

Relativité générale et trous noirs

Éricourgoulhon

Laboratoire Univers et Théories (LUTH)
Observatoire de Paris, CNRS, Université PSL, Université Paris Cité
Meudon, France

et

Laboratoire de Mathématiques de Bretagne Atlantique
CNRS, Université de Bretagne Occidentale
Brest, France

<https://luth.obspm.fr/~luthier/gourgoulhon>

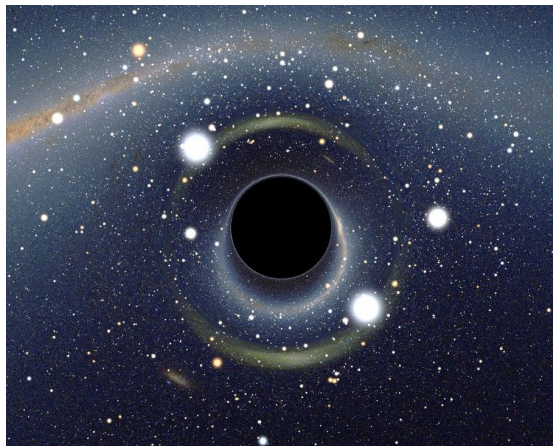
**Conférence pour les élèves de CPGE
École Normale Supérieure, Paris
22 mai 2024**

- 1 Qu'est-ce qu'un trou noir ?
- 2 L'espace-temps et la relativité générale
- 3 Les trous noirs dans la relativité générale
- 4 Les observations de trous noirs
- 5 Conclusions

Plan

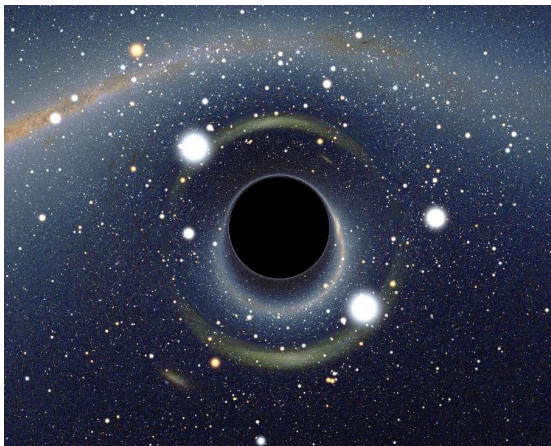
- 1 Qu'est-ce qu'un trou noir ?
- 2 L'espace-temps et la relativité générale
- 3 Les trous noirs dans la relativité générale
- 4 Les observations de trous noirs
- 5 Conclusions

Qu'est-ce qu'un trou noir ?



[Alain Riazuelo, 2007]

Qu'est-ce qu'un trou noir ?



[Alain Riazuelo, 2007]

Une définition en quelques mots :

Un **trou noir** est une région de l'Univers d'où rien, pas même la lumière, ne peut s'échapper.

La frontière (immatérielle) entre l'intérieur du trou noir et le reste de l'Univers est appelée **horizon des événements**.

Pourquoi la lumière ne peut-elle s'échapper ?

Réponse pour la mécanique newtonnienne (J. Michell 1784, Laplace 1796) :

C'est en raison de la **gravitation** :
la **vitesse de libération** dépasse la vitesse de la lumière

Pourquoi la lumière ne peut-elle s'échapper ?

Réponse pour la mécanique newtonnienne (J. Michell 1784, Laplace 1796) :

C'est en raison de la **gravitation** :
la **vitesse de libération** dépasse la vitesse de la lumière

Théorie de Newton de la gravitation :

La **vitesse de libération** d'un corps sphérique de masse M

et de rayon R est $V_{\text{lib}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$

avec $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$ (constante de Newton)

- Terre : $V_{\text{lib}} = 11 \text{ km/s}$
- Soleil : $V_{\text{lib}} = 617 \text{ km/s}$

La lumière ne s'échappe pas si
 $V_{\text{lib}} > c = 299\,792\,458 \text{ km/s}$



Calcul de la vitesse de libération

La **vitesse de libération** est la vitesse verticale qu'il faut donner à un objet depuis la surface d'un corps autogravitant (masse M , rayon R) pour qu'il atteigne l'infini avec une vitesse nulle.

Conservation de l'énergie mécanique

$$E = \underbrace{\frac{1}{2}mV^2}_{\text{énergie cinétique}} - \underbrace{\frac{GMm}{r}}_{\text{énergie potentielle}}$$

- À la surface du corps autogravitant : $r = R$ et $V = V_{\text{lib}}$

$$\implies E_{\text{surf}} = \frac{1}{2}mV_{\text{lib}}^2 - \frac{GMm}{R}$$

- À l'infini : $r \rightarrow +\infty$ et $V \rightarrow 0$

$$\implies E_{\infty} = 0$$

$$E \text{ se conserve} \implies E_{\text{surf}} = E_{\infty} \implies \frac{1}{2}mV_{\text{lib}}^2 - \frac{GMm}{R} = 0 \implies V_{\text{lib}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

La préhistoire des trous noirs au XVIIIe siècle...

$$V_{\text{lib}} > c \iff \frac{2GM}{R} > c^2 \iff \frac{2G}{R} \times \frac{4}{3}\pi R^3 \rho > c^2 \iff R > \sqrt{\frac{3c^2}{8\pi G\rho}}$$

John Michell (1784)

"If there should really exist in nature any bodies, whose density is not less than that of the sun, and whose diameters are more than 500 times the diameter of the sun, since their light could not arrive at us, ..., we could have no information from sight" [Phil. Trans. R. Soc. Lond. 74, 35 (1784)]



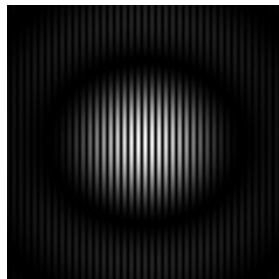
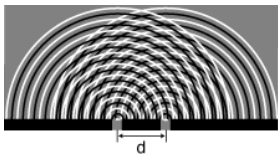
Pierre Simon de Laplace (1796)

"Un astre lumineux, de la même densité que la Terre, et dont le diamètre serait 250 fois plus grand que le Soleil, ne permettrait, en vertu de son attraction, à aucun de ses rayons de parvenir jusqu'à nous. Il est dès lors possible que les plus grands corps lumineux de l'univers puissent, par cette cause, être invisibles." [Exposition du système du monde (1796)]



Les «corps invisibles» tombent dans l'oubli...

- Mention des «corps invisibles» par Laplace dans les deux premières éditions de son *Exposition du système du Monde* (1796 et 1799)
- Suppression dans la troisième édition (1808) et les suivantes : prédominance de la **théorie ondulatoire de la lumière** sur la théorie corpusculaire après les expériences de Thomas Young (1801)



[R. Taillet]

Limites du concept newtonien de trou noir

- Pas de rôle privilégié de la vitesse de la lumière en théorie newtonienne : rien n'interdit $V > c \implies$ les corps invisibles de Michell et Laplace restent causalement connectés au reste de l'Univers

Limites du concept newtonien de trou noir

- Pas de rôle privilégié de la vitesse de la lumière en théorie newtonienne : rien n'interdit $V > c \implies$ les corps invisibles de Michell et Laplace restent causalement connectés au reste de l'Univers
- $V_{\text{lib}} \sim c \implies$ l'énergie potentielle gravitationnelle du corps E_{grav} est du même ordre de grandeur que son énergie de masse Mc^2 :
Exemple : pour une boule homogène ($\rho = \text{const}$) de masse M et de rayon R ,

$$E_{\text{grav}} = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} = -\frac{3}{10} \left(\frac{V_{\text{lib}}}{c} \right)^2 Mc^2$$

\implies une théorie *relativiste* de la gravitation est nécessaire !

Limites du concept newtonien de trou noir

- Pas de rôle privilégié de la vitesse de la lumière en théorie newtonienne : rien n'interdit $V > c \implies$ les corps invisibles de Michell et Laplace restent causalement connectés au reste de l'Univers
- $V_{\text{lib}} \sim c \implies$ l'énergie potentielle gravitationnelle du corps E_{grav} est du même ordre de grandeur que son énergie de masse Mc^2 :
Exemple : pour une boule homogène ($\rho = \text{const}$) de masse M et de rayon R ,

$$E_{\text{grav}} = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} = -\frac{3}{10} \left(\frac{V_{\text{lib}}}{c} \right)^2 Mc^2$$

\implies une théorie *relativiste* de la gravitation est nécessaire !

Limites du concept newtonien de trou noir

- Pas de rôle privilégié de la vitesse de la lumière en théorie newtonienne : rien n'interdit $V > c \implies$ les corps invisibles de Michell et Laplace restent causalement connectés au reste de l'Univers
- $V_{\text{lib}} \sim c \implies$ l'énergie potentielle gravitationnelle du corps E_{grav} est du même ordre de grandeur que son énergie de masse Mc^2 :
Exemple : pour une boule homogène ($\rho = \text{const}$) de masse M et de rayon R ,

$$E_{\text{grav}} = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} = -\frac{3}{10} \left(\frac{V_{\text{lib}}}{c} \right)^2 Mc^2$$

\implies une théorie *relativiste* de la gravitation est nécessaire !

\implies le traitement correct des trous noirs ne peut se faire qu'en **relativité générale** (ou dans l'une de ses généralisations)

Plan

- 1 Qu'est-ce qu'un trou noir ?
- 2 L'espace-temps et la relativité générale**
- 3 Les trous noirs dans la relativité générale
- 4 Les observations de trous noirs
- 5 Conclusions

L'espace et le temps

Nous vivons dans un espace à *trois dimensions* :

- devant / derrière,
- gauche / droite,
- haut / bas

⇒ 3 nombres (x, y, z) (*coordonnées*) pour décrire la position d'un point dans l'espace.

L'espace et le temps

Nous vivons dans un espace à *trois dimensions* :

- devant / derrière,
- gauche / droite,
- haut / bas

⇒ 3 nombres (x, y, z) (*coordonnées*) pour décrire la position d'un point dans l'espace.

Le temps ne possède qu'*une seule dimension* : passé / futur

⇒ 1 seul nombre t (*date*) pour localiser un événement dans le temps.

L'espace et le temps

Nous vivons dans un espace à *trois dimensions* :

- devant / derrière,
- gauche / droite,
- haut / bas

⇒ 3 nombres (x, y, z) (*coordonnées*) pour décrire la position d'un point dans l'espace.

Le temps ne possède qu'*une seule dimension* : passé / futur

⇒ 1 seul nombre t (*date*) pour localiser un événement dans le temps.

Y a-t-il un sens à unifier l'espace et le temps en un continuum à 4 dimensions ?

Bien avant la relativité...

d'Alembert (1754) : article *dimension* de l'*Encyclopédie* :



“J’ai dit plus haut qu’il n’étoit pas possible de concevoir plus de trois dimensions. Un homme d’esprit de ma connaissance croit qu’on pourroit cependant regarder la durée comme une quatrième dimension, et que le produit du tems par la solidité, seroit en quelque maniere un produit de quatre dimensions.”

Bien avant la relativité...

d'Alembert (1754) : article *dimension* de l'*Encyclopédie* :



“J’ai dit plus haut qu’il n’étoit pas possible de concevoir plus de trois dimensions. Un homme d’esprit de ma connaissance croit qu’on pourroit cependant regarder la durée comme une quatrième dimension, et que le produit du tems par la solidité, seroit en quelque maniere un produit de quatre dimensions.”

Lagrange (1797) : *Traité des fonctions analytiques* :



“Ainsi on peut regarder la mécanique comme une géométrie à quatre dimensions, et l’analyse mécanique comme une extension de l’analyse géométrique.”

Union mathématique de l'espace et du temps

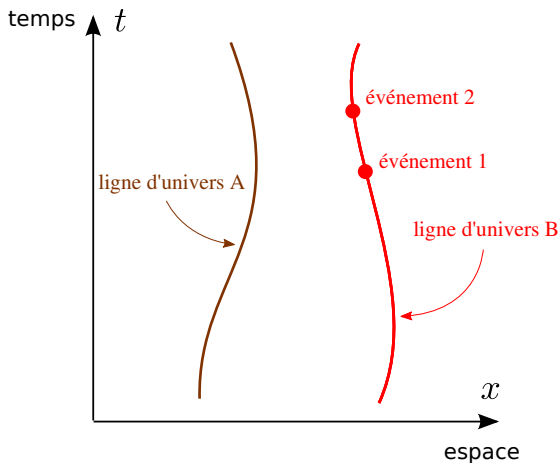
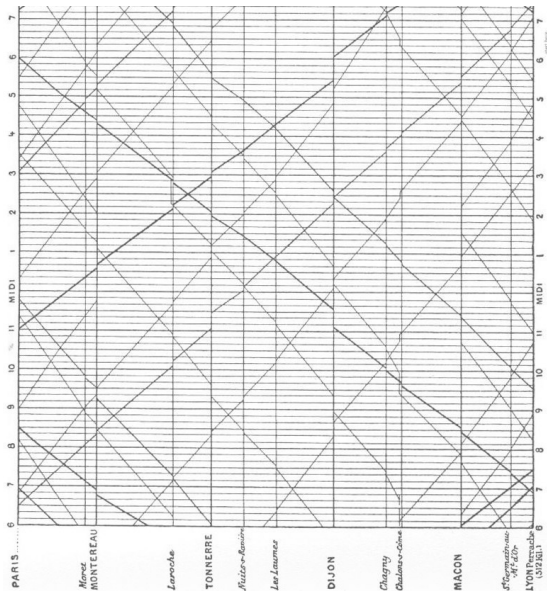


Diagramme d'espace-temps

- Dans l'espace :
→ une particule est représentée par un **point**
- Dans l'espace-temps :
→ une particule est représentée par une **ligne continue**, appelée **ligne d'univers**
→ un **événement** correspond à un point de l'espace-temps.

Un diagramme d'espace-temps de 1878!

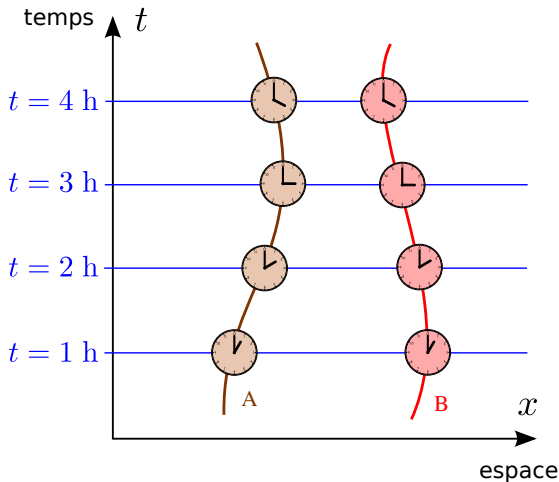


Lignes d'univers des trains Paris-Lyon

Étienne Jules Marey
(1830-1904) : *La Méthode graphique dans les sciences expérimentales* (1878)
"d'après la méthode de M. Ibry"

La **pen**te est proportionnelle à
l'**inverse** de la vitesse

L'espace-temps newtonien



L'espace-temps newtonien est doté d'une structure universelle :

temps absolu t

“Le temps absolu, vrai et mathématique, sans relation à rien d'extérieur, coule uniformément, et s'appelle durée.”



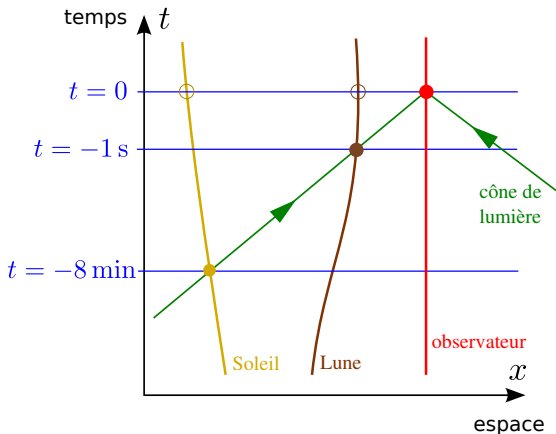
Isaac Newton,
Principia Mathematica
(1687)

Tous les observateurs mesurent le même temps

Description mathématique :

$$\mathcal{E} = \mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$$

Mélanger le temps et l'espace a-t-il un sens physique ?



Percevons-nous l'espace absolu au temps $t = 0$?

Non : nous ne voyons que le **cône de lumière passé**

Ainsi, même dans le cadre newtonien, en admettant une vitesse finie de propagation de la lumière, **nous ne percevons pas l'espace indépendamment du temps.**

L'espace-temps relativiste

- 1898 : Henri Poincaré fait remarquer la notion de **simultanéité** de deux événements n'est pas donnée a priori

L'espace-temps relativiste

- 1898 : Henri Poincaré fait remarquer la notion de **simultanéité** de deux événements n'est pas donnée a priori
- 1905 : Albert Einstein élabore la **relativité restreinte** pour décrire *"l'électrodynamique des corps en mouvements"*

L'espace-temps relativiste

- 1898 : Henri Poincaré fait remarquer la notion de **simultanéité** de deux événements n'est pas donnée a priori
- 1905 : Albert Einstein élabore la **relativité restreinte** pour décrire "*l'électrodynamique des corps en mouvements*"
- 1905 : Henri Poincaré introduit des concepts **quadridimensionnels** pour la cinématique relativiste

L'espace-temps relativiste

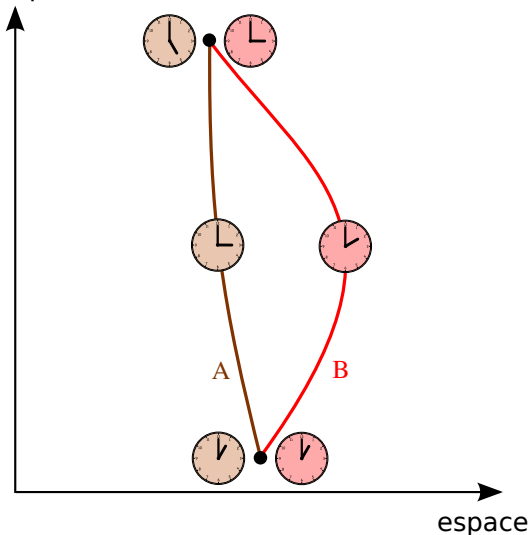
- 1898 : Henri Poincaré fait remarquer la notion de **simultanéité** de deux événements n'est pas donnée a priori
- 1905 : Albert Einstein élabore la **relativité restreinte** pour décrire *"l'électrodynamique des corps en mouvements"*
- 1905 : Henri Poincaré introduit des concepts **quadridimensionnels** pour la cinématique relativiste
- 1908 : Hermann Minkowski développe le concept d'**espace-temps** : *"L'espace indépendant du temps, le temps indépendant de l'espace ne sont plus que des ombres vaines ; une sorte d'union des deux doit seule subsister encore."*

L'espace-temps relativiste

- 1898 : Henri Poincaré fait remarquer la notion de **simultanéité** de deux événements n'est pas donnée a priori
- 1905 : Albert Einstein élabore la **relativité restreinte** pour décrire *"l'électrodynamique des corps en mouvements"*
- 1905 : Henri Poincaré introduit des concepts **quadridimensionnels** pour la cinématique relativiste
- 1908 : Hermann Minkowski développe le concept d'**espace-temps** : *"L'espace indépendant du temps, le temps indépendant de l'espace ne sont plus que des ombres vaines ; une sorte d'union des deux doit seule subsister encore."*
- 1915 : Albert Einstein incorpore la gravitation dans la relativité, en construisant la **relativité générale** sur le concept d'espace-temps courbe.

L'espace-temps relativiste

temps

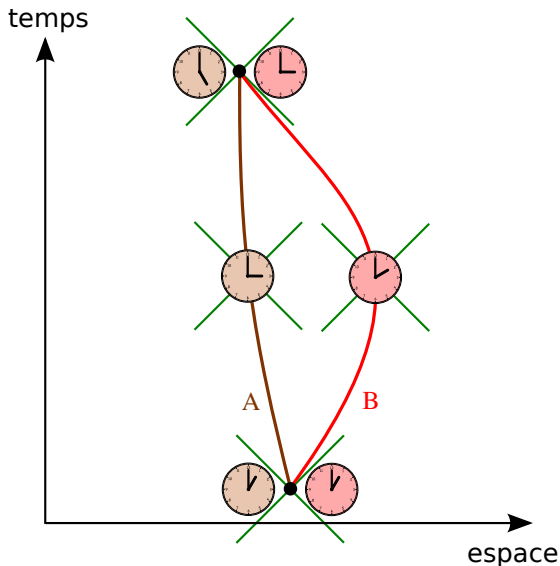


Il n'y a plus de temps absolu :
chaque observateur mesure son
temps propre

relativité du temps

⇒ paradoxe des jumeaux
(voyageur de Langevin)

L'espace-temps relativiste



Il reste une structure absolue :
les **cônes de lumière**

Description mathématique de l'espace-temps relativiste

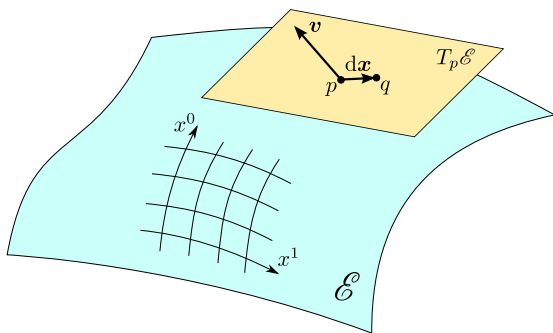
espace-temps = (\mathcal{E}, g)

- \mathcal{E} : variété différentielle de dimension 4
- g : tenseur métrique

Description mathématique de l'espace-temps relativiste

espace-temps = (\mathcal{E}, g)

- \mathcal{E} : variété différentielle de dimension 4
- g : tenseur métrique



Variété différentielle : espace topologique \mathcal{E} qui est *localement* homéomorphe à \mathbb{R}^4
 \implies **cartes (coordonnées)**

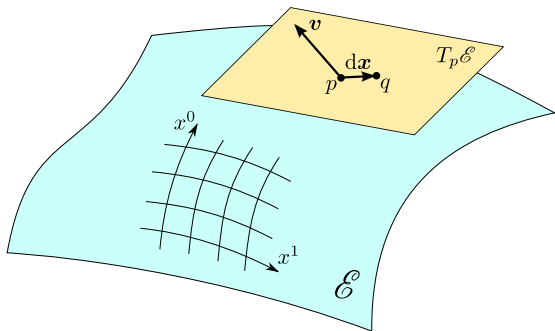
\implies **vecteurs tangents**

$T_p\mathcal{E}$: espace vectoriel tangent à \mathcal{E} au point p

Description mathématique de l'espace-temps relativiste

espace-temps = (\mathcal{E}, g)

- \mathcal{E} : variété différentielle de dimension 4
- g : tenseur métrique



Variété différentielle : espace topologique \mathcal{E} qui est *localement* homéomorphe à \mathbb{R}^4
 \implies **cartes (coordonnées)**

\implies **vecteurs tangents**

$T_p \mathcal{E}$: espace vectoriel tangent à \mathcal{E} au point p

Remarque : le vecteur connectant deux points p et q de \mathcal{E} n'est défini que pour p et q infiniment proches.

Le tenseur métrique

Tenseur métrique g : produit (pseudo)-scalaire sur \mathcal{E} ,
c.à.d. un champ de formes bilinéaires symétriques non dégénérées :

$$\forall p \in \mathcal{E}, \quad g|_p : T_p\mathcal{E} \times T_p\mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \longmapsto g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g_{\mu\nu} u^\mu v^\nu$$

dont la signature est $(-, +, +, +)$: \exists base $(e_\alpha)_{0 \leq \alpha \leq 3}$ de $T_p\mathcal{E}$ telle que

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -u^0 v^0 + u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3 \quad (\text{signature lorentzienne})$$

Le tenseur métrique

Tenseur métrique g : **produit (pseudo)-scalaire** sur \mathcal{E} ,
c.à.d. un champ de formes bilinéaires symétriques non dégénérées :

$$\forall p \in \mathcal{E}, \quad g|_p : T_p \mathcal{E} \times T_p \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \longmapsto g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g_{\mu\nu} u^\mu v^\nu$$

dont la signature est $(-, +, +, +)$: \exists base $(e_\alpha)_{0 \leq \alpha \leq 3}$ de $T_p \mathcal{E}$ telle que

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -u^0 v^0 + u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3 \quad (\text{signature } \mathbf{lorentzienne})$$

L'élément de "longueur" :

$$ds^2 := g(d\mathbf{x}, d\mathbf{x}) = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Le tenseur métrique

Tenseur métrique g : produit (pseudo)-scalaire sur \mathcal{E} ,
c.à.d. un champ de formes bilinéaires symétriques non dégénérées :

$$\forall p \in \mathcal{E}, \quad g|_p : T_p \mathcal{E} \times T_p \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \longmapsto g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g_{\mu\nu} u^\mu v^\nu$$

dont la signature est $(-, +, +, +)$: \exists base $(e_\alpha)_{0 \leq \alpha \leq 3}$ de $T_p \mathcal{E}$ telle que

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -u^0 v^0 + u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3 \quad (\text{signature lorentzienne})$$

L'élément de "longueur" :

$$ds^2 := g(d\mathbf{x}, d\mathbf{x}) = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

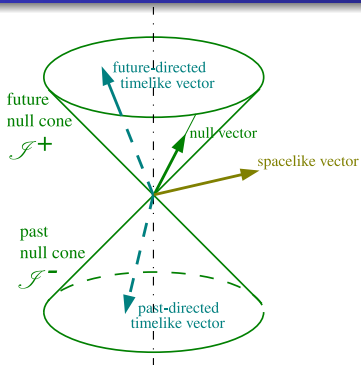
Exemple 1 : espace-temps de Minkowski (relativité restreinte)

$$\mathcal{E} = \mathbb{R}^4; \quad ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Exemple 2 : espace-temps de Schwarzschild (trou noir statique)

$$\mathcal{E} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2; \quad ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

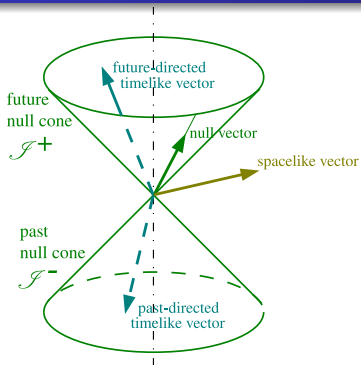
Cône de lumière



Un vecteur $v \in T_p\mathcal{E}$ est

- du **genre espace** $\iff g(v, v) > 0$
- du **genre lumière** $\iff g(v, v) = 0$
- du **genre temps** $\iff g(v, v) < 0$

Cône de lumière



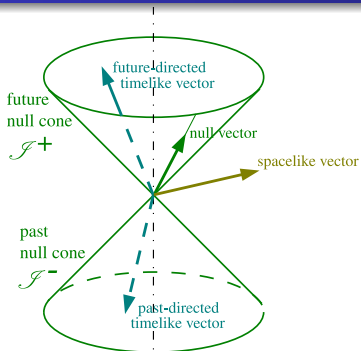
Un vecteur $v \in T_p\mathcal{E}$ est

- du **genre espace** $\iff g(v, v) > 0$
- du **genre lumière** $\iff g(v, v) = 0$
- du **genre temps** $\iff g(v, v) < 0$

Hypothèse :

l'espace-temps (\mathcal{E}, g) est **orienté dans le temps**
 \implies directions futur et passé

Cône de lumière

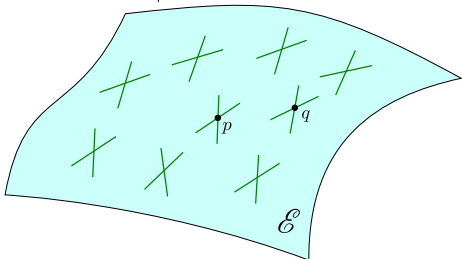


Un vecteur $v \in T_p\mathcal{E}$ est

- du **genre espace** $\iff g(v, v) > 0$
- du **genre lumière** $\iff g(v, v) = 0$
- du **genre temps** $\iff g(v, v) < 0$

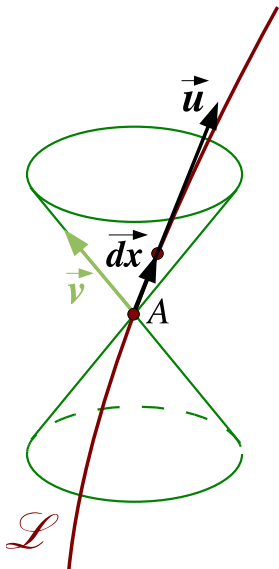
Hypothèse :

l'espace-temps (\mathcal{E}, g) est **orienté dans le temps**
 \implies directions futur et passé



\leftarrow cônes de lumière en chaque point de \mathcal{E}

Interprétation physique du tenseur métrique



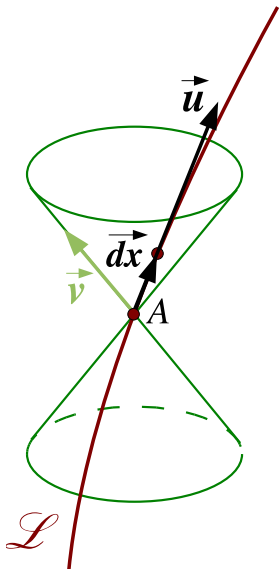
Interprétation 1

Longueur donnée par le tenseur métrique g
 = **temps propre** τ le long de la ligne d'univers \mathcal{L} d'une
 particule :

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{-g(dx, dx)}$$

L'instrument privilégié du relativiste est l'**horloge**, pas la
 règle !

Interprétation physique du tenseur métrique



Interprétation 1

Longueur donnée par le tenseur métrique g
 = **temps propre** τ le long de la ligne d'univers \mathcal{L} d'une
 particule :

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{-g(dx, dx)}$$

L'instrument privilégié du relativiste est l'**horloge**, pas la
 règle !

Interprétation 2

Les lignes d'univers des photons sont les géodésiques du
 genre lumière (longueur nulle) de g

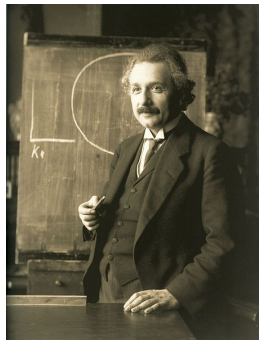
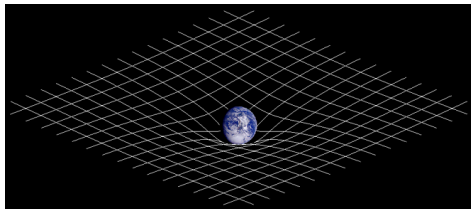
La relativité générale

Relativité générale : théorie relativiste de la gravitation où le tenseur métrique g obéit à l'**équation d'Einstein**, qui relie une partie de la **courbure** de g à l'énergie-impulsion de la matière et des champs non-gravitationnels :

$$R - \frac{1}{2}Rg = \frac{8\pi G}{c^4} T$$

(A. Einstein, novembre 1915)

La gravitation ne se manifeste pas comme une force mais comme la **courbure de l'espace-temps**.



Relativité générale comparée à la gravitation newtonienne

Gravitation newtonienne

régie par l'équation de Poisson pour le potentiel gravitationnel Φ :

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho$$

- équation scalaire
- équation linéaire
- équation elliptique
⇒ propagation instantanée
- source : la densité de masse ρ

Relativité générale comparée à la gravitation newtonienne

Gravitation newtonienne

régie par l'**équation de Poisson** pour le potentiel gravitationnel Φ :

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho$$

- équation scalaire
- équation linéaire
- équation elliptique
⇒ propagation instantanée
- source : la densité de masse ρ

Relativité générale

régie par l'**équation d'Einstein** pour le tenseur métrique g :

$$R - \frac{1}{2}Rg = \frac{8\pi G}{c^4}T$$

où R est le tenseur de Ricci :

$$R \sim g^{-1}\partial\partial g + g^{-2}(\partial g)^2$$

$$R := \text{tr}_g R$$

- équation tensorielle (10 équations scalaires)
- équation **non-linéaire**
- propagation à vitesse finie (c)
- source : énergie-impulsion T de la matière (et des champs)

Relativité générale comparée à la gravitation newtonienne

Gravitation newtonienne

régie par l'**équation de Poisson** pour le potentiel gravitationnel Φ :

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho$$

- équation scalaire
- équation linéaire
- équation elliptique
⇒ propagation instantanée
- source : la densité de masse ρ

Relativité générale

régie par l'**équation d'Einstein** pour le tenseur métrique g :

$$R - \frac{1}{2}Rg = \frac{8\pi G}{c^4}T$$

où R est le tenseur de Ricci :

$$R \sim g^{-1} \partial\partial g + g^{-2} (\partial g)^2$$

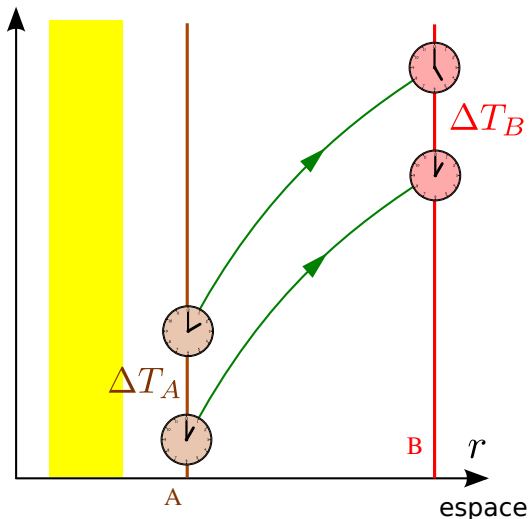
$$R := \text{tr}_g R$$

- équation tensorielle (10 équations scalaires)
- équation **non-linéaire**
- propagation à vitesse finie (c)
- source : énergie-impulsion T de la matière (et des champs)

Remarque : en champ gravitationnel faible, une des 10 composantes de l'équation d'Einstein se réduit à l'équation de Poisson (et les 9 autres se réduisent à $0 \equiv 0$).

Dilatation des temps gravitationnelle

temps



Dilatation apparente des temps
au voisinage d'un corps massif

Si B est loin :

$$\frac{\Delta T_A}{\Delta T_B} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r_A}}$$

pour des corps peu relativistes
(Terre, Soleil) :

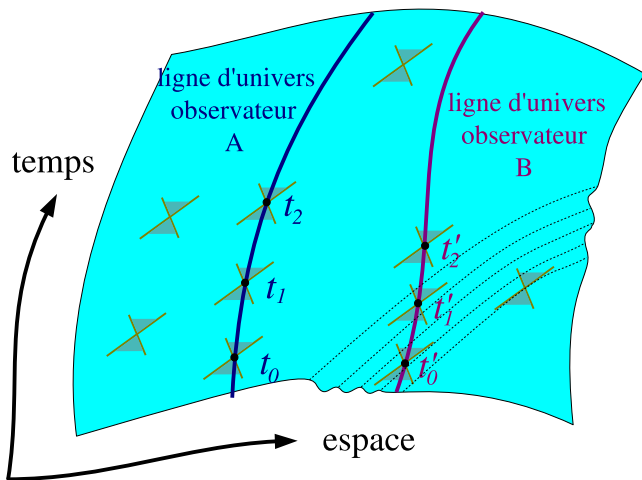
$$\frac{\Delta T_A}{\Delta T_B} \simeq 1 - \frac{GM}{c^2 r_A}$$

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

Les ondes gravitationnelles : des oscillations de l'espace-temps

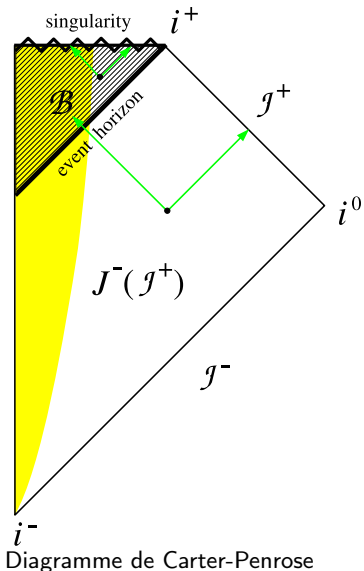
Des petites oscillations dans la courbure...



Plan

- 1 Qu'est-ce qu'un trou noir ?
- 2 L'espace-temps et la relativité générale
- 3 Les trous noirs dans la relativité générale**
- 4 Les observations de trous noirs
- 5 Conclusions

Définition d'un trou noir en relativité générale



Étant donné un espace temps (\mathcal{E}, g) asymptotiquement plat (\implies infini lumière futur \mathcal{I}^+), la **région de trou noir** est le complémentaire du passé causal de \mathcal{I}^+ , $J^-(\mathcal{I}^+)$:

$$\mathcal{B} := \mathcal{E} \setminus J^-(\mathcal{I}^+)$$

L'**horizon des événements** est la frontière de la région de trou noir $\mathcal{H} := \partial\mathcal{B}$

Définition d'un trou noir en relativité générale

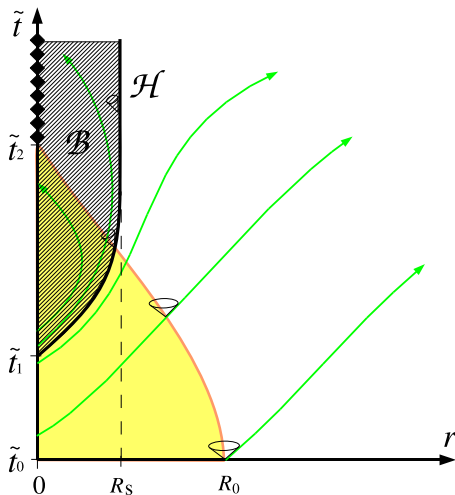


Diagramme d'espace-temps basé sur les coordonnées (\tilde{t}, r)

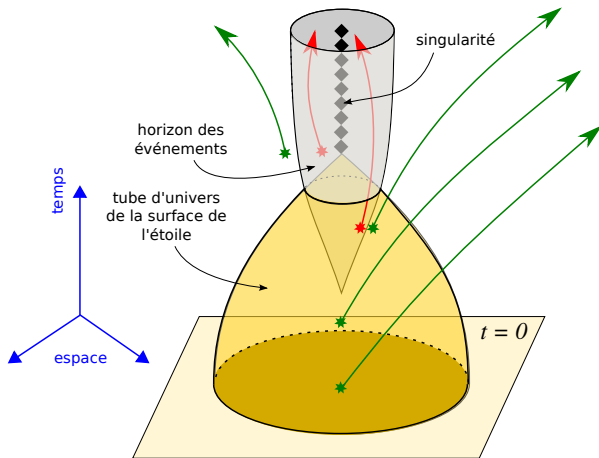
Étant donné un espace temps (\mathcal{E}, g) asymptotiquement plat (\implies infini lumière futur \mathcal{I}^+), la **région de trou noir** est le complémentaire du passé causal de \mathcal{I}^+ , $J^-(\mathcal{I}^+)$:

$$\mathcal{B} := \mathcal{E} \setminus J^-(\mathcal{I}^+)$$

L'**horizon des événements** est la frontière de la région de trou noir

$$\mathcal{H} := \partial\mathcal{B}$$

Effondrement gravitationnel d'une étoile



← Diagramme d'espace-temps représentant la formation d'un trou noir par effondrement gravitationnel du cœur d'une étoile massive (phénomène de *supernova*)

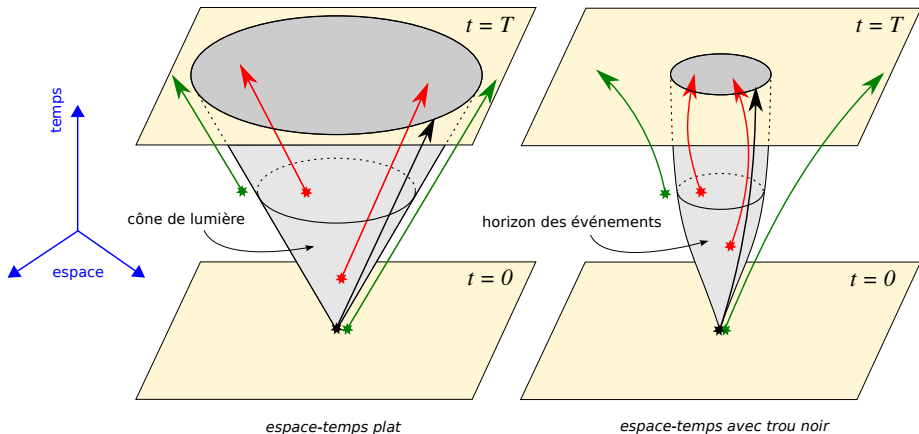
singularité : courbure $\rightarrow \infty$

Théorème de Penrose (1965)

Au delà d'un certain stade de l'effondrement, caractérisé par l'apparition de **surfaces piégées**, la formation d'une singularité est inévitable.

L'horizon des événements comme hypersurface lumière

Comparaison d'un cône de lumière de l'espace-temps plat (Minkowski) avec l'horizon des événements d'un trou noir :



horizon et cône de lumière = **hypersurfaces du genre lumière** (frontières que l'on ne peut franchir que dans un sens)

C'est le caractère **spatialement borné** qui distingue l'horizon des événements.

La singularité centrale

- La singularité centrale est une **singularité de courbure** : la courbure de l'espace-temps devient infiniment grande à cet endroit.
- Physiquement, cela veut dire que les **forces de marées divergent** (*force de marée* \equiv attraction gravitationnelle différentielle)
- La singularité centrale marque une **limite du domaine d'applicabilité de la relativité générale** : pour la décrire, il faudrait utiliser une théorie plus «fine», sans doute une théorie quantique de la gravitation (pistes actuellement explorées : *théorie des cordes* et *gravité quantique à boucles*).
- La singularité centrale est **inaccessible à l'observation** : elle est cachée sous l'horizon des événements.

Le théorème d'absence de chevelure

Un des plus beaux résultats en relativité générale :

Théorème d'unicité («absence de chevelure»)

Dorochkevitch, Novikov & Zeldovitch (1965), Israel (1967), Carter (1971), Hawking (1972), Robinson (1975)

En relativité générale (et en dimension d'espace-temps égale à 4), un trou noir stationnaire est entièrement décrit par seulement deux nombres^a :

- sa *masse* M
- son *moment cinétique* J (mesure l'état de rotation)

La solution correspondante de l'équation d'Einstein est la **solution de Kerr (1963)**. Pour $J = 0$, elle se réduit à la **solution de Schwarzschild (1916)**.

a. trois si on considère une charge électrique Q non nulle, mais ce n'est pas pertinent d'un point de vue astrophysique

Le théorème d'absence de chevelure

Un des plus beaux résultats en relativité générale :

Théorème d'unicité («absence de chevelure»)

Dorochkevitch, Novikov & Zeldovitch (1965), Israel (1967), Carter (1971), Hawking (1972), Robinson (1975)

En relativité générale (et en dimension d'espace-temps égale à 4), un trou noir stationnaire est entièrement décrit par seulement deux nombres^a :

- sa *masse* M
- son *moment cinétique* J (mesure l'état de rotation)

La solution correspondante de l'équation d'Einstein est la **solution de Kerr (1963)**. Pour $J = 0$, elle se réduit à la **solution de Schwarzschild (1916)**.

a. trois si on considère une charge électrique Q non nulle, mais ce n'est pas pertinent d'un point de vue astrophysique

⇒ Un trou noir est un objet extrêmement régulier :
il "*n'a pas de cheveux*" (John A. Wheeler)

Définitions de M et J

- La **masse** M : n'est pas une mesure de la « quantité de matière » à l'intérieur du trou noir, mais un paramètre qui caractérise son *champ de gravitation externe*. Elle se mesure par le **mouvement orbital d'un corps d'épreuve** : suffisamment loin du trou noir, l'approximation de gravitation newtonienne est valable et l'on peut définir M comme le coefficient qui intervient dans la

troisième loi de Kepler : $r^3 = GM \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2$

r = rayon de l'orbite (circulaire), $r \gg GM/c^2 = 1.5 \left(\frac{M}{M_\odot} \right)$ km

T = période orbitale

Définitions de M et J

- La **masse** M : n'est pas une mesure de la «quantité de matière» à l'intérieur du trou noir, mais un paramètre qui caractérise son *champ de gravitation externe*. Elle se mesure par le **mouvement orbital d'un corps d'épreuve** : suffisamment loin du trou noir, l'approximation de gravitation newtonienne est valable et l'on peut définir M comme le coefficient qui intervient dans la

troisième loi de Kepler :

$$r^3 = GM \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2$$

r = rayon de l'orbite (circulaire), $r \gg GM/c^2 = 1.5 \left(\frac{M}{M_\odot} \right)$ km

T = période orbitale

- moment cinétique** J : effet «gravito-magnétique» (Lense-Thirring) : un gyroscope embarqué dans un satellite en orbite (rayon r) autour du trou noir précesse (par rapport aux étoiles lointaines) à la fréquence

$$\Omega_{LT} = \frac{2GJ}{c^2 r^3}$$

Rayon du trou noir

Le **rayon d'un trou noir** n'est pas un concept bien défini ; en aucun cas, il ne correspond à la distance entre le «centre» du trou noir (la singularité) et l'horizon. Il vaut mieux le définir à partir de l'aire A de l'horizon \implies **rayon aréolaire**

Pour un trou noir statique, $R = \sqrt{A/4\pi}$.

Le rayon ainsi défini est proportionnel à la masse : $R = \frac{2GM}{c^2} \simeq 3 \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) \text{ km}$

(M_{\odot} = masse du Soleil = $2 \cdot 10^{30}$ kg)

Un mythe : “les trous noirs sont des objets extrêmement denses”

Un mythe : “les trous noirs sont des objets extrêmement denses”

— En fait, le trou noir de Kerr, qui représente tous les trous noirs stationnaires de l'Univers (théorème d'absence de chevelure!) est une solution de l'équation d'Einstein **vide de toute matière** ($T = 0$) : $R = 0$

Un mythe : “les trous noirs sont des objets extrêmement denses”

— En fait, le trou noir de Kerr, qui représente tous les trous noirs stationnaires de l'Univers (théorème d'absence de chevelure !) est une solution de l'équation d'Einstein **vide de toute matière** ($T = 0$) : $R = 0$

— OK, mais les trous noirs ont une masse M et un rayon aréolaire R , de sorte que l'on peut définir une «densité moyenne» par $\bar{\rho} = M/(4/3\pi R^3)$. La valeur de $\bar{\rho}$ n'est-elle pas énorme ?

Un mythe : “les trous noirs sont des objets extrêmement denses”

— En fait, le trou noir de Kerr, qui représente tous les trous noirs stationnaires de l'Univers (théorème d'absence de chevelure !) est une solution de l'équation

d'Einstein **vide de toute matière** ($T = 0$) : $R = 0$

— OK, mais les trous noirs ont une masse M et un rayon aréolaire R , de sorte que l'on peut définir une «densité moyenne» par $\bar{\rho} = M/(4/3\pi R^3)$. La valeur de $\bar{\rho}$ n'est-elle pas énorme ?

— Eh bien,

- pour le trou noir au centre de notre galaxie (Sgr A*) :
 $\bar{\rho} \sim 10^6 \text{ kg m}^{-3} = 2 \cdot 10^{-4} \times$ la densité d'une naine blanche
- pour le trou noir au centre de la galaxie M 87 (M 87*) :
 $\bar{\rho} \sim 2 \text{ kg m}^{-3} = 1/500 \times$ la densité de l'eau !

Un mythe : “les trous noirs sont des objets extrêmement denses”

— En fait, le trou noir de Kerr, qui représente tous les trous noirs stationnaires de l'Univers (théorème d'absence de chevelure !) est une solution de l'équation d'Einstein **vide de toute matière** ($T = 0$) : $R = 0$

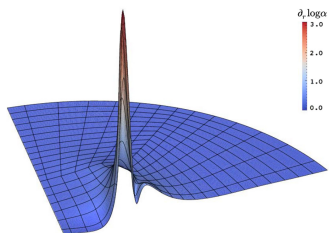
— OK, mais les trous noirs ont une masse M et un rayon aréolaire R , de sorte que l'on peut définir une «densité moyenne» par $\bar{\rho} = M/(4/3\pi R^3)$. La valeur de $\bar{\rho}$ n'est-elle pas énorme ?

— Eh bien,

- pour le trou noir au centre de notre galaxie (Sgr A*) :
 $\bar{\rho} \sim 10^6 \text{ kg m}^{-3} = 2 \cdot 10^{-4} \times$ la densité d'une naine blanche
- pour le trou noir au centre de la galaxie M 87 (M 87*) :
 $\bar{\rho} \sim 2 \text{ kg m}^{-3} = 1/500 \times$ la densité de l'eau !

Les trous noirs sont des **objets compacts** : leur **compacité** M/R est grande, mais pas nécessairement leur densité moyenne M/R^3 .

Formation d'un trou noir dans un univers entièrement vide



Un trou noir peut se former lors de l'évolution (non-linéaire) d'ondes gravitationnelles de grande amplitude, sans qu'aucune matière n'intervienne dans le processus

[Abrahams & Evans, PRL **70**, 2980 (1993)]

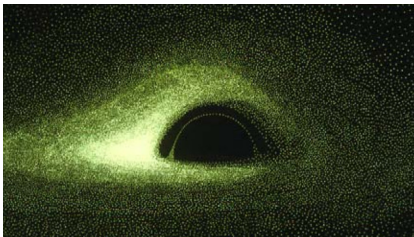
[Hilditch, Weyhausen & Brügmann, PRD **96**, 104051 (2017)]

Plan

- 1 Qu'est-ce qu'un trou noir ?
- 2 L'espace-temps et la relativité générale
- 3 Les trous noirs dans la relativité générale
- 4 Les observations de trous noirs
- 5 Conclusions

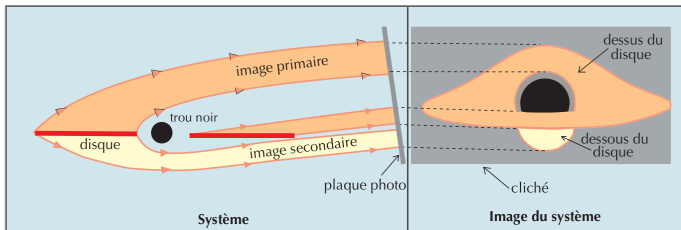
Voir un trou noir ?

Par définition, un trou noir n'est pas *directement* observable, mais sa **silhouette** l'est s'il est entouré de matière (disque d'accrétion) ou est observé sur un fond étoilé



Première image calculée de la silhouette
calculée par J.-P. Luminet

[Luminet, A&A 75, 228 (1979)]

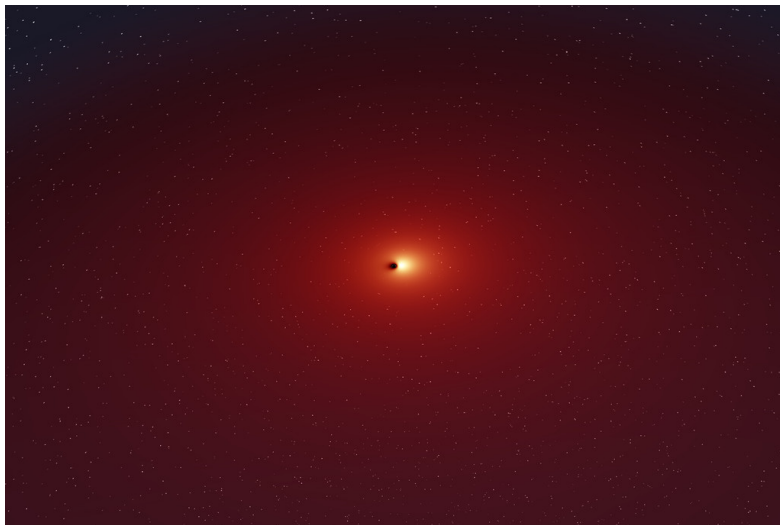


Trajectoire des
rayons lumineux et
formation de l'image

[https://luth.
obspm.fr/~luminet/](https://luth.obspm.fr/~luminet/)

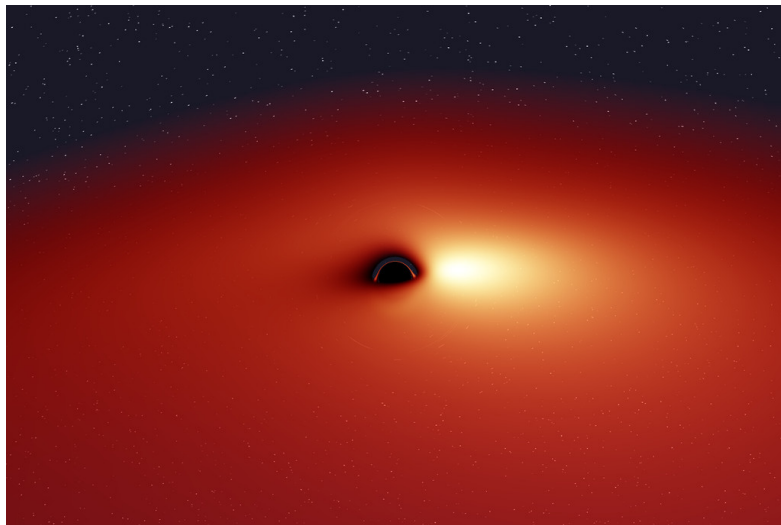
Vol vers un trou noir

Images calculées par J.-A. Marck [Marck, CQG 13, 393 (1996)]



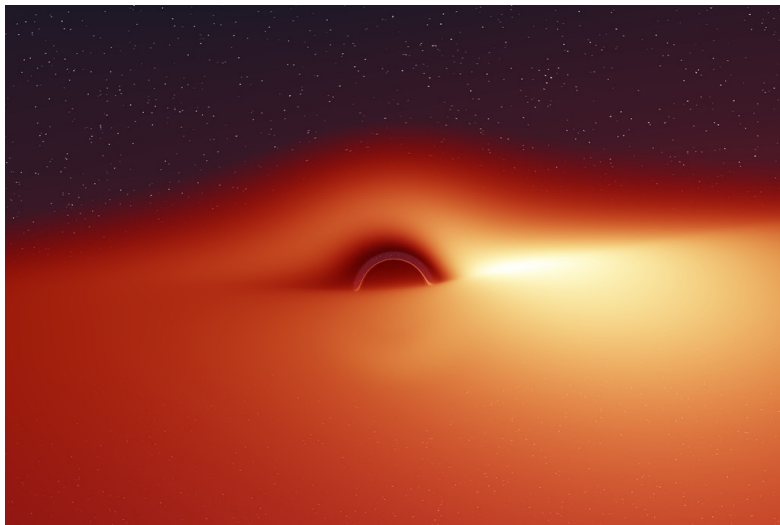
Vol vers un trou noir

Images calculées par J.-A. Marck [Marck, CQG 13, 393 (1996)]



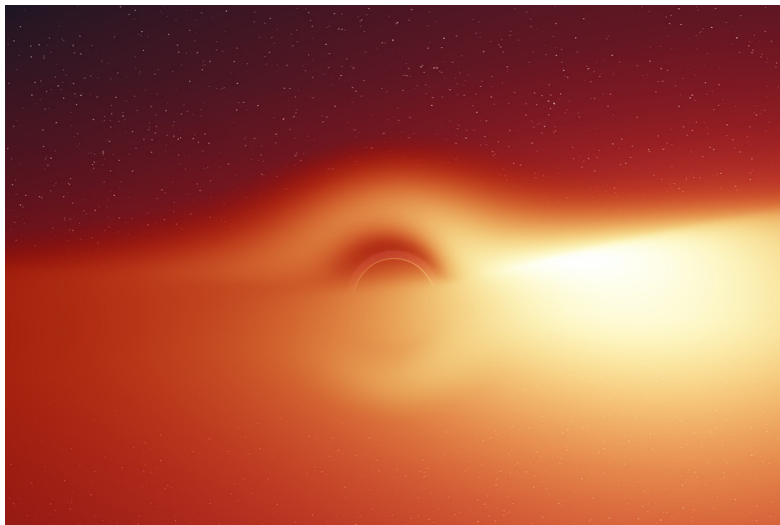
Vol vers un trou noir

Images calculées par J.-A. Marck [Marck, CQG 13, 393 (1996)]



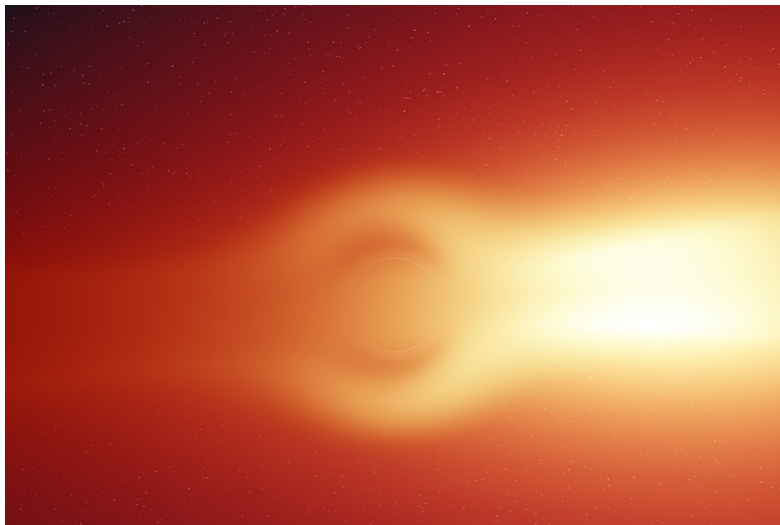
Vol vers un trou noir

Images calculées par J.-A. Marck [Marck, CQG 13, 393 (1996)]



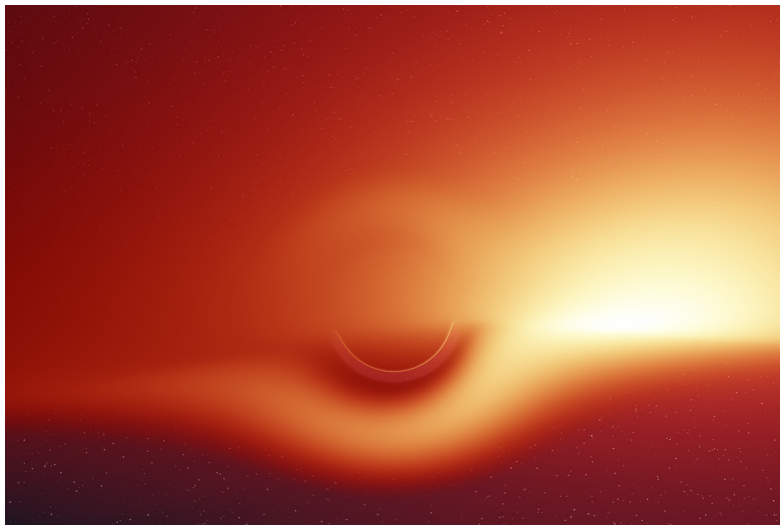
Vol vers un trou noir

Images calculées par J.-A. Marck [Marck, CQG 13, 393 (1996)]



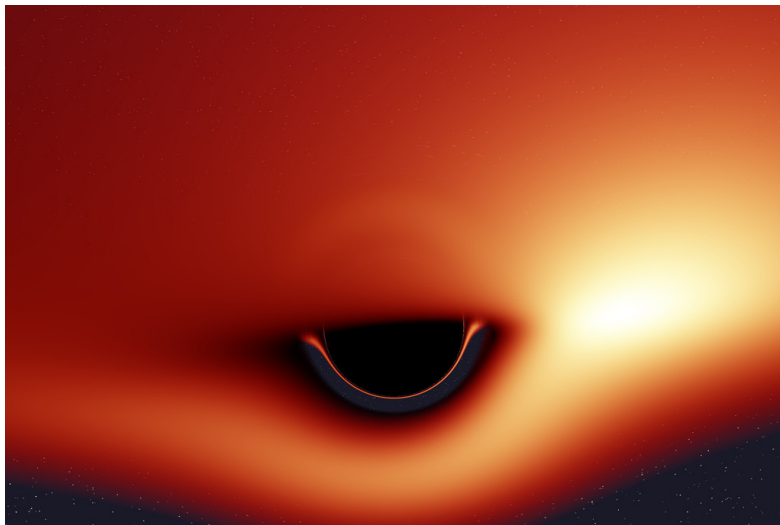
Vol vers un trou noir

Images calculées par J.-A. Marck [Marck, CQG 13, 393 (1996)]



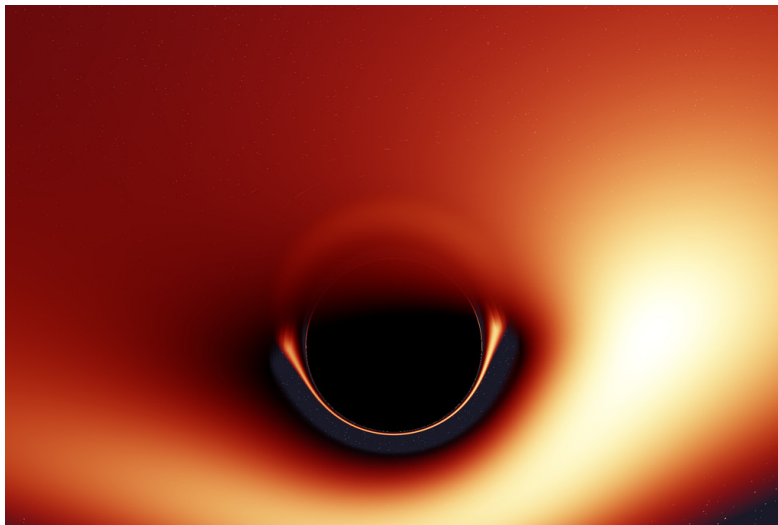
Vol vers un trou noir

Images calculées par J.-A. Marck [Marck, CQG 13, 393 (1996)]



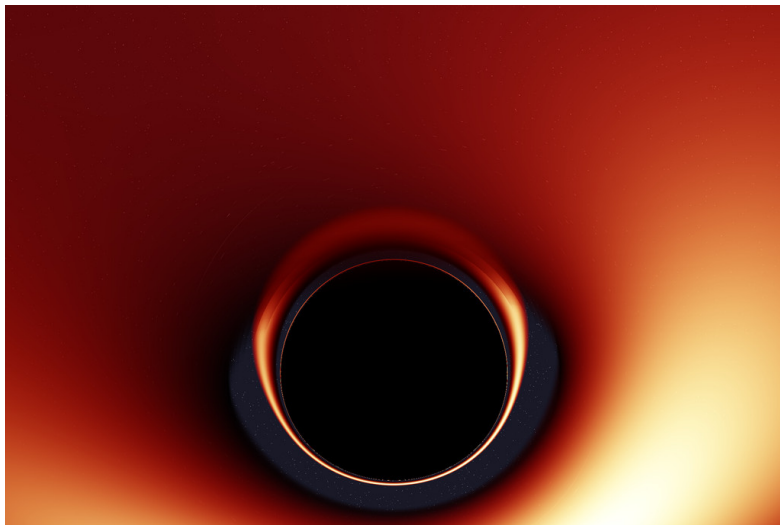
Vol vers un trou noir

Images calculées par J.-A. Marck [Marck, CQG 13, 393 (1996)]



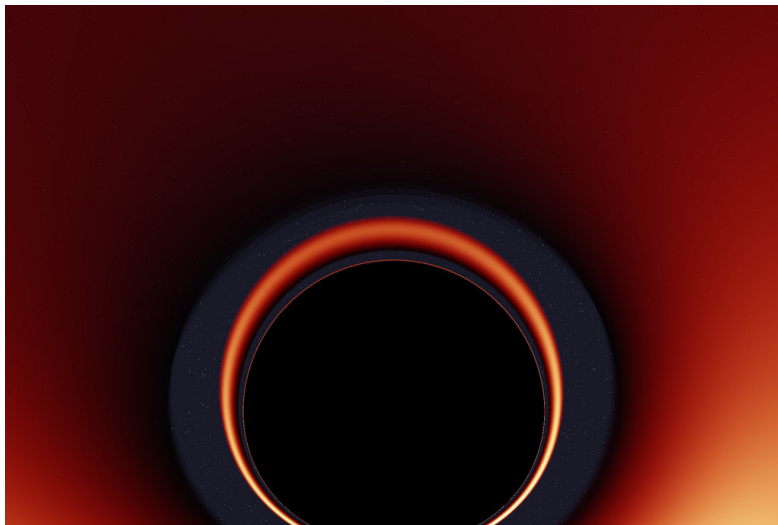
Vol vers un trou noir

Images calculées par J.-A. Marck [[Marck, CQG 13, 393 \(1996\)](#)]



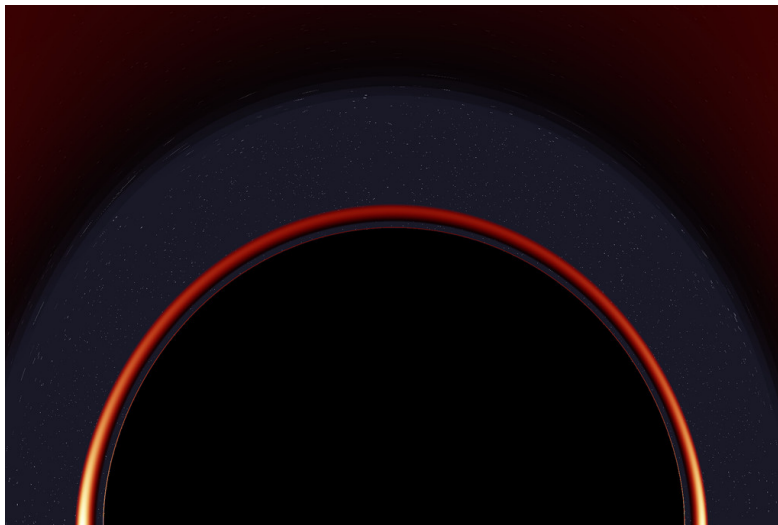
Vol vers un trou noir

Images calculées par J.-A. Marck [[Marck, CQG 13, 393 \(1996\)](#)]

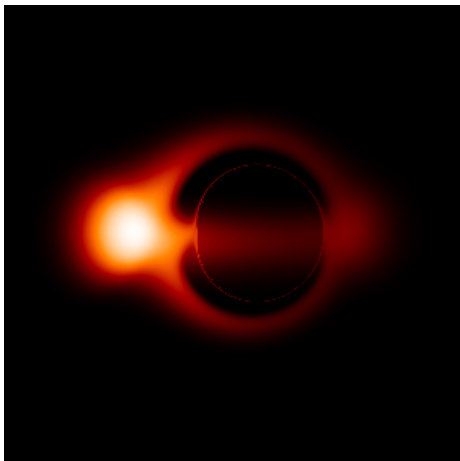
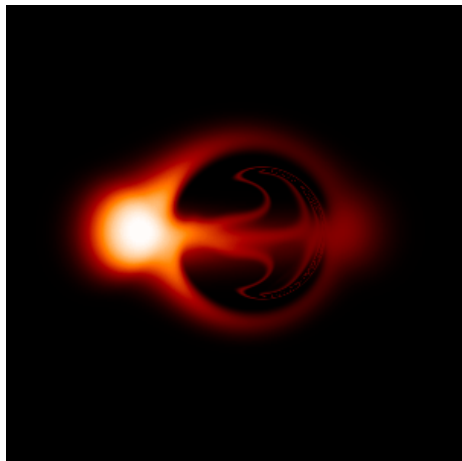


Vol vers un trou noir

Images calculées par J.-A. Marck [[Marck, CQG 13, 393 \(1996\)](#)]



Images d'objets alternatifs au trou noir de Kerr

trou noir de Kerr $a/M = 0.9$ étoile bosonique $k = 1, \omega = 0.70 m/\hbar$ 

[Vincent, Meliani, Grandclément, Gourgoulhon & Straub, CQG 33, 105015 (2016)]

Les trous noirs au cinéma



(c) Warner Bros. Pictures

Interstellar

Christopher Nolan (2014)

Image **calculée suivant les équations de la relativité générale** fournies par Kip Thorne (Prix Nobel de physique 2017)

- Tous les effets de mirage gravitationnel sont là
- Les effets de dilatation temporelle sont bien mis en avant dans le film
- Il manque toutefois l'effet Doppler pour que l'image soit pleinement réaliste

Les trous noirs au cinéma

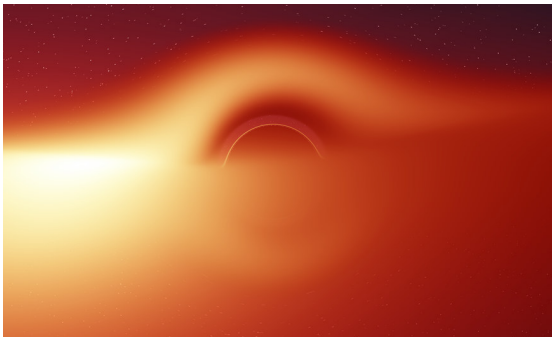


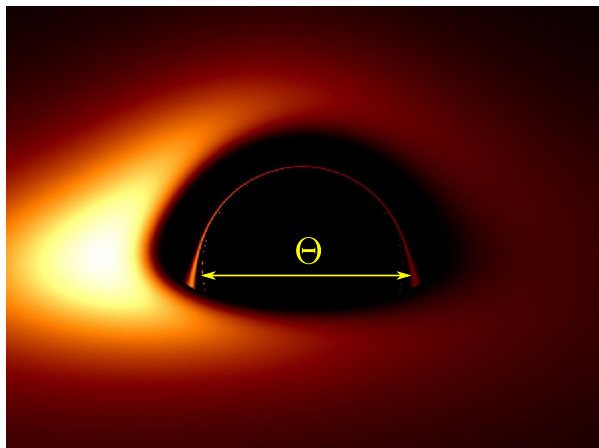
Image calculée par J.-A. Marck (1996)

Interstellar

Christopher Nolan (2014)

- Tous les effets de mirage gravitationnel sont là
- Les effets de dilatation temporelle sont bien mis en avant dans le film
- Il manque toutefois l'effet Doppler pour que l'image soit pleinement réaliste

Peut-on voir les trous noirs ?



Simulation d'image (disque d'accrétion fin)

[Vincent, Paumard, Gourgoulhon & Perrin, CQG 28, 225011 (2011)]

Le plus gros trou noir en taille apparente sur le ciel :

Sgr A* : $\Theta = 53 \mu\text{as}$

Viennent ensuite

M87 : $\Theta = 21 \mu\text{as}$

M31 : $\Theta = 20 \mu\text{as}$

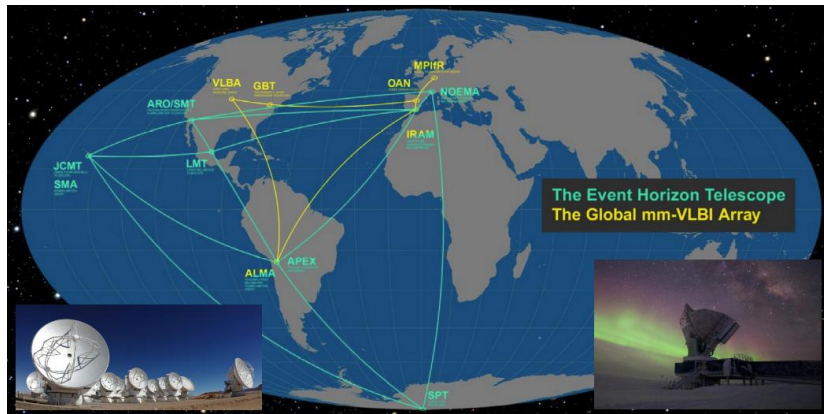
Rem. 1 : Les trous noirs dans les binaires X sont $\sim 10^5$ fois plus petits car $\Theta \propto M/d$

Rem. 2 : résolution angulaire du HST : $\Theta_{\min} \sim 10^5 \mu\text{as}$!

L'Event Horizon Telescope

Interférométrie à très grande base (VLBI) en ondes (sub)millimétriques

⇒ un télescope de taille planétaire !



Campagne d'observation en avril 2017 ⇒ première image dévoilée en 2019

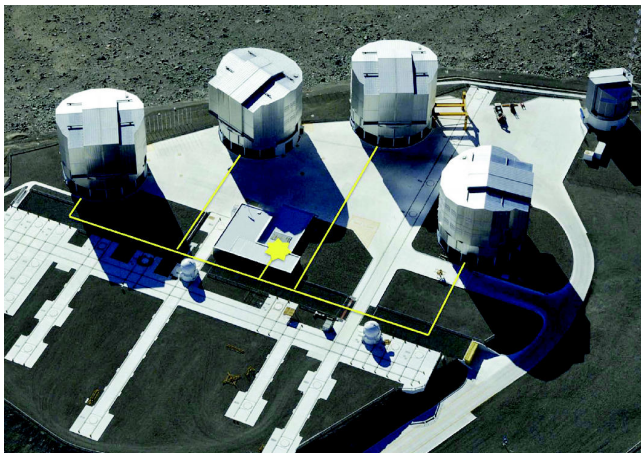
10 avril 2019 : la toute première image observée !



Image du trou noir M87* par la collaboration *Event Horizon Telescope*

[EHT Collaboration, ApJ 875, L1 (2019)]

Observations en interférométrie infra-rouge

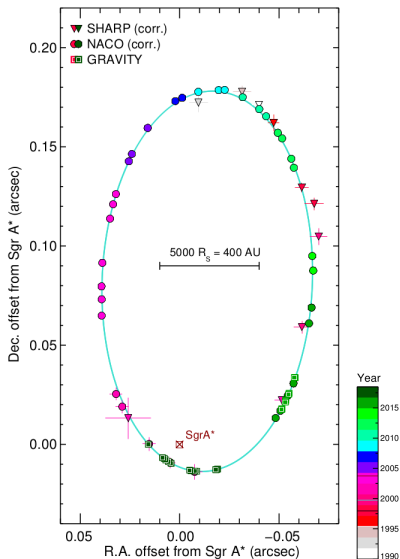


[Gillessen et al. 2010]

Instrument GRAVITY au VLT (2016)

Combine les faisceaux
des 4 télescopes de 8 m
et de 4 télescopes
auxiliaires
⇒ précision
astrométrique de $10 \mu\text{as}$

Le trou noir du centre de notre galaxie : Sgr A*



Trou noir Sgr A* :

- distance : $d = 26\,000$ années-lumière

- masse :

$$\begin{aligned}
 M &= 4.10 \times 10^6 M_{\odot} \\
 &= 20.2 \text{ s} \quad (c = G = 1) \\
 &= 6.06 \times 10^9 \text{ m}
 \end{aligned}$$

- spin $J = aM$ pas encore connu...

⇒ taille de l'ombre $\Theta \sim 53 \mu\text{as}$

← **Orbite de l'étoile S2 autour de Sgr A***

S2 : étoile de type B

période orbitale : $P = 16.05$ an

périastre (mai 2018) :

- $r_{\text{per}} = 120 \text{ UA} = 3 \times 10^3 M$

- $v_{\text{per}} = 7650 \text{ km s}^{-1} = 0.025 c$

[GRAVITY team, A&A 615, L15 (2018)]

Mai 2022 : image de Sgr A* (données EHT de 2017)

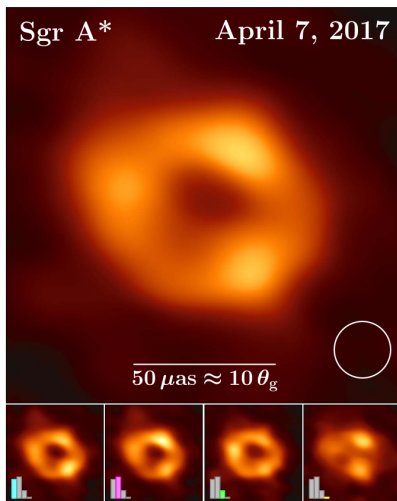
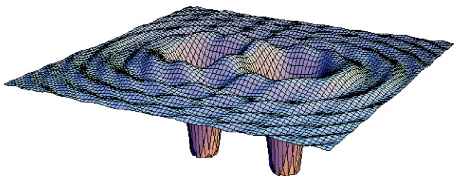


Image du trou noir Sgr A* par la collaboration *Event Horizon Telescope*

[EHT Collaboration, ApJ 930, L12 (2022)]

Un autre canal d'observation : les ondes gravitationnelles

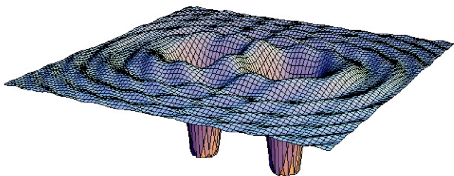


Les trous noirs de Kerr et les ondes gravitationnelles sont tous deux des solutions de l'équation d'Einstein du vide :

$$R = 0$$

avec $R \sim g^{-1} \partial \partial g + g^{-2} (\partial g)^2$

Un autre canal d'observation : les ondes gravitationnelles



Les trous noirs de Kerr et les ondes gravitationnelles sont tous deux des solutions de l'équation d'Einstein du vide :

$$R = 0$$

$$\text{avec } R \sim g^{-1} \partial \partial g + g^{-2} (\partial g)^2$$

- les trous noirs sont des solutions de l'équation complète (non-linéaire) (*Remarque* : il ne peut pas y avoir de trou noir dans le vide en gravitation newtonienne car l'équation de Poisson est linéaire)
- les ondes gravitationnelles sont des solutions de l'équation linéarisée autour de la métrique de Minkowski η : $g = \eta + h$, avec $|h_{\alpha\beta}| \ll 1$ en coordonnées minkowskienne (t, x, y, z)

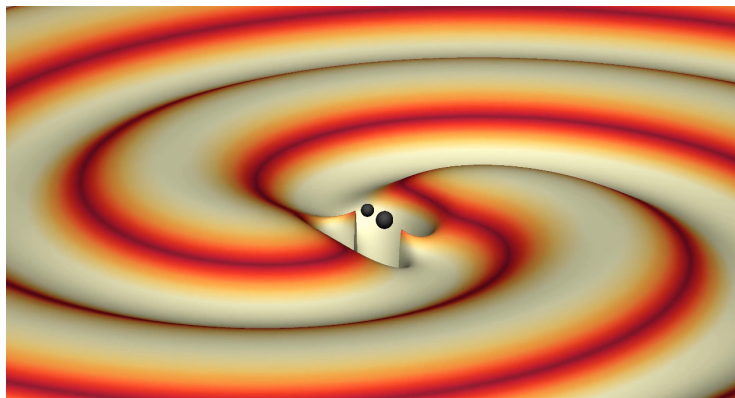
Dans la jauge de Lorenz, $R = -\frac{1}{2} \square_{\eta} \bar{h} + O(|\bar{h}|^2)$, avec $\bar{h} := h - \frac{1}{2} h \eta$

Les détecteurs interférométriques d'ondes gravitationnelles



Détecteur d'ondes gravitationnelles **VIRGO**
Cascina, Pise, Italie [CNRS/INFN]

Ondes gravitationnelles émises par la fusion de deux trous noirs

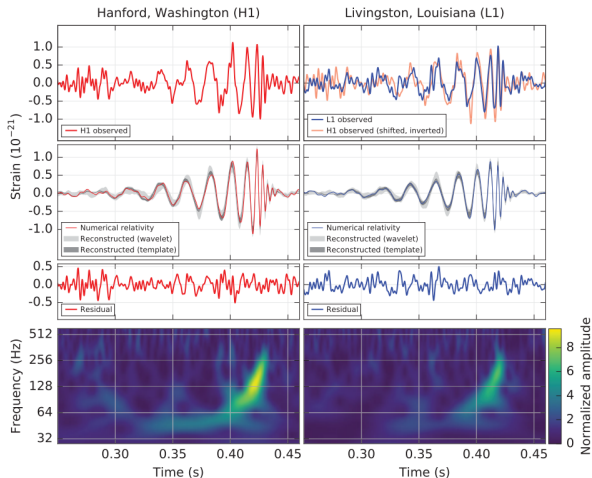


Simulation numérique réalisée en résolvant les équations d'Einstein par ordinateur

[SXS Project]

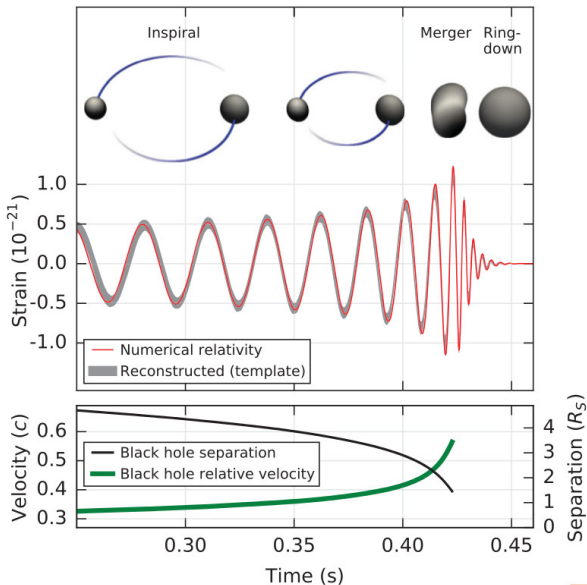
Première détection d'ondes gravitationnelles

Le 14 septembre 2015, à 09 h 50 min 45 s UTC :



[Abbott et al., PRL 116, 061102 (2016)]

Les informations dans le signal GW150914



Signal :

$$\Delta t = 0.2 \text{ s}$$

$$f : 35 \rightarrow 250 \text{ Hz}$$

$$h_{\text{max}} = 1.0 \cdot 10^{-21}$$

Filtre adapté :

$$S/N = 24$$

$$F_{\text{f.al.}} = 1/203,000 \text{ yr}$$

$$M_1 = 36 \pm 5 M_{\odot}$$

$$M_2 = 29 \pm 4 M_{\odot}$$

$$d = 410 \pm 180 \text{ Mpc}$$

$$z = 0.09 \pm 0.04$$

$$M_{\text{final}} = 62 \pm 4 M_{\odot}$$

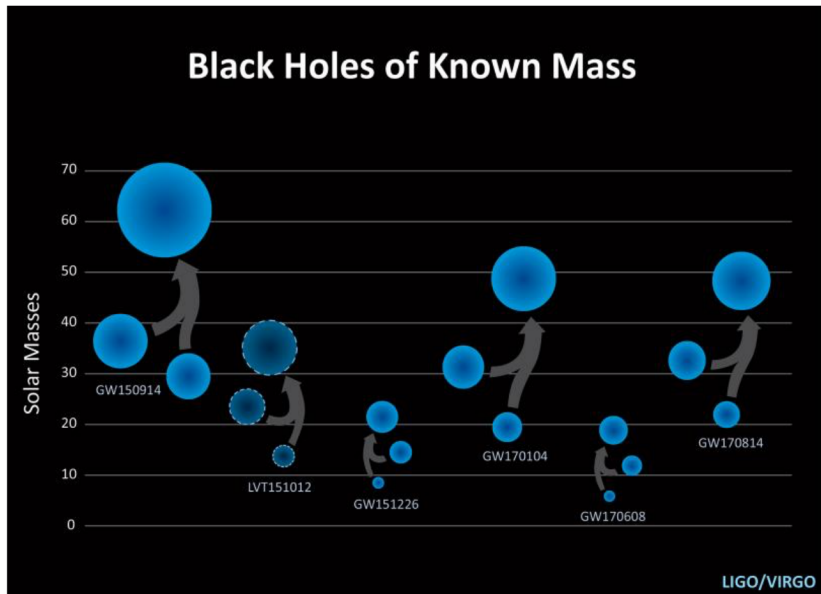
$$\Rightarrow E_{\text{rad}}^{\text{GW}} = 3.0 \pm 0.5 M_{\odot} c^2$$

$$a_1 < 0.7, a_2 < 0.9$$

$$a_{\text{final}} = 0.67 \pm 0.07$$

[Abbott et al., PRL 116, 061102 (2016)]

Trous noirs détectés en ondes gravitationnelles



Plan

- 1 Qu'est-ce qu'un trou noir ?
- 2 L'espace-temps et la relativité générale
- 3 Les trous noirs dans la relativité générale
- 4 Les observations de trous noirs
- 5 Conclusions**

Conclusions

- Les trous noirs font aujourd'hui partie du **bestiaire standard de l'astrophysique**, au même titre que les planètes, les étoiles et les galaxies.

Conclusions

- Les trous noirs font aujourd'hui partie du **bestiaire standard de l'astrophysique**, au même titre que les planètes, les étoiles et les galaxies.
- La théorie des trous noirs, qui repose sur la **relativité générale**, est très bien établie ; elle conduit à des prédictions étonnantes, mais **vérifiées expérimentalement** dans des conditions moins extrêmes (dilatation des temps au voisinage de la Terre ; déviation des rayons lumineux).

Conclusions

- Les trous noirs font aujourd'hui partie du **bestiaire standard de l'astrophysique**, au même titre que les planètes, les étoiles et les galaxies.
- La théorie des trous noirs, qui repose sur la **relativité générale**, est très bien établie ; elle conduit à des prédictions étonnantes, mais **vérifiées expérimentalement** dans des conditions moins extrêmes (dilatation des temps au voisinage de la Terre ; déviation des rayons lumineux).
- On a récemment obtenu les toutes **premières images** des trous noirs **M87*** (2019) et **Sgr A*** (2022).

Conclusions

- Les trous noirs font aujourd'hui partie du **bestiaire standard de l'astrophysique**, au même titre que les planètes, les étoiles et les galaxies.
- La théorie des trous noirs, qui repose sur la **relativité générale**, est très bien établie ; elle conduit à des prédictions étonnantes, mais **vérifiées expérimentalement** dans des conditions moins extrêmes (dilatation des temps au voisinage de la Terre ; déviation des rayons lumineux).
- On a récemment obtenu les toutes **premières images** des trous noirs **M87*** (2019) et **Sgr A*** (2022).
- Les **ondes gravitationnelles**, détectées pour la première fois en 2015, ont ouvert une nouvelle fenêtre observationnelle sur les trous noirs.

Conclusions

- Les trous noirs font aujourd'hui partie du **bestiaire standard de l'astrophysique**, au même titre que les planètes, les étoiles et les galaxies.
- La théorie des trous noirs, qui repose sur la **relativité générale**, est très bien établie ; elle conduit à des prédictions étonnantes, mais **vérifiées expérimentalement** dans des conditions moins extrêmes (dilatation des temps au voisinage de la Terre ; déviation des rayons lumineux).
- On a récemment obtenu les toutes **premières images** des trous noirs **M87*** (2019) et **Sgr A*** (2022).
- Les **ondes gravitationnelles**, détectées pour la première fois en 2015, ont ouvert une nouvelle fenêtre observationnelle sur les trous noirs.
- Ces différents canaux d'observation des trous noirs vont permettre des **tests de la relativité générale**, affinant ainsi notre connaissance de l'espace-temps.

Bibliographie

- P. Binétruy, 2016, *À la poursuite des ondes gravitationnelles* (2e éd.), Dunod
- T. Damour, 2005, *Si Einstein m'était conté*, Le Cherche Midi
- S. Collion, 2019, *Voyage dans les mathématiques de l'espace-temps*, EDP Sciences
- N. Deruelle, 2015, *De Pythagore à Einstein, tout est nombre*, Belin
- N. Deruelle & J.-P. Lasota, 2018, *Les Ondes gravitationnelles*, Odile Jacob
- J.-P. Lasota, 2010, *La science des trous noirs*, Odile Jacob
- J.-P. Luminet, 2006, *Le Destin de l'Univers II*, Folio Essais
- A. Riazuelo, 2016, *Les trous noirs : à la poursuite de l'invisible*, Vuibert
video : <https://www2.iap.fr/users/riazuelo/bh/vuibert>
- M. Smerlak, 2016, *Les trous noirs*, Que sais-je?, PUF
- P. Spagnou, 2017, *Les mystères du temps*, CNRS Éditions
- K.S. Thorne, 1997, *Trous noirs et distorsions du temps*, Flammarion
- K.S. Thorne, 2014, *The Science of Interstellar*, Norton

À propos de ce document

Cette présentation a été réalisée entièrement à l'aide de **logiciels libres** :



Linux

système d'exploitation (Ubuntu)



traitement de texte



Inkscape

dessin vectoriel

April : <https://www.april.org/>
Promouvoir et défendre le logiciel libre