

totale rayonnée sous forme d'ondes gravitationnelles par unité de temps) :

$$L = \frac{1}{5} \frac{G}{c^5} \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}^{ij} \rangle , \quad (8.10)$$

où les crochets  $\langle \dots \rangle$  indiquent une moyenne sur plusieurs longueurs d'ondes. Si  $M$  est la masse de la source,  $R$  son extension spatiale, la norme  $Q$  du moment quadrupolaire est de l'ordre de  $Q \sim sMR^2$  où  $s$  est un facteur d'asymétrie :  $s = 0$  pour un objet à symétrie sphérique. On peut alors écrire  $\ddot{Q} \sim s\omega^3 MR^2$ , où  $\omega$  est l'inverse du temps caractéristique d'évolution de la source. La formule (8.10) donne ainsi

$$L \sim \frac{G}{c^5} s^2 \omega^6 M^2 R^4 . \quad (8.11)$$

Le facteur numérique  $G/c^5$  est extrêmement petit, son inverse valant  $c^5/G = 3.6 \times 10^{52}$  W. C'est la raison pour laquelle les ondes gravitationnelles émises par une expérience en laboratoire sont virtuellement indétectables : un cylindre d'acier d'un mètre de rayon, de 20 mètres de long, pesant 490 tonnes et tournant à la limite de rupture ( $\omega = 28 \text{ rad s}^{-1}$ ) perpendiculairement à son axe, fournit une luminosité  $L = 2 \times 10^{-29}$  W! (Misner, Thorne & Wheeler 1973, § 36.3). Cependant, lorsque l'on considère des sources astrophysiques comme les astres compacts, la formule (8.11) peut conduire à des luminosités énormes. Une façon de le voir est de suivre le raisonnement de Weber (1974), qui est parti de la remarque suivante : "Ne serait-ce pas mieux si, à la place du minuscule facteur  $G/c^5$ , on avait l'énorme facteur  $c^5/G = 3.6 \times 10^{52}$  W?... Eh bien, réarrangeons la formule (8.11) de manière à avoir  $c^5/G$  comme préfacteur!" Le tour de passe-passe se réalise comme suit : réexprimons la masse  $M$  de l'objet en fonction de son rayon de Schwarzschild  $R_s$  [cf. Eq. (1.6)] suivant  $M = c^2 R_s / (2G)$ . Par ailleurs,  $v$  étant une vitesse caractéristique du mouvement de la source, on a  $\omega \sim v/R \sim v/c \times c/R$ . En reportant ces expressions de  $M$  et  $\omega$  dans (8.11), il vient

$$L \sim \frac{G}{c^5} s^2 \frac{v^6}{c^6} \frac{c^6}{R^6} \frac{c^4 R_s^2}{4G^2} R^4 , \quad (8.12)$$

soit

$$L \sim \frac{c^5}{G} s^2 \left( \frac{R_s}{R} \right)^2 \left( \frac{v}{c} \right)^6 . \quad (8.13)$$

On peut réexprimer cette formule en faisant intervenir le facteur de relativité  $\Xi \sim R_s/R$  introduit au Chap. 1 (cf. Eq. (1.5)) :

$$L \sim \frac{c^5}{G} s^2 \Xi^2 \left( \frac{v}{c} \right)^6 . \quad (8.14)$$

Ainsi, des objets pour lesquels  $s \sim 1$  (grand écart à la symétrie sphérique),  $\Xi \sim 1$  (astres compacts) et  $v \sim c$  (mouvement important) peuvent rayonner une puissance fantastique sous forme d'ondes gravitationnelles :  $L \sim c^5/G = 3.6 \times 10^{52}$  W, soit  $10^{26}$  fois la luminosité du Soleil dans le domaine électromagnétique! Les conditions  $\Xi \sim 1$  et  $v \sim c$  caractérisent les astres compacts : rappelons en effet que, pour un trou noir  $\Xi = 1$  ( $R = R_s$ ), pour une étoile à neutrons  $\Xi \sim 0.2 - 0.4$  et que la vitesse radiale de chute libre d'une particule dans un trou noir est  $v = c$  lorsque la particule traverse l'horizon des événements.

### 8.2.4 Amplitude de l'onde gravitationnelle

En dépit de l'énorme valeur de  $L$  que l'on peut attendre pour des processus mettant en jeu des astres compacts, la perturbation métrique  $h$  mesurée sur Terre sera très faible (cf. § 8.2.2). On peut obtenir une estimation de l'amplitude  $h = |h_{ij}^{\text{TT}}|$  correspondant à une énergie  $\Delta E$  rayonnée sous forme d'ondes gravitationnelles à partir de l'expression (8.8) pour le flux  $F$  en écrivant  $\Delta E = 4\pi r^2 F \tau$  où  $\tau$  est le temps que dure l'émission. On obtient ainsi

$$h \sim \frac{1}{\pi} \left( \frac{GM}{c} \right)^{1/2} \frac{\varepsilon^{1/2}}{r f \tau^{1/2}} . \quad (8.15)$$

Dans cette formule,  $\Delta E$  a été exprimée en terme de l'*efficacité* du processus d'émission gravitationnelle

$$\varepsilon := \frac{\Delta E}{Mc^2} , \quad (8.16)$$

où  $M$  est la masse initiale de l'objet émetteur. Numériquement, l'Eq. (8.15) donne

$$h \sim 2 \times 10^{-19} \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right)^{1/2} \left( \frac{1 \text{ Mpc}}{r} \right) \left( \frac{1 \text{ kHz}}{f} \right) \left( \frac{1 \text{ ms}}{\tau} \right)^{1/2} \varepsilon^{1/2} , \quad (8.17)$$

Les valeurs  $f = 1 \text{ kHz}$  et  $\tau = 1 \text{ ms}$  sont caractéristiques d'un processus mettant en jeu une étoile à neutrons ou un trou noir stellaire. La formule (8.17) montre que, dans un processus mettant en jeu un objet de masse solaire, même si toute l'énergie de masse était rayonnée sous forme d'ondes gravitationnelles ( $\varepsilon = 1$ ), l'amplitude  $h$ , c'est-à-dire l'amplitude du déplacement relatif de deux masses tests [cf. Eq. (8.1)] serait inférieure à  $10^{-19}$  pour une source extragalactique! Ce nombre résume à lui seul la gageure que constitue la détection des ondes gravitationnelles sur Terre.

## 8.3 Preuves observationnelles de l'existence des ondes gravitationnelles

Il convient d'insister sur un point : les détecteurs d'ondes gravitationnelles actuellement en construction (§ 8.4) n'ont pas pour but de démontrer que les ondes gravitationnelles existent — cela nous le savons, ainsi que rappelé ci-dessous — mais de faire de l'astronomie. Ainsi, il faut concevoir un détecteur comme VIRGO non comme une expérience de physique fondamentale du type de celles menées au CERN, mais comme un véritable *télescope*!

Rappelons qu'aujourd'hui la relativité générale a été archi-testée et est même utilisée dans la vie quotidienne (système de positionnement GPS) et que le Prix Nobel de Physique a été décerné en 1993 à Russell Hulse et Joseph Taylor pour avoir apporté la preuve observationnelle de l'existence des ondes gravitationnelles : leur chronométrage du pulsar binaire PSR B1913+16 a montré que ce système double d'étoiles à neutrons perdait de son énergie orbitale par l'émission d'ondes gravitationnelles (cf. Figure 8.1). L'accord quantitatif avec la prédiction de la relativité générale est remarquable :  $3.5 \times 10^{-3}$ .

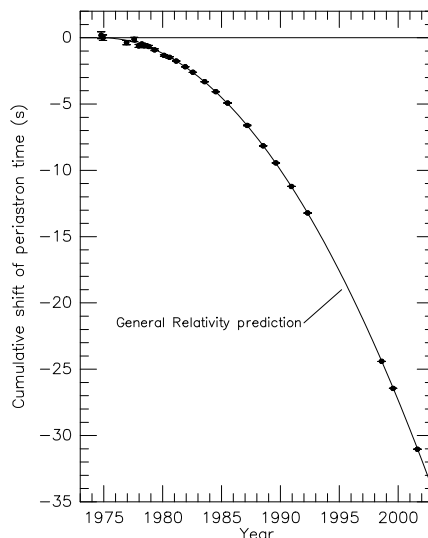


FIG. 8.1 – Preuve observationnelle de l’existence des ondes gravitationnelles : décroissance de la période orbitale  $P_{\text{orb}} \simeq 7\text{ h } 45\text{ min}$  du pulsar binaire PSR B1913+16 mesurée par le décalage  $\Delta T$  des instants de passage au périastre par rapport à une orbite de période constante ; la courbe en trait plein correspond à  $\Delta T(t) = (\dot{P}_{\text{orb}}/2P_{\text{orb}})t^2$  avec  $\dot{P}_{\text{orb}}$  donné par la relativité générale (réaction au rayonnement gravitationnel) [d’après Weisberg & Taylor (2003)].

Comme nous l’avons vu au § 6.4, il existe une autre preuve observationnelle de l’existence des ondes gravitationnelles, à savoir la distribution des périodes orbitales des variables cataclysmiques (cf. Figure 6.7). Rappelons qu’une variable cataclysmique est un système binaire serré contenant une naine blanche qui accrète de la matière depuis un compagnon remplissant son lobe de Roche. Le compagnon ayant une masse plus faible que celle de la naine blanche, on peut voir que le transfert de masse ne peut avoir lieu, et donc le système être observé comme une variable cataclysmique, que si le moment cinétique du système décroît. Pour les variables cataclysmiques dont la période orbitale  $P$  est supérieure à 3 h, le mécanisme de perte de moment cinétique est constitué par le couplage du vent stellaire du compagnon avec son propre champ magnétique (effet Schatzman). Lorsque  $P < 3\text{ h}$ , la masse du compagnon — qui est reliée à  $P$  — est inférieure à  $0.35 M_{\odot}$ , ce qui signifie que le compagnon est entièrement convectif et n’a, par conséquent, pas de champ magnétique dipolaire. Il n’y a donc plus de perte de moment cinétique et l’on observe effectivement une chute brutale du nombre de variables cataclysmiques pour  $P \lesssim 3\text{ h}$  (Figure 6.7). La remontée du nombre de variables cataclysmiques pour  $P \lesssim 2\text{ h}$  ne peut s’expliquer que par la perte de moment cinétique par rayonnement gravitationnel et constitue par là une preuve de l’émission d’ondes gravitationnelles par ces systèmes binaires serrés.



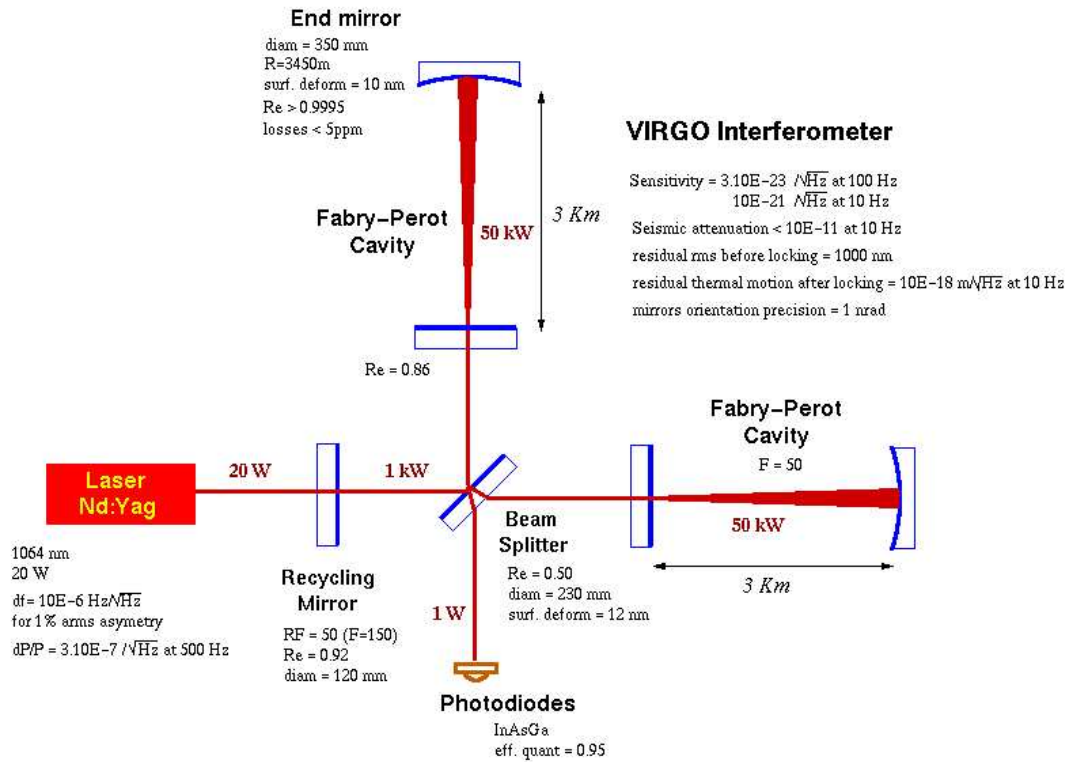


FIG. 8.2 – Schéma optique de l'interféromètre VIRGO [source : LAPP / CNRS].

## 8.4 Détection des ondes gravitationnelles

### 8.4.1 Les détecteurs

Les détecteurs d'ondes gravitationnelles se répartissent en deux classes : les détecteurs interférométriques et les barres résonnantes. Les premiers sont des interféromètres de Michelson améliorés (chaque bras est une cavité Fabry-Perot) de quelques centaines de mètres à quelques kilomètres de long (cf. Fig. 8.2). Les deuxièmes sont des barreaux métalliques (aluminium, niobium) d'une à deux tonnes, refroidis à quelques kelvins ou dixièmes de kelvin. Le passage d'une onde gravitationnelle contracte de manière différentielle les deux bras d'un interféromètre et fait vibrer un barreau métallique [Eq. (8.1)]. Dans le premier cas, on mesure un déplacement des franges d'interférence à l'aide d'un photodétecteur (au "repos", l'interféromètre est calé sur la frange noire) et dans le deuxième cas, on mesure les vibrations par des transducteurs. Le grand avantage des détecteurs interférométriques est d'offrir une grande bande passante, typiquement de 10 Hz à quelques kHz, alors que les barres métalliques ne permettent une détection qu'au voisinage de leur fréquence de résonance (typiquement 1 kHz).

Pour apprécier la gageure technologique que constitue la réalisation de ces instruments, il suffit de remarquer que les sensibilités annoncées correspondent à une onde gravitationnelle d'amplitude  $h \sim 10^{-21}$  pour un signal de type "sursaut". La variation de longueur des bras de l'interféromètre correspondante est  $\Delta L = 3 \times 10^{-18} \text{ m}$  (faire  $L = 3 \text{ km}$  dans



FIG. 8.3 – Vue aérienne du détecteur interférométrique franco-italien VIRGO, situé à Cascina, près de Pise (Italie) [source : CNRS / Istituto Nazionale di Fisica Nucleare].

l'Eq. (8.1)), c'est-à-dire un millièmme de la taille d'un noyau atomique.

Il existe actuellement trois grands détecteurs interférométriques :

**LIGO**, aux Etats-Unis, constitué par deux interféromètres de 4 km de long (un dans l'Etat de Washington et l'autre en Louisiane). La sensibilité attendue est  $S(f)^{1/2} \simeq 3 \times 10^{-23} \text{ Hz}^{-1/2}$  à 200 Hz (la notation  $S(f)^{1/2}$  sera définie au § 8.4.2). La construction de LIGO a débuté en juin 1995. L'optique a été installée en 1999. Le tout premier test grandeur nature a consisté en l'obtention en décembre 1999 des franges d'interférence d'une cavité Fabry-Pérot de 2 km formée dans l'un des bras. La toute première acquisition de données a eu lieu entre le 28 décembre 2001 et le 14 janvier 2002, la seconde du 14 février au 14 avril 2003 et la troisième du 31 octobre 2003 au 9 janvier 2004. Mais le détecteur n'a pas encore atteint sa sensibilité maximale (cf. Fig. alors que la sensibilité finale devrait être la même que celle de VIRGO à cette fréquence-là, c'est-à-dire deux ordre de grandeur plus basse. Par contre une meilleure isolation sismique permettra à VIRGO d'étendre le domaine de détectabilité vers les basses fréquences, jusqu'à 10 Hz, alors que LIGO ne verra rien en dessous de 60 Hz. LIGO devrait atteindre sa sensibilité nominale d'ici un an.

**VIRGO**, près de Pise (Italie), est un programme franco-italien. Il s'agit d'un interféromètre de 3 km de long. La sensibilité est la même que celle de LIGO autour de la centaine de Hz ; par contre une meilleure isolation sismique permettra à VIRGO d'étendre le domaine de détectabilité vers les basses fréquences, jusqu'à 10 Hz, alors que LIGO ne verra rien en dessous de 60 Hz. La construction de VIRGO a débuté en avril 1996 (Figure 8.3). Une étape clé a été franchie entre février 2001 et juillet 2002 par la mise en place et le test de l'interféromètre central. Il s'agissait d'un interféromètre composé par la partie centrale de VIRGO et de bras tronqués à une longueur de 6 mètres. La construction s'est achevée en 2003. Les cavités Fabry-Pérot de chacun des bras de 3km ont été alignées avec succès et les premières franges

Roland Schilling, MPQ Garching, 21.02.97 17:59:41

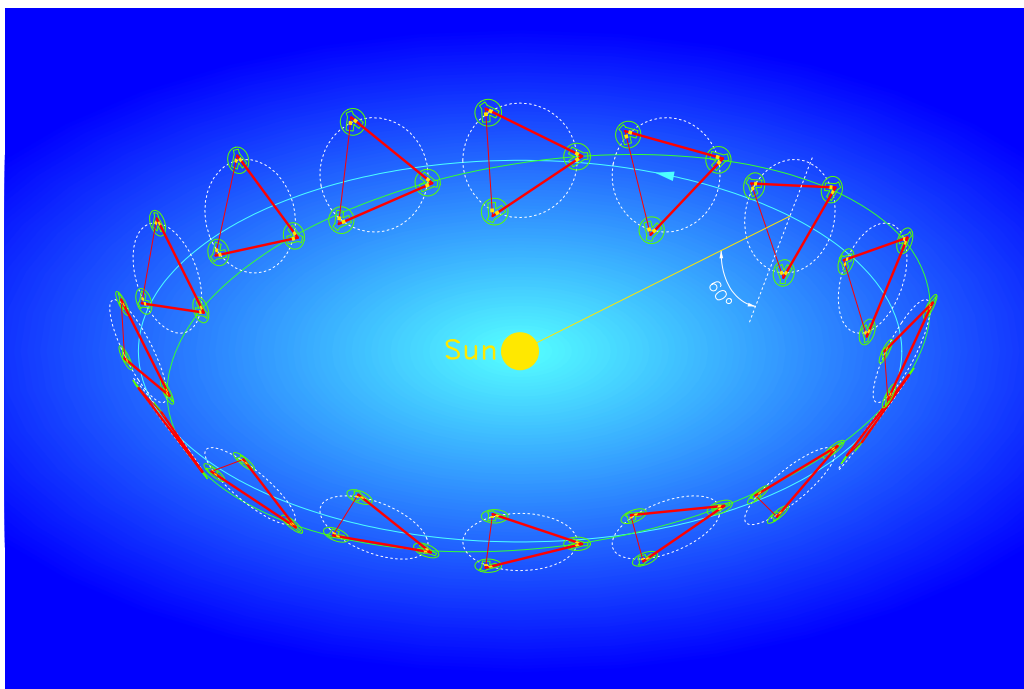


FIG. 8.4 – Mouvement orbital autour du Soleil des trois capsules qui formeront le détecteur interférométrique LISA. Le rayon de l'orbite est 1 UA (LISA suivra la Terre à 20 degré en arrière). Le plan des trois capsules est incliné de  $60^\circ$  par rapport au plan de l'écliptique. La longueur des bras de l'interféromètre est de 5 millions de km [d'après Schutz (2002)].

d'interférence ont été obtenues en février 2004.

**GEO600**, près d'Hannovre (Allemagne), est un projet germano-britannique. Il s'agit d'un interféromètre de 600 m de long. La sensibilité attendue est de l'ordre de  $S(f)^{1/2} \simeq 10^{-22} \text{ Hz}^{-1/2}$  autour de 200 Hz. La construction de GEO600 a débuté à l'automne 1995. Les premières données ont été acquises du 28 décembre 2001 au 14 janvier 2002, en coïncidence avec LIGO. GEO600 est désormais proche de sa sensibilité nominale et acquière des données en coïncidence avec LIGO.

A une plus petite échelle, il convient de noter le projet japonais **TAMA300** d'un interféromètre de 300 m de long, près de Tokyo. Sa construction a été achevée en 1999 et il a acquis plusieurs séries de données, dont une de 1000 heures à l'été 2001. Sa sensibilité est actuellement de  $S(f)^{1/2} \simeq 5 \cdot 10^{-21} \text{ Hz}^{-1/2}$  pour  $f \sim 1 \text{ kHz}$ .

Quant aux barres résonnantes, trois fonctionnent ou ont fonctionné depuis 1991 (sans succès...) : **EXPLORER** au CERN (projet de l'Université de Rome), **ALLEGRO** en Louisiane et **NIOBE** à Perth en Australie. Ces trois barres sont refroidies à  $\sim 2 - 4 \text{ K}$  et ont une sensibilité  $S(f)^{1/2} \sim 5 \times 10^{-21} \text{ Hz}^{-1/2}$ . De plus deux barres ultra-cryogéniques ( $T \simeq 0.1 \text{ K}$ ), **NAUTILUS** et **AURIGA** fonctionnent depuis 1997 en Italie. Leur sensibilité est de  $S(f)^{1/2} \sim 2 \times 10^{-22} \text{ Hz}^{-1/2}$ . Il convient de noter que, de par leur prin-

cipe, les barres ont une bande passante beaucoup plus étroite que celle des détecteurs interférométriques (quelques hertz contre quelques kilohertz).

Enfin, dans le domaine des basses fréquences ( $10^{-4}$  à  $10^{-1}$  Hz), un projet d'interféromètre spatial, **LISA**, est actuellement à l'étude conjointement à l'ESA et à la NASA (Fig. 8.4). Il avait été sélectionné par l'ESA comme Pierre Angulaire de son programme Horizon 2000+ et pourrait être lancé vers 2010 - 2015. Sa sensibilité sera  $S(f)^{1/2} \sim 5 \times 10^{-21} \text{ Hz}^{-1/2}$  à  $10^{-3}$  Hz.

A côté des détecteurs mentionnés ci-dessus et qui sont spécifiquement conçus pour l'observation des ondes gravitationnelles, il convient de noter deux autres méthodes de recherche : le chronométrage des pulsars et le suivi des sondes spatiales déployées dans le système solaire. Ces méthodes sont valables pour les ondes gravitationnelles de basse fréquence ( $f < 0.1$  Hz) et n'ont fourni à ce jour que des bornes supérieures (cf. § 8.8.3).

### 8.4.2 Analyse du signal

La réponse d'un détecteur interférométrique à une onde gravitationnelle caractérisée par les deux composantes indépendantes  $h_+$  et  $h_\times$  de la perturbation  $h_{ij}^{\text{TT}}$  du tenseur métrique est

$$h(t) = F_+(\Theta, \Phi, \Psi) h_+(t) + F_\times(\Theta, \Phi, \Psi) h_\times(t) , \quad (8.18)$$

où  $(\Theta, \Phi)$  sont les deux angles qui définissent la direction de propagation de l'onde gravitationnelle par rapport au repère formé par les bras du détecteur,  $\Psi$  est l'angle de polarisation de l'onde, et  $F_+$  et  $F_\times$  sont les fonctions suivantes

$$F_+(\Theta, \Phi, \Psi) = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \Theta) \cos 2\Phi \cos 2\Psi - \cos \Theta \sin 2\Phi \sin 2\Psi \quad (8.19)$$

$$F_\times(\Theta, \Phi, \Psi) = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \Theta) \cos 2\Phi \sin 2\Psi + \cos \Theta \sin 2\Phi \cos 2\Psi \quad (8.20)$$

qui définissent le *diagramme d'antenne* du détecteur.

Le signal de sortie du détecteur est en fait

$$o(t) = h(t) + n(t) , \quad (8.21)$$

où  $n(t)$  représente le bruit dans le détecteur. Les différentes sources de bruit étant indépendantes, on a

$$\langle n(t) \rangle = 0 , \quad (8.22)$$

où  $\langle \dots \rangle$  désigne la moyenne d'ensemble, c'est-à-dire prise sur un grand nombre de réalisations du bruit. La non-corrélation des sources de bruit fait qu'elles s'additionnent en quadrature, de sorte que l'on définit la *densité spectrale de puissance du bruit à la fréquence  $f$* ,  $S(f)$ , par

$$\langle n(t)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) df . \quad (8.23)$$

Cette égalité est équivalente à la relation suivante entre la transformée de Fourier  $\tilde{n}(f)$  de  $n(t)$  et  $S(f)$  :

$$\langle \tilde{n}(f) \tilde{n}(f')^* \rangle = S(f) \delta(f - f') \quad (8.24)$$

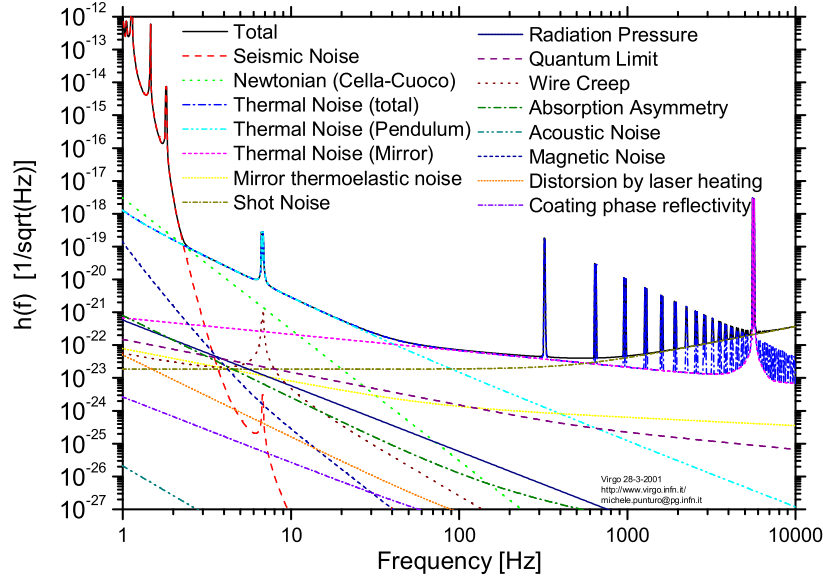


FIG. 8.5 – Sensibilité  $S(f)^{1/2}$  attendue du détecteur interférométrique VIRGO [source : CNRS/INFN].

Si le bruit est gaussien, il est entièrement caractérisé par la fonction  $S(f)$ . La racine carrée de cette dernière est telle que la contribution au bruit total  $\sqrt{\langle n(t)^2 \rangle}$  dans la bande de fréquence comprise entre  $f$  et  $f + df$  est

$$\sqrt{d\langle n(t)^2 \rangle} = S(f)^{1/2} \sqrt{df} . \quad (8.25)$$

On appelle  $S(f)^{1/2}$  *sensibilité du détecteur à la fréquence  $f$* . Son unité est  $\text{Hz}^{-1/2}$ .  $S(f)^{1/2}$  est représentée sur la Figure 8.5 pour le détecteur VIRGO et sur la Figure 8.6 pour le détecteur LIGO. Dans le premier cas il s'agit d'une simulation car VIRGO n'est pas encore complètement achevé, alors que dans le second, les courbes sont obtenues à partir du bruit réellement mesuré sur l'appareil.

Les interféromètres du type VIRGO sont des détecteurs à faible rapport signal sur bruit, c'est-à-dire que

$$|h(t)| \ll \sqrt{\langle n(t)^2 \rangle} . \quad (8.26)$$

La détection de  $h(t)$  se fait alors par *filtrage*, c'est-à-dire que l'on considère la quantité

$$c(\boldsymbol{\lambda}) := \int_{-\infty}^{\infty} o(t) F(t, \boldsymbol{\lambda}) dt , \quad (8.27)$$

où  $F(t, \boldsymbol{\lambda})$  est la fonction *filtre*, qui dépend de paramètres  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$  décrivant un espace de dimension  $p$ . Le *rapport signal sur bruit* est alors défini par

$$\frac{S}{N} = \frac{\langle c(\boldsymbol{\lambda}) \rangle}{\sqrt{\langle c(\boldsymbol{\lambda})^2 \rangle_{h=0}}} , \quad (8.28)$$



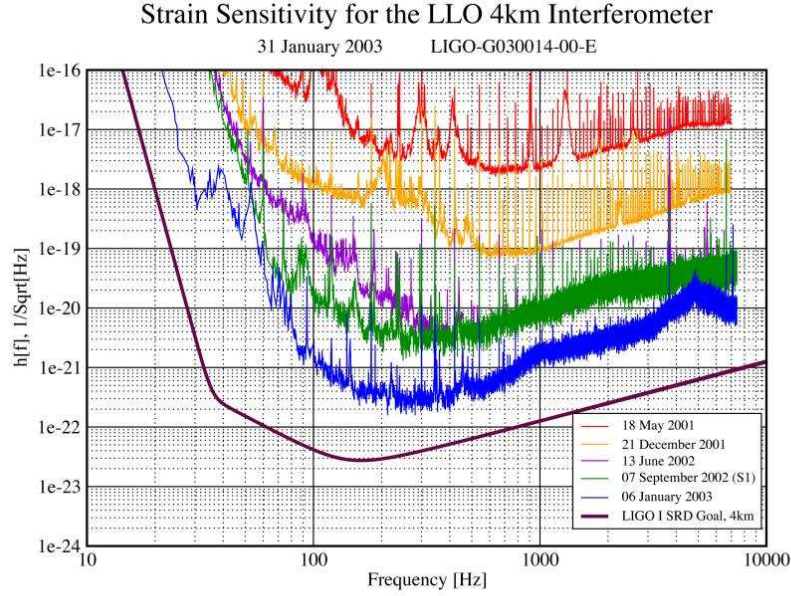


FIG. 8.6 – Sensibilité  $S(f)^{1/2}$  mesurée sur le détecteur LIGO (site de Livingston) [source : LIGO].

où  $\langle c(\boldsymbol{\lambda})^2 \rangle_{h=0}$  désigne la variance de  $c$  lorsque le signal gravitationnel est absent. En utilisant (8.22), on voit que cette expression est équivalente à

$$\frac{S}{N} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} h(t) F(t, \boldsymbol{\lambda}) dt}{\sqrt{\langle \left( \int_{-\infty}^{\infty} n(t) F(t, \boldsymbol{\lambda}) dt \right)^2 \rangle}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(f) \tilde{F}(f, \boldsymbol{\lambda})^* df}{\sqrt{\langle \left( \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{n}(f) \tilde{F}(f, \boldsymbol{\lambda})^* df \right)^2 \rangle}}, \quad (8.29)$$

où la deuxième égalité résulte du théorème de Parseval,  $\tilde{h}(f)$  désignant la transformée de Fourier

$$\tilde{h}(f) := \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{2\pi i f t} dt. \quad (8.30)$$

Un résultat classique est qu'étant donnée la densité spectrale  $S(f)$  de puissance du bruit du détecteur, le filtre  $F(t, \boldsymbol{\lambda})$  qui maximise le rapport signal sur bruit est le *filtre de Wiener* (encore appelé *filtre optimal*) dont la transformée de Fourier est

$$\tilde{F}_{\text{opt}}(f, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{\tilde{h}(f)}{S(f)}. \quad (8.31)$$

Les paramètres  $\boldsymbol{\lambda}$  du filtre sont alors les paramètres physiques qui décrivent l'onde gravitationnelle  $h(t)$ , comme par exemple la masse de la source, son spin, etc... Intuitivement la présence de  $S(f)$  au dénominateur de (8.31) se comprend assez bien : il agit comme un facteur de pondération, privilégiant les fréquences où le bruit est faible.

En insérant l'expression (8.31) dans (8.29) et en utilisant (8.24), on obtient le rapport signal sur bruit du filtre optimal :

$$\frac{S}{N} = \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tilde{h}(f)|^2}{S(f)} df \right)^{1/2}. \quad (8.32)$$

Pour un signal d'amplitude  $h$  constante, observé pendant un temps  $T$ , dans un domaine de fréquence où  $S(f)$  est à peu près constant, la formule ci-dessus, combinée au théorème de Parseval, conduit à

$$\frac{S}{N} \sim \frac{h\sqrt{T}}{S(f)^{1/2}}. \quad (8.33)$$

On en déduit que l'amplitude minimale d'onde gravitationnelle détectable pendant un temps d'intégration  $T$  est

$$h_{\min} \sim \frac{S(f)^{1/2}}{\sqrt{T}} \quad (8.34)$$

Pour un signal quasi-monochromatique, à la fréquence  $f$ , le nombre de cycle pendant le temps  $T$  est  $\mathcal{N} = fT$ , de sorte que

$$\frac{S}{N} \sim \frac{h\sqrt{\mathcal{N}}}{S(f)^{1/2}\sqrt{f}}. \quad (8.35)$$

Si l'on se souvient que  $S(f)^{1/2}\sqrt{f}$  représente le bruit total dans la bande de fréquence  $\Delta f \sim f$  (cf. Eq. (8.25)), l'équation ci-dessus montre qu'en utilisant un filtre de Wiener, on augmente le rapport signal sur bruit d'un facteur  $\sqrt{\mathcal{N}}$ . On appelle quelquefois  $h_{\text{eff}} := h\sqrt{\mathcal{N}}$  l'amplitude effective du signal gravitationnel.

## 8.5 Sources astrophysiques de rayonnement gravitationnel

Ainsi que nous l'avons vu au § 8.2, les sources importantes de rayonnement gravitationnel font intervenir des astres compacts. On peut classer ces sources en trois grandes catégories :

**sources périodiques** : elles émettent un rayonnement continu et comprennent des étoiles à neutrons en rotation et des systèmes binaires.

**sursauts** : il s'agit de sources limitées dans le temps et liée à un événement catastrophique : effondrement gravitationnel, coalescence de deux étoiles à neutrons ou deux trous noirs, absorption d'une étoile par un trou noir massif, etc...

**fond stochastique** : superposition de l'ensemble des sources périodiques de la Galaxie, ainsi que le rayonnement gravitationnel de l'Univers primordial.

Dans ce qui suit, nous allons détailler quelques unes de ces sources.

## 8.6 Effondrements gravitationnels

### 8.6.1 Supernovæ

Parce qu'elles ne sont pratiquement pas absorbées par la matière, contrairement aux photons, les ondes gravitationnelles peuvent nous parvenir directement des régions les plus denses de l'Univers, comme par exemple le cœur des supernovæ. Le rayonnement électromagnétique que nous recevons des supernovæ de type II, Ib et Ic, pour intense qu'il soit, n'est émis que depuis l'enveloppe de l'étoile progénitrice, et ce quelques heures à quelques jours après l'effondrement du cœur de fer qui a donné naissance au phénomène. Même les neutrinos sont piégés dans la phase la plus dense de l'effondrement, lorsque la densité approche de la densité nucléaire. Ainsi les quelques neutrinos reçus lors de l'explosion de SN 1987A (cf. § 4.4.4) ont été émis lors du refroidissement de la proto-étoile à neutrons (ou proto-trou noir) quelques secondes après l'effondrement. Les ondes gravitationnelles constituent ainsi le seul moyen d'accéder véritablement à la phase d'effondrement et au rebond.

Il y a une vingtaine d'années, les supernovæ étaient considérées comme l'une des meilleurs sources d'ondes gravitationnelles. Cet optimisme était fondé sur la formule (8.17), où l'on faisait  $\varepsilon = 10^{-3}$  et  $\tau = 10$  ms (temps de l'effondrement du cœur) : on obtenait ainsi  $h \sim 10^{-22}$  à la distance  $r = 17$  Mpc (distance de l'amas Virgo où l'on estime qu'il se produit environ une supernova par semaine). Il faut voir qu'une efficacité  $\varepsilon = 10^{-3}$  ne correspond qu'à  $\sim 1\%$  de l'énergie libérée par l'effondrement gravitationnel, qui est de l'ordre de  $0.1 Mc^2$  (cf. Eq. 4.12), ce qui ne semblait pas trop demander. Or les simulations numériques récentes ont conduit à une efficacité bien plus petite :  $\varepsilon \simeq 10^{-10}$  à  $10^{-7}$  (Mönchmeyer et al. 1991, Bonazzola & Marck 1993, Yamada & Sato 1995, Zwerger & Müller 1997), si bien qu'une supernova ne pourrait être détectée que si elle se produisait dans notre Galaxie.

Si ce rayonnement était observé, il permettrait de remonter à la distribution du moment cinétique dans le cœur du progéniteur. Après le rebond, des instabilités de convection se développent derrière l'onde de choc et peuvent produire des ondes gravitationnelles d'amplitude  $h \sim 7 \times 10^{-21}$  à 10 kpc (supernova galactique) (Müller & Janka 1997).

Une source plus prometteuse pour la génération de détecteurs actuellement en construction se situe dans la phase post-supernova : il s'agit de la brisure de symétrie de la proto-étoile à neutrons. Diverses instabilités peuvent rendre tri-axiale la proto-étoile à neutrons en rotation rapide et en faire par là un puissant émetteur gravitationnel (Bonazzola et al. 1996, 1998). L'observation d'un tel rayonnement pourrait se faire jusqu'à une vingtaine de Mpc (amas Virgo), distance correspondant à quelques événements par an, et permettrait d'obtenir des contraintes sur l'équation d'état (les équations d'état trop "molles" ne permettent pas la brisure de symétrie) ainsi que sur la viscosité de la matière dense et l'évolution du champ magnétique interne.

Il convient de noter qu'il se produit peut-être beaucoup plus de supernovæ "avortées" (c'est-à-dire pour lesquelles l'énergie du choc n'est pas suffisante pour ejecter les couches externes) que de supernovæ "optiques". Les seuls moyens d'observations des supernovæ avortées sont les neutrinos et les ondes gravitationnelles.



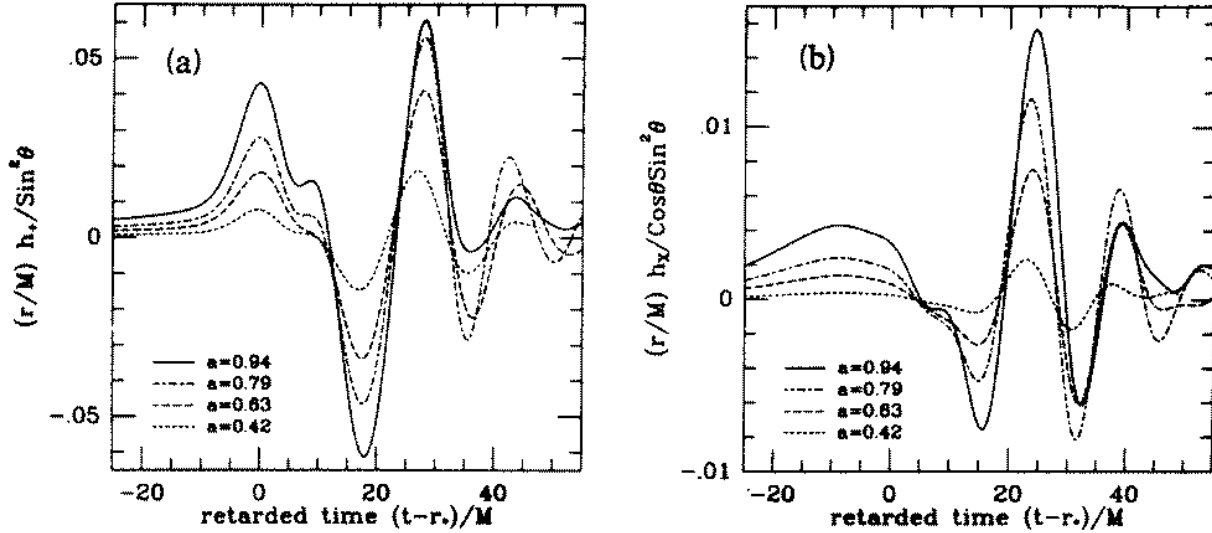


FIG. 8.7 – Amplitudes  $h_+$  et  $h_\times$  des ondes gravitationnelles émises par l'effondrement avec rotation d'une étoile à neutrons en trou noir, suivant les calculs de Stark & Piran (1985). Les grandeurs dessinées sont (a)  $-h_+ r / \sin^2 \theta$  et (b)  $h_\times r / (\cos \theta \sin^2 \theta)$  en unités de  $GM/c^2 = 1.48(M/M_\odot)$  km, en fonction du temps retardé  $t - r/c$  en unités de  $GM/c^3 = 4.94(M/M_\odot) \mu\text{s}$ .

Quant aux supernovæ de type Ia, provoquées par un mécanisme radicalement différent : l'explosion thermonucléaire d'une naine blanche, le scénario standard ne prévoit pas d'émission gravitationnelle importante. Par contre, il existe un scénario alternatif, basé sur la coalescence de deux naines blanches. L'observation d'un signal gravitationnel en coïncidence avec une SN Ia permettrait de trancher en faveur de ce dernier scénario.

### 8.6.2 Effondrement d'une étoile à neutrons en trou noir

Stark & Piran (1985, 1986) ont calculé l'émission gravitationnelle d'une étoile à neutrons en rotation qui s'effondre en trou noir. L'étoile à neutrons est modélisée assez grossièrement comme un polytrophe d'indice adiabatique  $\gamma = 2$ , obtenu comme solution du système T.O.V. à symétrie sphérique (cf. Eq. (5.12)-(5.14)), auquel on sur-impose artificiellement une vitesse angulaire à l'instant initial de l'effondrement. Ce dernier est déclenché artificiellement en multipliant la pression par un facteur  $f_p$  variant entre 0.01 et 0.4. Ces conditions initiales sont suffisamment grossières pour que le calcul effectué modélise aussi bien l'effondrement d'une étoile à neutrons qui a atteint la masse maximale par accrétion de matière qu'une supernova "avortée" où l'onde de choc n'aurait pas la force suffisante pour ejecter les couches externes, entraînant la poursuite de l'effondrement jusqu'à la formation d'un trou noir.

Les calculs de Stark & Piran sont pleinement relativistes — ce qui est nécessaire puisque l'état final est un trou noir — et font l'hypothèse d'axisymétrie (autour de l'axe de rotation). Ils sont basés sur un formalisme et des coordonnées introduits par Bardeen & Piran (1983). Différents calculs ont été effectués en variant la chute de pression  $f_p$  et

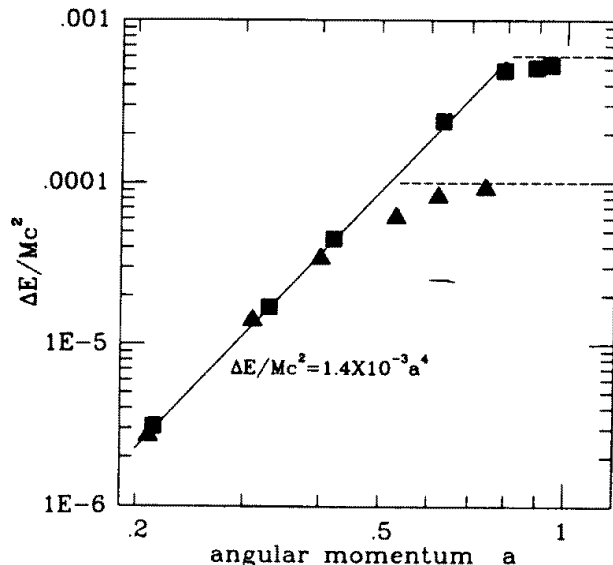


FIG. 8.8 — Efficacité de l'émission gravitationnelle  $\varepsilon := \Delta E/(Mc^2)$  en fonction du moment angulaire réduit  $a := cJ/(GM^2)$  pour les modèles d'effondrement en trou noir de Stark & Piran (1985). Les carrés (resp. triangles) correspondent à des effondrements provoqués par une chute initiale de pression  $f_p = 0.01$  (resp.  $f_p = 0.4$ ). La ligne droite est la ligne  $\varepsilon = 1.4 \times 10^{-3} a^4$ .

le moment cinétique total  $J$ . Ce dernier est représenté par le paramètre sans dimension

$$a := \frac{J}{GM^2/c} . \quad (8.36)$$

Pour des valeurs de  $a$  supérieures à une valeur critique voisine de l'unité ( $a_{\text{crit}} = 1.2 \pm 0.2$  pour  $f_p = 0.01$  et  $a_{\text{crit}} = 0.80 \pm 0.05$  pour  $f_p = 0.4$ ), l'effondrement ne conduit pas à un trou noir en raison de l'ampleur des forces centrifuges. Pour  $a < 0.5$ , l'étoile s'écarte peu de la symétrie sphérique durant l'effondrement (rappelons que la configuration initiale est à symétrie sphérique).

Les ondes gravitationnelles ne sont plus déduites de la formule du quadrupôle comme au § 8.6.1 — cela n'aurait d'ailleurs pas de sens puisque les objets considérés sont hautement non-newtoniens — mais “lues” directement sur les coefficients du tenseur métrique à l'extrémité de la grille numérique, pour  $r = 25R_s$ . Les amplitudes des deux polarisations  $h_+$  et  $h_\times$  sont représentées sur la Fig. 8.7, pour une chute initiale de pression  $f_p = 0.01$  et différentes valeurs du moment cinétique réduit  $a$ .

Contrairement aux cas newtoniens discutés au § 8.6.1, l'axisymétrie n'implique pas ici  $h_\times = 0$ . Les corrections Post-Newtoniennes à la formule du quadrupôle (Blanchet, Damour & Schäfer 1990) donnent en effet, dans le cas axisymétrique, un terme  $h_\times$  proportionnel à la dérivée temporelle troisième du moment octupolaire d'impulsion  $J_{ijk}$ , suivant

$$h_\times = \alpha \frac{G}{c^6} \frac{\cos \theta \sin^2 \theta}{r} \ddot{J}_{zzz} , \quad (8.37)$$

où  $\alpha$  est un facteur numérique qui dépend de la normalisation adoptée dans la définition de  $J_{ijk}$ . Comme le montre la Fig. 8.7, l'amplitude du mode  $h_\times$  est toujours inférieure à

0.2 fois celle du mode  $h_+$ . L'amplitude maximale est

$$h_{+, \max} \simeq 2.5 \times 10^{-21} \left[ \frac{1 \text{ Mpc}}{r} \right] \left[ \frac{M}{M_\odot} \right]. \quad (8.38)$$

Le maximum d'émission est situé dans l'intervalle  $7 - 16(M_\odot/M)$  kHz.

L'efficacité du processus d'émission gravitationnelle  $\varepsilon$  définie par la formule (8.16) est représentée sur la Fig. 8.8 : elle est très basse : moins de  $6 \times 10^{-4}$  de la masse initiale est convertie en rayonnement gravitationnel. En fonction du moment cinétique, l'efficacité obéit à la loi approchée (valable pour  $a < a_{\text{crit}}$ )

$$\varepsilon(a) \simeq \min \{ 1.4 \times 10^{-3} a^4, \varepsilon_{\max} \}, \quad (8.39)$$

où  $\varepsilon_{\max} = 6 \times 10^{-4}$  pour  $f_p = 0.01$  et  $\varepsilon_{\max} = 1 \times 10^{-4}$  pour  $f_p = 0.4$ .

## 8.7 Coalescence d'un système binaire

### 8.7.1 Généralités

La *coalescence* d'un système binaire d'étoiles à neutrons constitue une source importante de rayonnement gravitationnel dans la bande de fréquence des détecteurs du type LIGO/VIRGO. Il s'agit d'un événement rare dans une galaxie donnée : de  $10^{-5}$  à  $3 \times 10^{-4}$  par an, selon les auteurs. Par contre l'amplitude est importante, de l'ordre de  $h \sim 3 \times 10^{-21}$  à la distance de 10 Mpc, si bien qu'on peut tabler sur des événements extragalactiques. VIRGO pourra détecter les coalescences jusqu'à  $\sim 50$  Mpc. A cette distance, on peut s'attendre à un nombre d'événements par an compris entre  $10^{-2}$  et quelques unités. Notons que l'intensité du signal est proportionnelle à l'inverse de la distance, et non du carré de la distance comme en optique, si bien qu'une amélioration de la sensibilité par un facteur 2 permettra d'explorer un volume d'Univers 8 fois plus grand, et par conséquent de détecter 8 fois plus d'événements par unité de temps. Il est fort probable qu'une génération suivante de détecteurs puisse atteindre une sensibilité dix fois meilleure. Dans ce cas, on devrait observer des coalescences quasi-quotidiennement, même dans l'hypothèse la plus pessimiste, et ce, jusqu'à une distance cosmologique : 0.5 Gpc, avec toutes les implications que cela entraîne.

Une retombée importante de l'observation gravitationnelle de la coalescence d'étoiles à neutrons concerne l'équation d'état de la matière nucléaire à des densités de 4 à 10 fois la densité nucléaire. En effet, l'équation d'état détermine l'instant précis où les mouvements des deux étoiles perdent leur cohérence, et apparaît clairement dans le signal gravitationnel comme une chute de l'amplitude (Figure 8.9).

Il est important de remarquer que la sensibilité des interféromètres de la première génération (§ 8.4) sera suffisante pour donner des contraintes significatives aux modèles d'évolution stellaire, même dans l'hypothèse d'une détection nulle. En effet, l'incertitude d'un facteur 100 sur le taux de coalescence mentionnée plus haut est due à la méconnaissance de la fonction de masse des binaires massives ainsi qu'à notre incapacité à modéliser correctement la phase d'évolution de l'étoile à neutrons dans l'enveloppe de son compagnon.

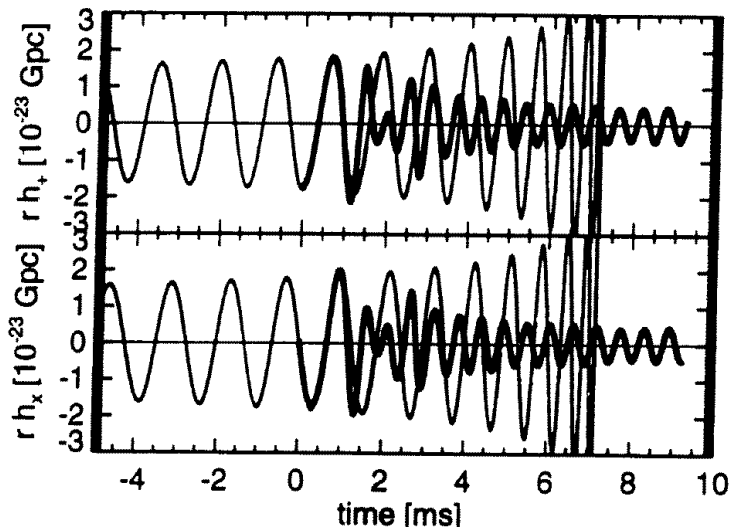


FIG. 8.9 – Evolution des deux modes  $h_+$  et  $h_\times$  du rayonnement gravitationnel issu de la coalescence d'un système binaire d'étoiles à neutrons. La courbe en trait gras correspond à des calculs hydrodynamiques pour deux étoiles à neutrons de masse baryonique  $1.6 M_\odot$  effectués par Ruffert et al. (1996) alors que la courbe en trait fin correspond au signal émis par deux masses ponctuelles.

L'astronomie gravitationnelle apportera peut-être également la réponse à l'un des plus grands mystères de l'astrophysique contemporaine, celui des sursauts gamma. Découverts il y a 30 ans par les satellites militaires américains Vela, leur origine reste inconnue malgré les efforts des observateurs et des théoriciens. Aujourd'hui on pense qu'il s'agit d'événements à des distances cosmologiques, leur isotropie spatiale ayant été mise en évidence par le satellite Compton-GRO. Les mécanismes d'émission les plus à la mode invoquent la coalescence de deux étoiles à neutrons ou d'une étoile à neutrons et d'un trou noir. D'autres mécanismes plus exotiques ont été proposés tels que l'annihilation d'une corde cosmique. Cela montre le marasme dans ce domaine. Il est clair que la détection simultanée d'un sursaut gamma et du signal gravitationnel d'une coalescence résoudreait cette énigme. Comme bonus, les différents paramètres du signal permettront de distinguer la coalescence de deux étoiles à neutrons et celle d'un trou noir et d'une étoile à neutrons.

### 8.7.2 Evolution d'un système binaire serré

Une part non négligeable des étoiles étant dans des systèmes binaires serrés, l'évolution stellaire doit produire un assez grand nombre de systèmes comprenant deux étoiles à neutrons ou une étoile à neutrons et un trou noir, ou encore deux trous noirs. On connaît actuellement au moins cinq systèmes de deux étoiles à neutrons, observés sous forme de pulsars binaires, l'exemple le plus célèbre étant PSR B1913+16, découvert en 1974 par Hulse & Taylor (1975). Cela représente 1 % du nombre total de pulsars catalogués. Il convient de noter que beaucoup de systèmes binaires d'étoiles à neutrons sont sans doute

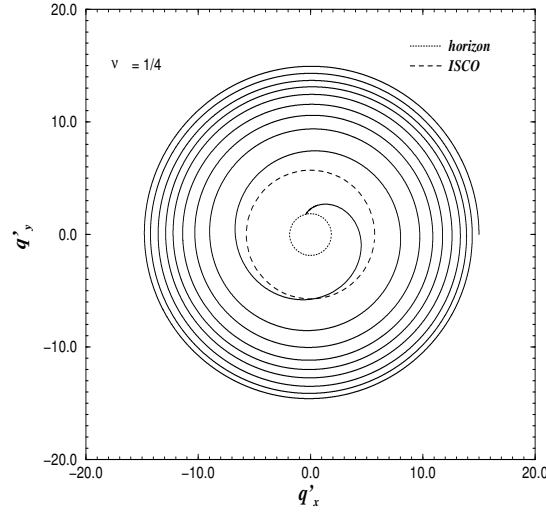


FIG. 8.10 – Evolution de l'orbite relative d'un système binaire serré de deux masses ponctuelles identiques. La courbe en pointillés correspond à la dernière orbite stable [d'après Buonanno & Damour (1999)].

inobservables<sup>1</sup>, soit parce que la Terre n'est pas balayée par le “phare” du pulsar, soit parce que ce sont des étoiles à neutrons âgées dont le champ magnétique est trop faible pour entretenir le phénomène de pulsar.

Or, en Relativité Générale, un système binaire ne peut être strictement stationnaire car il émet nécessairement des ondes gravitationnelles, qui emportent de l'énergie et du moment cinétique. L'émission d'ondes gravitationnelles s'explique très bien par la formule du quadrupôle (8.2) puisque un système de deux objets en orbite autour de leur centre de masse possède un moment quadrupolaire variable (même si l'on suppose les orbites fixes). Le rayonnement gravitationnel se traduit par une perte d'énergie et de moment cinétique qui conduit à la circularisation des orbites et surtout à la décroissance de leurs rayons : on a donc un *mouvement en spirale* descendant vers le centre de masse (cf. Fig. 8.10). Lorsque la séparation des deux astres compacts atteint une valeur critique, les effets de courbure de l'espace-temps entraînent le “plongeon” des deux astres l'un vers l'autre (cf. Fig. 8.10). Quantitativement, lorsque deux étoiles à neutrons sont séparées de 200 km, la période orbitale est 0.02 s, la fréquence d'émission gravitationnelle 100 Hz et il reste environ 2 s avant la coalescence, soit environ 200 orbites.

Le rayonnement gravitationnel émis pendant la phase quasi-newtonienne du rapprochement est bien connu et se calcule en utilisant la formule du quadrupôle (8.2) [cf. § 36.6 de Misner, Thorne & Wheeler (1973) et § 16.4 de Shapiro & Teukolsky (1983)]. Les deux axes de polarisation  $e_{(x)}$  et  $e_{(y)}$  sont le grand et le petit axe de la projection du plan de l'orbite (supposée circulaire) sur le plan du ciel et les amplitudes sont [cf. Thorne (1987),

<sup>1</sup>dans le domaine électromagnétique ! mais pas dans le domaine gravitationnel, ainsi que nous allons le voir.

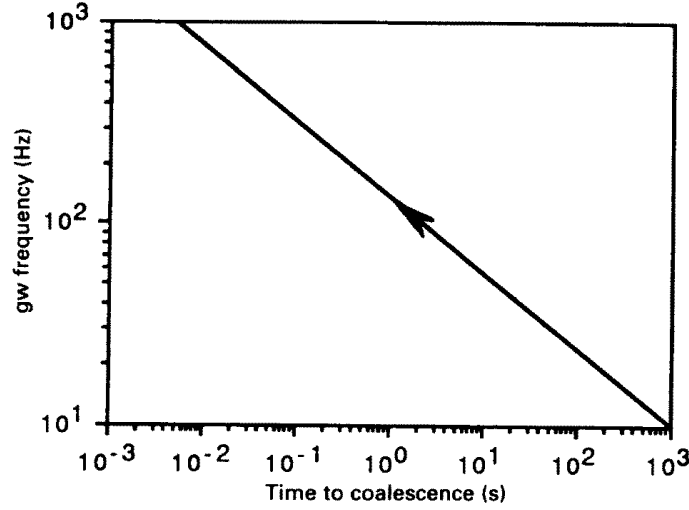


FIG. 8.11 – Evolution de la fréquence des ondes gravitationnelles émises dans la phase de rapprochement quasi-circulaire d'un système binaire d'étoiles à neutrons de masses  $M_1 = M_2 = 1.4M_\odot$  [d'après Blair (1991)].

Eq.(42)]

$$h_+(r, \theta, t) = 6.0 \times 10^{-21} (1 + \cos^2 \theta) \left[ \frac{1 \text{ Mpc}}{r} \right] \left[ \frac{\mu}{M_\odot} \right] \left[ \frac{M}{M_\odot} \right]^{\frac{2}{3}} \left[ \frac{f}{1 \text{ kHz}} \right]^{\frac{2}{3}} \cos(2\pi ft) \quad (8.40)$$

$$h_\times(r, \theta, t) = \pm 1.2 \times 10^{-20} \cos \theta \left[ \frac{1 \text{ Mpc}}{r} \right] \left[ \frac{\mu}{M_\odot} \right] \left[ \frac{M}{M_\odot} \right]^{\frac{2}{3}} \left[ \frac{f}{1 \text{ kHz}} \right]^{\frac{2}{3}} \sin(2\pi ft), \quad (8.41)$$

où  $r$  est la distance de l'observateur,  $\theta$  l'angle que forme l'axe du plan de l'orbite par rapport à la direction source-observateur,  $M := M_1 + M_2$  la masse totale du système,  $\mu := M_1 M_2 / (M_1 + M_2)$  la masse réduite et  $f$  la fréquence d'émission, égale au double de la fréquence orbitale, et donnée par la formule :

$$f = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{5}{256} \frac{c^5}{G^{5/3}} \frac{1}{M^{2/3} \mu} \frac{1}{t_{\text{coal}} - t} \right]^{3/8}, \quad (8.42)$$

$t_{\text{coal}}$  étant l'intervalle de temps entre l'instant  $t = 0$  et l'instant où le rayon de l'orbite s'annule :

$$t_{\text{coal}} = \frac{5}{256} \frac{c^5}{G^3} \frac{[a(t=0)]^4}{M^2 \mu}, \quad (8.43)$$

où  $a(t=0)$  est la séparation spatiale des deux astres à l'instant  $t = 0$ . Il faut retenir des formules ci-dessus que  $h_+$  et  $h_\times$  sont en quadrature de phase; ils ont la même amplitude si on observe l'orbite de face ( $\theta = 0$ );  $h_\times = 0$  si l'observateur est dans le plan de l'orbite ( $\theta = \pi/2$ ); la fréquence  $f$  augmente avec le temps ainsi que l'amplitude de  $h_+$  et  $h_\times$  (comme  $f^{2/3}$ ). L'évolution de la fréquence est représentée sur la Fig. 8.11 pour deux étoiles à neutrons de masses  $M_1 = M_2 = 1.4M_\odot$ .

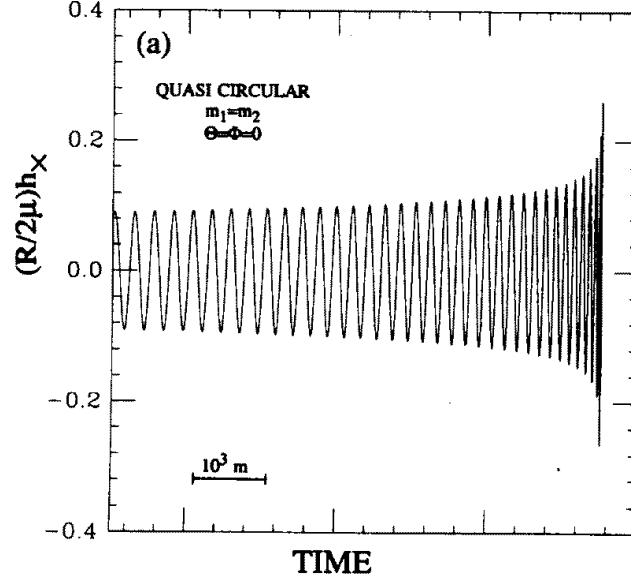


FIG. 8.12 – Partie  $h_x$  de l'onde gravitationnelle émise par un système binaire le long de l'axe de l'orbite ( $\theta = 0$ ), d'après les calculs Post-Newtoniens de Lincoln & Will (1990). Les deux astres ont la même masse,  $R$  est la distance d'observation et  $\mu$  la masse réduite. L'échelle de temps indiquée,  $10^3 m$ , correspond à 14 ms pour des étoiles de masse  $m_1 = m_2 = 1.4M_\odot$ .

Bien entendu, les formules ci-dessus ne sont valables qu'à l'approximation newtonienne. Or la détection par les interféromètres du type VIRGO requiert une connaissance plus précise de la forme d'onde<sup>2</sup>. Il faut donc pousser les calculs en prenant en compte les termes relativistes jusqu'au second, voire troisième, ordre Post-Newtonien : la forme d'onde à l'ordre 2-PN a été obtenue par Blanchet et al. (1996) ; les calculs 3-PN sont presque achevés (cf. Blanchet 2002 pour une revue). Le  $h_x(t)$  issu d'un calcul Post-Newtonien est représenté sur la Fig. 8.12 ; on observe la même allure générale que celle décrite ci-dessus.

Lorsque la phase de spirale quasi-circulaire prend fin et que le plongeon s'amorce, l'évolution dépend de la nature des astres considérés (étoile à neutrons ou trou noir) et de l'équation d'état (dans le cas d'une étoile à neutrons). Ce peut être :

- La *coalescence* des deux objets, conduisant éventuellement à la formation d'un trou noir.
- La destruction de l'une des étoiles à neutrons par les forces de marée, conduisant à la formation d'un disque ou d'un "cocon" de matière autour de l'astre le plus massif.

L'étude théorique de ces phénomènes passe en toute rigueur par des calculs hydrodynamiques à trois dimensions dans le cadre de la Relativité Générale complète. Malheureusement on est pour l'instant encore assez loin de telles simulations.

<sup>2</sup>La technique d'extraction du signal du bruit est en effet celle du *filtre adapté*, qui nécessite la connaissance a priori de la forme du signal recherché.

### 8.7.3 Coalescence de deux trous noirs

Tout comme la coalescence de deux étoiles à neutrons discutée ci-dessus, une coalescence mettant en jeu un ou deux trous noirs est une source appréciable d'ondes gravitationnelles. Les modèles d'évolution stellaire prévoient la formation de systèmes doubles étoile à neutrons - trou noir et trou noir - trou noir. Bien entendu le taux de coalescence de ces objets est bien plus incertain que celui des systèmes étoile à neutrons - étoile à neutrons. La chose intéressante est que l'intensité du signal est proportionnelle à  $M^{5/6}$  (pour deux objets de même masse  $M$ ). Pour des trous noirs stellaires avec  $M = 10 M_{\odot}$ , la coalescence est détectable jusqu'à  $\sim 100$  Mpc avec la première génération de détecteurs. Il est bien possible que le faible taux de coalescence des binaires de trous noirs soit compensé par la taille du volume d'Univers accessible et que les premières coalescences détectées mettent en jeu des trous noirs et non deux étoiles à neutrons. Signalons qu'aux Etats-Unis, la NSF a financé de manière conséquente le projet "Grand Challenge" qui consiste dans la simulation numérique de la coalescence de deux trous noirs (pour tous les détails : <http://jean-luc.ncsa.uiuc.edu/GC/GC.html>). Néanmoins, ce projet n'a pas encore abouti : la simplification apportée par l'absence d'hydrodynamique est moins grande que la complication introduite par la nécessité d'effectuer des calculs en Relativité Générale 3-D sur des espaces-temps contenant des horizons (où les coefficients métriques utilisés généralement sont singuliers).

### 8.7.4 Intérêt astrophysique de l'observation gravitationnelle des coalescences

L'observation des ondes gravitationnelles issues de la coalescence des systèmes binaires aura des conséquences importantes pour l'astrophysique et la cosmologie :

- Chaque observation fournit la valeur du paramètre  $\mu M^{2/3}$  (cf. Eq.(8.42)) et donc des limites sur la masse des objets compacts. Si on parvient à observer des effets Post-Newtoniens dans le signal (cf. Blanchet & Schäfer 1993), on peut même obtenir les masses individuelles des deux objets.
- l'observation détaillée de la phase de coalescence, comparée à des simulations numériques, permettra de distinguer la coalescence de trous noirs de celle d'étoiles à neutrons. Dans ce dernier cas, la détermination de l'instant du début d'échange de matière fournirait des contraintes importantes sur les équations d'état de la matière ultra-dense.
- L'observation des ondes gravitationnelles en coïncidence avec des sursauts gamma confirmerait l'hypothèse de la coalescence de deux étoiles à neutrons comme source des sursauts gamma — hypothèse avancée depuis la découverte de l'origine extragalactique des sursauts gamma par le satellite GRO-Compton (Meegan et al. 1992).
- L'observation du même événement par trois détecteurs différents permettra de connaître la distance  $r$  de la source, sans rien supposer sur les masses des deux objets. En effet, d'après (8.40)-(8.41), on a  $h = K\mu M^{2/3} f^{2/3} r^{-1}$  et, d'après (8.42),  $\tau := f/\dot{f} = K'\mu M^{2/3} f^{11/3}$ . La mesure de  $h$ ,  $\tau$  et  $f$  donne donc  $f^2 h \tau = K'' r^{-1}$ , où  $K''$  est un facteur qui ne dépend que de la direction et de l'orientation de la source



et qui est mesuré par au moins trois détecteurs. On en déduit  $r$ , c'est-à-dire une distance qui peut être cosmologique ( $\sim$  Gpc) et ce, sans utiliser la loi de Hubble. Schutz (1986) a montré que la multiplication de telles observations peut permettre de corrélérer la distribution des coalescences avec la distribution optique des amas de galaxies et d'en déduire la constante de Hubble  $H_0$ , ainsi que le paramètre de décélération  $q_0$ .

## 8.8 Autres sources

### 8.8.1 Sources périodiques

Les sources périodiques quasi-stationnaires d'ondes gravitationnelles sont en général faibles, mais elles ont l'avantage de pouvoir être observées longtemps, donc avec un bien meilleur rapport signal/bruit que les sources éphémères.

#### Etoiles à neutrons en rotation

En Relativité générale, un objet axisymétrique en rotation rapide n'émet pas d'ondes gravitationnelles. Par contre, tout écart à la symétrie axiale se traduit par une émission gravitationnelle, à essentiellement deux fréquences : la fréquence de rotation de l'étoile et deux fois celle-ci et d'amplitude

$$h_0 = 4.2 \times 10^{-24} \left( \frac{\text{ms}}{P} \right)^2 \left( \frac{\text{kpc}}{r} \right) \left( \frac{I}{10^{38} \text{ kg m}^2} \right) \left( \frac{\epsilon}{10^{-6}} \right), \quad (8.44)$$

où  $P$  est la période de rotation de l'étoile,  $r$  sa distance,  $I$  son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation et  $\epsilon$  mesure la déviation (relative) à la symétrie axiale (pour un objet newtonien,  $\epsilon$  serait défini comme  $\epsilon = |I_{xx} - I_{yy}|/I$ , où  $I_{xx}$  et  $I_{yy}$  sont les deux valeurs propres du tenseur d'inertie dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation).

Différents mécanismes astrophysiques conduisant à  $\epsilon \neq 0$  pour des étoiles à neutrons ont été proposés dans la littérature (pour une revue cf. Haensel 1997 et Bonazzola & Gourgoulhon 1997) on peut citer (i) l'irrégularité de la croûte solide ("montagnes"), (ii) la déformation due au champ magnétique, (iii) une brisure spontanée de la symétrie axiale entretenue par un apport régulier de moment cinétique (accrétion dans un système binaire).

En ce qui concerne la détection, l'émission a l'avantage d'être permanente, ce qui permet d'intégrer sur des temps longs (Eq. (8.34)) pour augmenter la sensibilité. Ainsi VIRGO pourra détecter des signaux périodiques d'amplitude  $h \sim 3 \times 10^{-27}$  en trois ans d'intégration, alors que le seuil de détectabilité d'un sursaut sera  $h \sim 10^{-21}$ . Par exemple, le pulsar du Crabe sera détectable par VIRGO si sa déformation vis-à-vis de la symétrie axiale (ellipticité) atteint  $5 \times 10^{-6}$ , ce qui représente un peu moins d'un pourcent de l'ellipticité maximale définie comme la valeur de la déformation qui rendrait compte de l'intégralité de la perte d'énergie cinétique du pulsar sous forme de rayonnement gravitationnel. Cette perte d'énergie cinétique est mesurée par l'augmentation de la période du pulsar ( $\dot{P} = 4 \times 10^{-13}$  pour le Crabe) et est attribuée en grande partie au rayonnement

dipolaire magnétique (cf. le Chapitre sur les pulsars). L'observation d'un tel rayonnement gravitationnel serait un outil formidable pour sonder l'intérieur des étoiles à neutrons. Par exemple, si l'émission est due à la déformation induite par le champ magnétique, cela veut dire que l'intérieur est nécessairement supraconducteur et on peut mesurer l'angle entre l'axe dipolaire magnétique et l'axe de rotation (cf. Bonazzola & Gourgoulhon 1996), une donnée importante pour tous les modèles de magnétosphère des pulsars.

## Etoiles binaires

Nous avons vu au § 8.7.2 que tout système binaire émet des ondes gravitationnelles, suivant la loi (8.40)-(8.41). Cependant l'émission n'est vraiment importante que pour la phase finale de coalescence d'un système serré d'astres compacts (facteur  $f^{2/3}$  dans (8.40)-(8.41)). Les autres systèmes binaires ont des périodes de l'ordre de l'heure ou du jour, ce qui conduit à une très basse fréquence d'émission  $f \sim 10^{-3}$  Hz à  $f \sim 10^{-5}$  Hz. Les sources les plus proches — constituées par des binaires de naines blanches en interaction (Am CVn, PG 1346+082, V803 Cen, GP Com) ou bien des binaires d'étoiles non dégénérées ( $\iota$  Boo, WZ Sge) — pourraient cependant donner une amplitude non négligeable :  $h_{\max} \sim 10^{-21}$  (cf. Hils, Bender & Webbink 1990 ou Blair 1991).

### 8.8.2 Trous noirs super-massifs

Il est très probable que le noyau de certaines galaxies — dont la nôtre — contienne un trou noir super-massif, de masse  $M_{\text{bh}} \sim 10^4$  à  $10^8 M_{\odot}$ . Lorsqu'une étoile de masse  $M_*$  est absorbée par ce type de trou noir, du rayonnement gravitationnel est émis, avec une fréquence  $f \sim 10^{-4}(10^8 M_{\odot}/M_{\text{bh}})$  Hz et une amplitude  $h_{\max} \sim 2 \times 10^{-21}(M_*/M_{\odot})(10 \text{ Mpc}/r)$  (Thorne 1987).

Par ailleurs, lors de la collision de deux galaxies, des binaires de trous noirs super-massifs pourraient se former (pour des détails, cf. Rees 1983). La coalescence d'un tel système serait alors la source d'un rayonnement gravitationnel très important, donnant une amplitude  $h_{\max} \sim 10^{-16}$  à une distance aussi grande que  $r \sim 3$  Gpc (distance cosmologique!), mais à très basse fréquence ( $f \sim 10^{-3}$  Hz), dans la bande de l'interféromètre spatial LISA (§ 8.4). LISA pourra détecter la chute en spirale d'un objet compact de masse stellaire dans un trou noir massif ( $M \sim 10^6 M_{\odot}$ ) à une distance aussi grande que 3 Gpc. LISA pourra également voir toutes les coalescences de deux trous noirs massifs de masses comprises entre  $3 \times 10^4$  et  $10^6 M_{\odot}$  jusqu'à des distances cosmologiques ( $z \sim 1$ ). De telles coalescences sont sans doute rares, mais s'il s'en produit au moins une par an dans *tout* l'Univers en deçà de notre horizon, LISA la verra. Les implications cosmologiques sont énormes : si LISA observe la coalescence de deux trous noirs de  $10^6 M_{\odot}$  à  $z \sim 1$ , le rapport signal-sur-bruit sera si grand ( $> 10^4$ !) que l'on pourra localiser la source à une minute d'arc près et identifier l'amas de galaxies où se produit la coalescence. L'observation *d'un seul* événement donnera alors immédiatement  $H_0$  et  $q_0$  avec une précision meilleure que 1%.

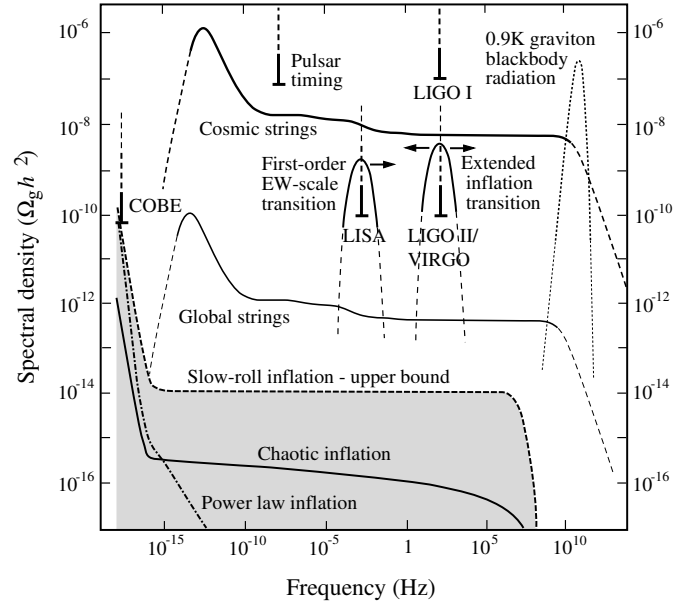


FIG. 8.13 – Spectre calculé du fond cosmologique de rayonnement gravitationnel émis (i) par les cordes cosmiques, (ii) par des transitions de phases dans l’Univers primordial, (iii) par différents modèles d’inflation, (iv) par les gravitons issus de l’ère de Planck. Sont également représentées les limites déjà atteintes (COBE et chronométrage des pulsars) ainsi que les seuils de détections des interféromètres VIRGO, LIGO et LISA [d’après Battye & Shellard (1996)].

### 8.8.3 Fond stochastique

Il existe certainement un rayonnement de fond stochastique créé par la superposition des ondes gravitationnelles émises par les étoiles binaires “normales”, les supernovæ extragalactiques, et toutes les sources mentionnées plus haut. A ce fond vient s’ajouter un rayonnement d’origine *cosmologique* produit aux premiers instants après le Big-Bang : fluctuations quantiques, cordes cosmiques, formations de domaines dans les transitions de phase, etc<sup>3</sup>...

Un intérêt du fond cosmologique est que les ondes gravitationnelles se sont découplées de la matière bien plus tôt que les ondes électromagnétiques (rayonnement à 3 K) : à  $t \sim 10^{-43}$  s (temps de Planck) après le Big-Bang contre  $t \sim 10^6$  ans ! Les ondes gravitationnelles constituent le seul moyen d’accéder directement aux conditions physiques de l’ère de Planck, c’est-à-dire aux conditions initiales de tout modèle cosmologique.

Une importante émission gravitationnelle pourrait également avoir eu lieu plus tard, lors de transitions de phases, notamment à la fin de la période d’inflation. Par ailleurs, si des cordes cosmiques ont été formées dans l’Univers primordial (à  $\sim 10^{-35}$  s après le Big-Bang), leurs vibrations et leur désintégration éventuelle ont pu contribuer de manière significative au fond primordial d’ondes gravitationnelles (cf. Peter 1995). Les spectres théoriques de ces différents rayonnements primordiaux sont représentés sur la Figure 8.13. L’ordonnée de la figure ne représente pas l’amplitude  $h$  des ondes gravitationnelles mais leur densité d’énergie rapportée à la densité de fermeture de l’Univers :  $\Omega_{\text{GW}} \propto h^2 f^2$ . Les

<sup>3</sup>ajoutez vos objets exotiques favoris...

observations d'anisotropie dans le fond électromagnétique à 3 K par COBE ont fourni la borne supérieure  $\Omega_{\text{GW}}(3 \times 10^{-17} \text{ Hz}) < 7 \times 10^{-11}$ . De plus, le chronométrage des pulsars millisecondes a conduit à  $\Omega_{\text{GW}}(4 \times 10^{-9} \text{ Hz}) < 6 \times 10^{-8}$ . Comme on le voit sur la Figure 8.13, ces observations ne sont pas trop contraignantes pour les modèles théoriques. Par contre, les observations de VIRGO et LISA devraient être conclusives.

## 8.9 Conclusion

Depuis l'Antiquité, le rayonnement électromagnétique a été le principal vecteur d'information en Astronomie. Aujourd'hui l'observation des phénomènes astrophysiques s'effectue presque sans discontinuité sur plus de 20 décades du spectre électromagnétique. Les rares "trous" qui restent seront comblés d'ici peu. Les astrophysiciens cherchent et utilisent déjà d'autres vecteurs d'information. Parmi les plus anciens citons les vecteurs baryoniques : météorites et rayons cosmiques. Les météorites nous ont apporté d'importantes informations sur le système solaire. Par contre, l'étude de la composante hadronique du rayonnement cosmique est restée un champ à part de l'astrophysique. Il est fort possible que le grand détecteur du projet Auger ( $5000 \text{ km}^2$ ) fournisse des informations importantes sur l'Univers primordial.

Ces dernières décennies ont vu l'essor de l'astrophysique neutrinique à basse énergie ( $E < 50 \text{ MeV}$ ) : détection des neutrinos solaires et des neutrinos de la supernova 1987A. Malheureusement elle semble avoir atteint ses limites : le détecteur Super-Kamiokande n'a qu'un volume dix fois plus grand que l'ancien détecteur Kamiokande (celui qui a vu les neutrinos de SN 1987A, cf. § 4.4.4). Il ne peut donc pas détecter les neutrinos provenant des galaxies proches, les Nuages de Magellan mis à part. Les détecteurs de neutrinos de plus haute énergie, qui exploitent la mer ou les glaces de l'Antarctique pourront par contre avoir un bel avenir.

Comme on l'a vu, l'astronomie gravitationnelle peut apporter beaucoup d'informations, dans le domaine de l'astrophysique ou d'une physique qui ne peut être pratiquée en laboratoire (équation d'état de la matière à des densités super-nucléaires). Contrairement aux autres types d'astronomies, elle en est à ses premiers pas. La chose importante à retenir est que la sensibilité des premiers détecteurs est déjà suffisante pour donner des contraintes significatives aux modèles d'évolution stellaire et de structure des étoiles à neutrons, même dans l'hypothèse (très) pessimiste d'une détection nulle par les premiers exemplaires d'instruments.

Enfin, remarquons que presque chaque fois qu'un nouveau type d'instrument a été mis en service, il a conduit à la découverte d'astres ou de phénomènes que l'on ne soupçonnait pas jusqu'alors (fuite des galaxies, quasars, pulsars, fond cosmologique à 3 K, sursauts gamma, etc...). La brève revue effectuée ici est évidemment limitée aux sources prévisibles au vu de nos connaissances astrophysiques actuelles. Qui peut imaginer les mondes nouveaux qu'aura dévoilés l'astronomie des ondes gravitationnelles à la fin du XXI<sup>ème</sup> siècle ?

## Bibliographie

Pour plus de détails sur la théorie et la détection des ondes gravitationnelles, on pourra consulter les articles de revues ou les ouvrages suivants :

- Blanchet L. 2002 : *Gravitational Radiation from Post-Newtonian Sources and Inspiralling Compact Binaries*, *Living Rev. Relat.* **5**, 3, en ligne sur [<http://www.livingreviews.org/lrr-2002-3>]  
 Hakim R. 1994, *Gravitation relativiste*, InterEditions / CNRS Editions (Paris)  
 Hartle J.B. 2003 : *Gravity, an introduction to Einstein's General Relativity*, Addison Wesley (San Fransisco)  
 Marck J.-A., Lasota J.-P. (eds.) 1997 : *Relativistic Gravitation and Gravitational Radiation*, Cambridge University Press, Cambridge, England.  
 Schutz B.F. 1999 : *Gravitational wave astronomy*, *Class. Quantum Grav.* **16**, A131  
 Thorne K.S. 1998 : *Probing black holes and relativistic stars with gravitational waves*, in *Black holes and relativistic stars*, Ed. Wald R.W., University of Chicago Press (Chicago)  
 Tournenc P. 1992 : *Relativité et gravitation*, Armand Colin (Paris)

Autres références mentionnées dans le texte :

- Ando M. et al. 2001 : *Stable operation of a 300-m laser interferometer with sufficient sensitivity to detect gravitational-wave events within our Galaxy*, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 3950  
 Bardeen J.M., Piran T. 1983 : *General relativistic axisymmetric rotating systems : coordinates and equations*, *Phys. Rep.* **96**, 205  
 Battye R.A., Shellard E.P.S., 1996, submitted to the *Gravity Research Foundation* essay competition (preprint : astro-ph/9604059).  
 Blair D.G. 1991 : *Sources of gravitational waves*, in *The detection of gravitational waves*, Ed. D.G. Blair, Cambridge University Press (Cambridge)  
 Blanchet L., Damour T., Schäfer G. 1990 : *Post-Newtonian hydrodynamics and post-Newtonian gravitational wave generation for numerical relativity*, *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **242**, 289  
 Blanchet L., Iyer B.R., Will C.M., Wiseman A.G. 1996 : *Gravitational waveforms from inspiralling compact binaries to second-post-Newtonian order*, *Class. Quantum Grav.* **13**, 575  
 Blanchet L., Schäfer G. 1993 : *Gravitational wave tails and binary star systems*, *Class. Quantum Grav.* **10**, 2699  
 Bonazzola S., Friebe J., Gourgoulhon E. 1996 : *Spontaneous symmetry breaking of rapidly rotating stars in general relativity*, *Astrophys. J.* **460**, 379  
 Bonazzola S., Friebe J., Gourgoulhon E. 1998 : *Spontaneous symmetry breaking of rapidly rotating stars in general relativity : influence of the 3D-shift vector*, *Astron. Astrophys.*, **331**, 280  
 Bonazzola S., Gourgoulhon E. 1996 : *Gravitational waves from pulsars : emission by the magnetic field induced distortion*, *Astron. Astrophys.* **312**, 675  
 Bonazzola S., Gourgoulhon E. 1997 : *Gravitational waves from neutron stars*, dans (Marck & Lasota 1997)  
 Bonazzola S., Marck J.A. 1993 : *Efficiency of gravitational radiation from axisymmetric and 3D stellar collapse*, *Astron. Astrophys.* **267**, 623  
 Buonanno A., Damour T. 1999 : *Effective one-body approach to general relativistic two-body dynamics*, *Phys. Rev. D* **59**, 084006  
 P. Haensel 1997, dans (Marck & Lasota 1997)  
 Hils D., Bender P.L., Webbink R.F. 1990 : *Gravitational radiation from the Galaxy*, *Astrophys. J.* **360**, 75  
 King A.R. 1993, in *Galactic high-energy astrophysics, high-accuracy timing and positional astronomy (EADN Astrophysics School IV)*, eds. J. van Paradijs, H.M. Maitzen. Springer-Verlag (Berlin)  
 Lincoln C.W., Will C.M. 1990 : *Coalescing binary systems of compact objects to (post)<sup>5/2</sup>-Newtonian order : Late-time evolution and gravitational-radiation emission*, *Phys. Rev. D* **42**, 1123  
 Marck J.A., Bonazzola S. 1992 : *Gravitational radiation from 3-D gravitational stellar core collapse*, in *Approaches to Numerical Relativity*, Ed. R. d'Inverno, Cambridge University Press (Cambridge)  
 Meegan C.A., Fishman G.J., Wilson R.B., Paciesas W.S. 1992 : *Spatial distribution of gamma-ray bursts observed by BATSE*, *Nature* **355**, 143

- Misner C.W., Thorne K. S., Wheeler J. A. 1973 : *Gravitation*, Freeman and Co. (New York)
- Mönchmeyer R., Schäfer G., Müller E., Kates R.E. 1991 : *Gravitational waves from the collapse of rotating stellar cores*, *Astron. Astrophys.* **246**, 417
- Müller E., Janka H.T. 1997 : *Gravitational radiation from convective instabilities in type II supernova explosions*, *Astron. Astrophys.* **317**, 140
- Peter P. 1995 : *Journal des Astronomes Français*, **49**, 15
- Rees M.J. 1983 : *Extragalactic sources of gravitational waves*, in *Gravitational radiation — Les Houches 1982*, Ed. N. Deruelle & T. Piran, North Holland (Amsterdam)
- Ruffert M., Janka H.T., Schäfer G. 1996 : *Astron. Astrophys.* **311**, 532
- Schäfer G. 1992 : *Gravitational waves from rotating collapse*, in *Relativistic astrophysics and cosmology, Proc. of the Tenth Potsdam Seminar*, Ed. S. Gottlöber, J.P. Mückel, V. Müller, World Scientific (Singapore)
- Schutz B.F. 1986 : *Determining the Hubble constant from gravitational wave observations*, *Nature* **323**, 310
- Schutz B.F. 1987 : *Relativistic gravitational instabilities*, in *Gravitation in astrophysics (Cargèse 1986)*, Ed. B. Carter & J.B. Hartle, Plenum Press (New York)
- Schutz B.F. 1989 : *Gravitational wave sources and their detectability*, *Class. Quantum Grav.* **6**, 1761
- Schutz B.F. 1993a : *Cosmic sources of gravitational radiation*, *Class. Quantum Grav.* **10**, S135
- Schutz B.F. 1993b : *Sources of gravitational waves and their detectability*, in *General Relativity and Gravitation 1992, Proc. 13th International Conference on General Relativity and Gravitation*, Ed. R.J. Gleiser, C.N. Kozameh, O.M. Moreschi, Institute of Physics Publishing (Bristol)
- Schutz B.F. 2002 : *Lighthouses of gravitational wave astronomy*, in *Proceedings Lighthouses of the Universe, Garching, August 2001* [preprint : gr-qc/0111095]
- Stark R.F., Piran T. 1985 : *Gravitational-wave emission from rotating gravitational collapse*, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 891
- Stark R.F., Piran T. 1986 : *A numerical computation of the gravitational radiation from rotating gravitational collapse*, in *Proc. of the Fourth Marcel Grossmann Meeting on General Relativity*, Ed. R. Ruffini, Elsevier Science Publishers
- Thorne K.S. 1987 : *Gravitational radiation*, in *300 years of gravitation*, Ed. S.W. Hawking, W. Israel, Cambridge University Press (Cambridge)
- Weber J. 1974 : cité par Blair (1991)
- Weisberg J.M., Taylor J.H. 2003 : *The relativistic binary pulsar B1913+16*, in *Radio pulsars*, Eds. M. Bailes, D.J. Nice, S.E. Thorsett, ASP Conference Series **302**, 93
- Yamada S., Sato K. 1995 : *Gravitational radiation from rotational collapse of a supernova core*, *Astrophys. J.* **450**, 245
- Zwenger T., Müller E. 1997 : *Dynamics and gravitational wave signature of axisymmetric rotational core collapse*, *Astron. Astrophys.* **320**, 209

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
1.1	Définition des astres compacts . . . . .	3
1.2	Relation avec l'astrophysique des hautes énergies . . . . .	5
1.2.1	Accrétion sur un objet compact . . . . .	5
1.2.2	Effondrement gravitationnel d'une étoile . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Équilibre des objets froids et théorie des polytropes</b>	<b>7</b>
2.1	Introduction . . . . .	7
2.2	Équation d'état de la matière froide . . . . .	8
2.3	Équations de l'hydrostatique . . . . .	9
2.3.1	Forme générale . . . . .	9
2.3.2	Cas de la symétrie sphérique . . . . .	9
2.4	Théorie des polytropes . . . . .	11
2.4.1	Définition . . . . .	11
2.4.2	Équation de Lane-Emden . . . . .	11
2.4.3	Quantités globales . . . . .	13
2.4.4	Stabilité des polytropes . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Naines blanches</b>	<b>21</b>
3.1	Un petit historique . . . . .	21
3.1.1	Des étoiles petites et chaudes... . . . .	21
3.1.2	Des astres ultra-denses... . . . .	23
3.1.3	La mécanique quantique à la rescousse... . . . .	23
3.2	Formation des naines blanches . . . . .	24
3.2.1	Evolution d'une étoile de $1 M_{\odot}$ . . . . .	25
3.2.2	Devenir d'une étoile en fonction de sa masse . . . . .	27
3.3	Equation d'état . . . . .	28
3.3.1	Composition . . . . .	28
3.3.2	Pression d'un gaz dégénéré d'électrons . . . . .	28
3.3.3	Comparaison des différentes pressions . . . . .	30
3.3.4	Corrections à l'équation d'état . . . . .	30
3.4	Masse de Chandrasekhar . . . . .	31
3.4.1	Argument basé sur l'équation de l'hydrostatique . . . . .	32
3.4.2	Argument de Landau . . . . .	33

3.4.3	Valeur de la masse de Chandrasekhar . . . . .	34
3.4.4	Relation masse-rayon . . . . .	35
3.5	Masses et rayons observés . . . . .	35
3.5.1	Méthodes de mesure . . . . .	35
3.5.2	Distribution des masses . . . . .	40
3.6	Classification spectroscopique . . . . .	41
3.7	Refroidissement des naines blanches . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Supernovæ</b> . . . . .	<b>47</b>
4.1	Un petit historique . . . . .	47
4.1.1	...des observations . . . . .	47
4.1.2	... et de la théorie . . . . .	49
4.2	Données observationnelles . . . . .	51
4.2.1	Spectres . . . . .	51
4.2.2	Courbes de lumières . . . . .	53
4.2.3	Fréquence d'apparition et galaxies hôtes . . . . .	57
4.2.4	Caractéristiques observationnelles et mécanismes physiques . . . . .	57
4.3	Supernovæ thermonucléaires : SN Ia . . . . .	58
4.3.1	Grandes lignes du scénario "standard" . . . . .	58
4.3.2	Energétique de l'explosion . . . . .	59
4.3.3	Les incertitudes sur la combustion . . . . .	60
4.3.4	Scénarios alternatifs . . . . .	60
4.3.5	Application à la cosmologie . . . . .	61
4.4	Supernovæ gravitationnelles : SN II, Ib et Ic . . . . .	63
4.4.1	La pré-supernova . . . . .	63
4.4.2	L'effondrement et le rebond . . . . .	64
4.4.3	Energétique d'une SN II . . . . .	68
4.4.4	Emission de neutrinos . . . . .	70
4.4.5	Courbe de lumière . . . . .	71
4.4.6	SN Ic et sursauts gamma . . . . .	71
<b>5</b>	<b>Étoiles à neutrons</b> . . . . .	<b>75</b>
5.1	Introduction . . . . .	75
5.1.1	Un petit historique . . . . .	75
5.1.2	Les étoiles à neutrons comme laboratoires pour la physique fondamentale . . . . .	80
5.1.3	Les étoiles à neutrons comme "sondes" pour l'astrophysique . . . . .	81
5.2	Équations de structure : système T.O.V. . . . .	81
5.2.1	Hypothèses . . . . .	81
5.2.2	Système de Tolman-Oppenheimer-Volkoff . . . . .	82
5.2.3	Approximation de matière froide catalysée . . . . .	83
5.2.4	Intégration du système T.O.V. . . . .	83
5.2.5	Quantités globales . . . . .	84
5.3	Équation d'état . . . . .	85



5.3.1	Des incertitudes...	85
5.3.2	État fondamental de la matière en fonction de la densité	87
5.4	Masse maximale	89
5.4.1	Examen à partir des solutions du système T.O.V.	89
5.4.2	Influence de la rotation	91
5.4.3	Comparaison avec les masses mesurées	93
5.4.4	Mesure du rapport $M/R$	97
5.5	Vitesse de rotation maximale	97
5.5.1	Valeur théorique	97
5.5.2	Comparaison avec les vitesses observées	98
5.6	Formation et évolution des étoiles à neutrons	99
5.6.1	Effondrement gravitationnel	99
5.6.2	“Recyclage” des pulsars	100
<b>6</b>	<b>Accrétion dans les systèmes binaires</b>	<b>103</b>
6.1	Considérations énergétiques	103
6.1.1	Luminosité d'accrétion	103
6.1.2	Luminosité d'Eddington	104
6.1.3	Domaine électromagnétique d'émission	105
6.2	Systèmes binaires serrés	106
6.2.1	Nomenclature	106
6.2.2	Forme et taille des orbites	106
6.2.3	Problème de Roche	107
6.2.4	Transfert de masse via le point de Lagrange $L_1$	112
6.3	Évolution du système binaire sous l'effet du transfert de masse	113
6.3.1	Évolution de la séparation et des lobes de Roche	113
6.3.2	Nécessité d'une perte de moment cinétique	114
6.3.3	Prise en compte de la structure interne du compagnon	115
6.4	Application : preuve de l'existence des ondes gravitationnelles	116
6.4.1	Explication de la période maximale $P_{\max} \simeq 12$ h	116
6.4.2	Explication des périodes comprises entre 3 h et 12 h	117
6.4.3	Explication du “trou” entre 2 h et 3 h	117
6.4.4	Explication du “pic” entre 80 min et 2 h	118
6.4.5	Explication de la période minimale $P_{\min} = 80$ min	118
6.4.6	Conclusion	118
6.5	Disques d'accrétion	119
6.5.1	Équations de conservation	119
6.5.2	Accrétion stationnaire	120
6.5.3	Disques képlériens	120
6.5.4	Puissance dissipée dans le disque	120

<b>7</b>	<b>Trous noirs</b>	<b>123</b>
7.1	Le concept de trou noir . . . . .	123
7.1.1	Définition . . . . .	123
7.1.2	Trous noirs “newtoniens” . . . . .	123
7.1.3	La solution de Schwarzschild . . . . .	124
7.1.4	Trous noirs relativistes . . . . .	126
7.1.5	Le trou noir comme objet astrophysique . . . . .	128
7.2	Propriétés élémentaires de la métrique de Schwarzschild . . . . .	128
7.2.1	Géodésiques et lois de conservation . . . . .	128
7.2.2	Effet Einstein . . . . .	131
7.3	Trous noirs dans les binaires X . . . . .	132
7.3.1	Le critère de masse . . . . .	133
7.3.2	Mise en évidence d’horizon des événements . . . . .	136
7.4	Trous noirs massifs dans les noyaux galactiques . . . . .	137
<b>8</b>	<b>Ondes gravitationnelles</b>	<b>139</b>
8.1	Introduction . . . . .	139
8.2	Quelques ordres de grandeur . . . . .	140
8.2.1	Formule du quadrupôle . . . . .	140
8.2.2	Flux d’énergie . . . . .	141
8.2.3	Luminosité gravitationnelle . . . . .	141
8.2.4	Amplitude de l’onde gravitationnelle . . . . .	143
8.3	Preuves observationnelles de l’existence des ondes gravitationnelles . . . . .	143
8.4	Détection des ondes gravitationnelles . . . . .	145
8.4.1	Les détecteurs . . . . .	145
8.4.2	Analyse du signal . . . . .	148
8.5	Sources astrophysiques de rayonnement gravitationnel . . . . .	151
8.6	Effondrements gravitationnels . . . . .	152
8.6.1	Supernovæ . . . . .	152
8.6.2	Effondrement d’une étoile à neutrons en trou noir . . . . .	153
8.7	Coalescence d’un système binaire . . . . .	155
8.7.1	Généralités . . . . .	155
8.7.2	Evolution d’un système binaire serré . . . . .	156
8.7.3	Coalescence de deux trous noirs . . . . .	160
8.7.4	Intérêt astrophysique de l’observation gravitationnelle des coalescences . . . . .	160
8.8	Autres sources . . . . .	161
8.8.1	Sources périodiques . . . . .	161
8.8.2	Trous noirs super-massifs . . . . .	162
8.8.3	Fond stochastique . . . . .	163
8.9	Conclusion . . . . .	164