

La thermodynamique des trous noirs

Eric Gourgoulhon

Laboratoire Univers et Théories (LUTH)
CNRS / Observatoire de Paris / Université Paris Diderot
F-92190 Meudon, France

eric.gourgoulhon@obspm.fr

<http://www.luth.obspm.fr/~luthier/gourgoulhon/>

Journée TIPE 2009
ENSTA

4 novembre 2008

- 1 Les trous noirs : une brève introduction
- 2 Les quatre lois de la dynamique des trous noirs
- 3 Thermodynamique des trous noirs
- 4 Bibliographie

Outline

- 1 Les trous noirs : une brève introduction
- 2 Les quatre lois de la dynamique des trous noirs
- 3 Thermodynamique des trous noirs
- 4 Bibliographie

Trou noir en gravitation newtonienne

Michell 1783, Laplace 1796

Vitesse de libération d'un corps de masse M et de rayon R : $V_{\text{lib}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$

$$\text{d'où } V_{\text{lib}} = c \iff R = \frac{2GM}{c^2} \iff R = \sqrt{\frac{3c^2}{8\pi G\rho}}$$

Trou noir en gravitation newtonienne

Michell 1783, Laplace 1796

Vitesse de libération d'un corps de masse M et de rayon R : $V_{\text{lib}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$

$$\text{d'où } V_{\text{lib}} = c \iff R = \frac{2GM}{c^2} \iff R = \sqrt{\frac{3c^2}{8\pi G\rho}}$$

Un corps de même densité que le Soleil, mais de rayon 500 fois plus grand ne laisserait pas s'échapper la lumière \implies **“corps obscur”**

Trou noir en gravitation newtonienne

Michell 1783, Laplace 1796

Vitesse de libération d'un corps de masse M et de rayon R : $V_{\text{lib}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$

$$\text{d'où } V_{\text{lib}} = c \iff R = \frac{2GM}{c^2} \iff R = \sqrt{\frac{3c^2}{8\pi G\rho}}$$

Un corps de même densité que le Soleil, mais de rayon 500 fois plus grand ne laisserait pas s'échapper la lumière \implies **“corps obscur”**

compacité : $\Xi := \frac{GM}{c^2 R} = \frac{V_{\text{lib}}^2}{2c^2}$: trou noir $\iff \Xi > \frac{1}{2}$

Remarque : compacité et densité

Pour un corps sphérique homogène de masse M et de rayon R :

- **densité** : $\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$

- **compacité** : $\Xi := \frac{GM}{c^2 R} \sim \frac{V_{\text{lib}}^2}{c^2} \sim \frac{|E_{\text{grav}}|}{Mc^2} \sim \frac{|\Phi_{\text{surf}}|}{c^2}$

E_{grav} = énergie potentielle gravitationnelle

Φ_{surf} = potentiel gravitationnel à la surface ($\Delta\Phi = 4\pi G\rho$)

$$\Xi = \frac{4\pi G}{3c^2} \rho R^2$$

corps	proton	Terre	Soleil	naine blanche	ét. neutrons	trou noir
Ξ	10^{-39}	10^{-10}	10^{-6}	10^{-3}	10^{-1}	1

Un trou noir est un objet très **compact**, mais pas nécessairement **dense**

Limites du concept newtonien de trou noir

- En théorie newtonienne, la vitesse de la lumière ne joue pas de rôle privilégié : rien n'interdit $V_{\text{lib}} > c$
- Si $V_{\text{lib}} \sim c$, alors $\Xi \sim 1$ et $|E_{\text{grav}}| \sim Mc^2$: une théorie relativiste de la gravitation est nécessaire !

⇒ le traitement correct des trous noirs ne peut se faire qu'en **relativité générale** (ou dans l'une de ses généralisations)

Gravitation newtonienne et relativité générale

Gravitation newtonienne :

équation fondamentale : **équation de Poisson** pour le potentiel gravitationnel Φ :

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho$$

- équation scalaire
- équation linéaire
- équation elliptique
(\Rightarrow propagation instantanée)
- seule source : la densité de masse ρ

Gravitation newtonienne et relativité générale

Gravitation newtonienne :

équation fondamentale : **équation de Poisson** pour le potentiel gravitationnel Φ :

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho$$

- équation scalaire
- équation linéaire
- équation elliptique
(\Rightarrow propagation instantanée)
- seule source : la densité de masse ρ

Relativité générale :

équation fondamentale : **équation d'Einstein** pour le tenseur métrique g :

$$R(g) - \frac{1}{2}R(g)g = \frac{8\pi G}{c^4}T$$

- équation tensorielle (10 équations scalaires)
- équation non-linéaire
- propagation à vitesse finie (c)
- source : énergie-impulsion T de la matière et du champ électromagnétique

Gravitation newtonienne et relativité générale

Gravitation newtonienne :

équation fondamentale : **équation de Poisson** pour le potentiel gravitationnel Φ :

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho$$

- équation scalaire
- équation linéaire
- équation elliptique
(\Rightarrow propagation instantanée)
- seule source : la densité de masse ρ

Relativité générale :

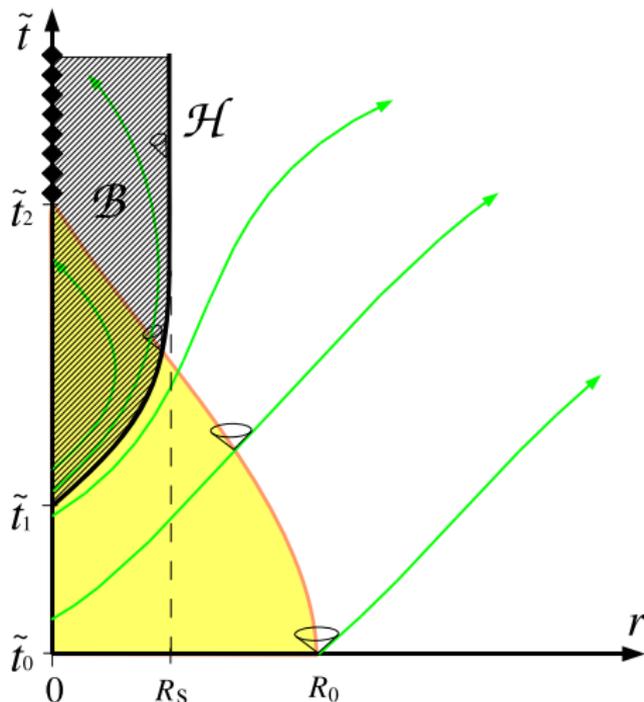
équation fondamentale : **équation d'Einstein** pour le tenseur métrique g :

$$R(g) - \frac{1}{2}R(g)g = \frac{8\pi G}{c^4}T$$

- équation tensorielle (10 équations scalaires)
- équation non-linéaire
- propagation à vitesse finie (c)
- source : énergie-impulsion T de la matière et du champ électromagnétique

Remarque : en champ gravitationnel faible, une des 10 composantes de l'équation d'Einstein se réduit à l'équation de Poisson (et les 9 autres se réduisent à $0 \equiv 0$).

Le trou noir en relativité générale



Un **trou noir** est une région \mathcal{B} de l'espace-temps depuis laquelle aucun photon ne peut atteindre l'infini.

\implies les événements se produisant dans \mathcal{B} n'ont *aucune influence causale* sur le reste de l'espace-temps.

La frontière (immatérielle) \mathcal{H} entre le trou noir et le reste de l'univers est appelée **horizon des événements**. Il s'agit d'une partie tridimensionnelle de l'espace-temps (*hypersurface*). De plus, \mathcal{H} est du genre lumière.

\leftarrow diagramme d'espace-temps montrant la formation d'un trou noir par **effondrement gravitationnel** d'une étoile

Principales propriétés des trous noirs

- Le trou noir contient une région où la courbure de l'espace-temps diverge : la **singularité**

Principales propriétés des trous noirs

- Le trou noir contient une région où la courbure de l'espace-temps diverge : **la singularité**
- L'horizon des événements \mathcal{H} est une **structure globale** de l'espace-temps : aucune expérience de physique locale peut révéler le passage par \mathcal{H} ; un voyageur imprudent ne peut déceler l'instant où il franchit l'horizon

Principales propriétés des trous noirs

- Le trou noir contient une région où la courbure de l'espace-temps diverge : **la singularité**
- L'horizon des événements \mathcal{H} est une **structure globale** de l'espace-temps : aucune expérience de physique locale peut révéler le passage par \mathcal{H} ; un voyageur imprudent ne peut déceler l'instant où il franchit l'horizon
- Vue par un observateur distant, l'approche de l'horizon se traduit par un **décalage spectral vers le rouge infini**, ou de manière équivalente, par une **dilatation des temps infinie**

Principales propriétés des trous noirs

- Le trou noir contient une région où la courbure de l'espace-temps diverge : **la singularité**
- L'horizon des événements \mathcal{H} est une **structure globale** de l'espace-temps : aucune expérience de physique locale peut révéler le passage par \mathcal{H} ; un voyageur imprudent ne peut détecter l'instant où il franchit l'horizon
- Vue par un observateur distant, l'approche de l'horizon se traduit par un **décalage spectral vers le rouge infini**, ou de manière équivalente, par une **dilatation des temps infinie**

- **Théorème d'unicité**

(Dorochkevitch, Novikov & Zeldovitch 1965, Israel 1967, Carter 1971, Hawking 1972) :

un trou noir en équilibre est nécessairement un **trou noir de Kerr-Newmann**, qui est une **solution du vide** de l'équation d'Einstein ($T = 0$) décrite par seulement trois paramètres :

- masse totale M
- moment cinétique total J
- charge électrique totale Q

\implies *"un trou noir n'a pas de cheveux"* (Wheeler)

$Q = 0$: **sol. de Kerr** (1963) ; $Q = 0$ et $J = 0$: **sol. de Schwarzschild** (1916)

Définitions de M , J et Q

- **masse M** : orbite d'un corps d'épreuve autour du trou noir :
suffisamment loin du trou noir, l'approximation de gravitation newtonienne est valable et l'on peut définir M comme le coefficient qui intervient dans la

troisième loi de Kepler :

$$r^3 = GM \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2$$

r = rayon de l'orbite (circulaire), $r \gg GM/c^2 = 1.5 \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)$ km

T = période orbitale

Définitions de M , J et Q

- **masse M** : orbite d'un corps d'épreuve autour du trou noir :
suffisamment loin du trou noir, l'approximation de gravitation newtonienne est valable et l'on peut définir M comme le coefficient qui intervient dans la

troisième loi de Kepler :

$$r^3 = GM \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2$$

r = rayon de l'orbite (circulaire), $r \gg GM/c^2 = 1.5 \left(\frac{M}{M_\odot} \right)$ km

T = période orbitale

- **moment cinétique J** : effet "gravito-magnétique" (Lense-Thirring) :
un gyroscope embarqué dans un satellite en orbite (rayon r) autour du trou noir précesse (par rapport aux étoiles lointaines) à la fréquence

$$\Omega_{LT} = \frac{2GJ}{c^2 r^3}$$

Définitions de M , J et Q

- **masse M** : orbite d'un corps d'épreuve autour du trou noir :
suffisamment loin du trou noir, l'approximation de gravitation newtonienne est valable et l'on peut définir M comme le coefficient qui intervient dans la

troisième loi de Kepler :

$$r^3 = GM \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2$$

r = rayon de l'orbite (circulaire), $r \gg GM/c^2 = 1.5 \left(\frac{M}{M_\odot} \right)$ km

T = période orbitale

- **moment cinétique J** : effet "gravito-magnétique" (Lense-Thirring) :
un gyroscope embarqué dans un satellite en orbite (rayon r) autour du trou noir précesse (par rapport aux étoiles lointaines) à la fréquence

$$\Omega_{LT} = \frac{2GJ}{c^2 r^3}$$

- **charge électrique Q** : théorème de Gauss :

le champ électrique mesuré loin du trou noir est

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} e_r$$

Définitions de M , J et Q

- **masse M** : orbite d'un corps d'épreuve autour du trou noir :
suffisamment loin du trou noir, l'approximation de gravitation newtonienne est valable et l'on peut définir M comme le coefficient qui intervient dans la

troisième loi de Kepler :

$$r^3 = GM \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2$$

r = rayon de l'orbite (circulaire), $r \gg GM/c^2 = 1.5 \left(\frac{M}{M_\odot} \right)$ km

T = période orbitale

- **moment cinétique J** : effet "gravito-magnétique" (Lense-Thirring) :
un gyroscope embarqué dans un satellite en orbite (rayon r) autour du trou noir précesse (par rapport aux étoiles lointaines) à la fréquence

$$\Omega_{LT} = \frac{2GJ}{c^2 r^3}$$

- **charge électrique Q** : théorème de Gauss :

le champ électrique mesuré loin du trou noir est

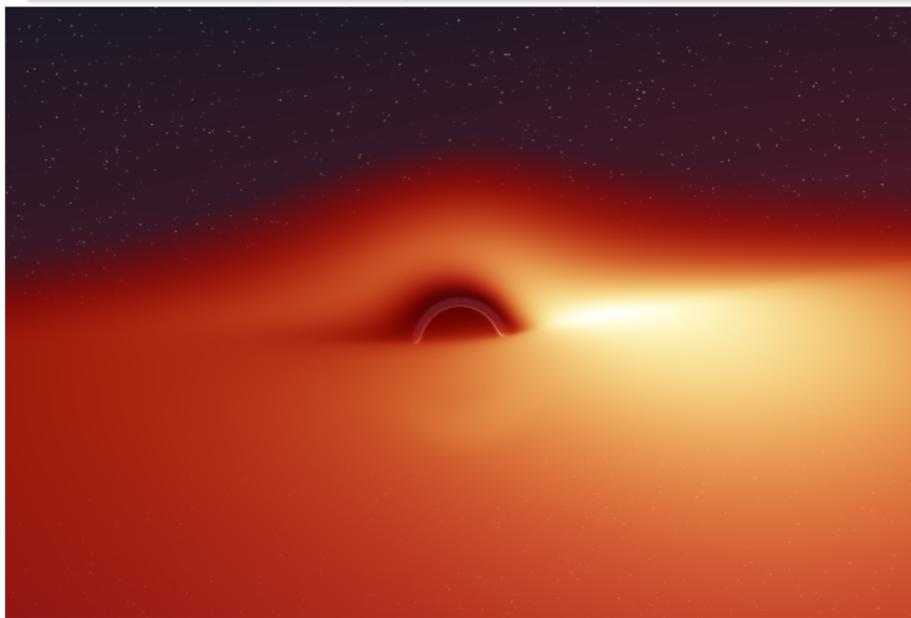
$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} e_r$$

Dans tout ce qui suit, $Q = 0$.

Trous noirs astrophysiques

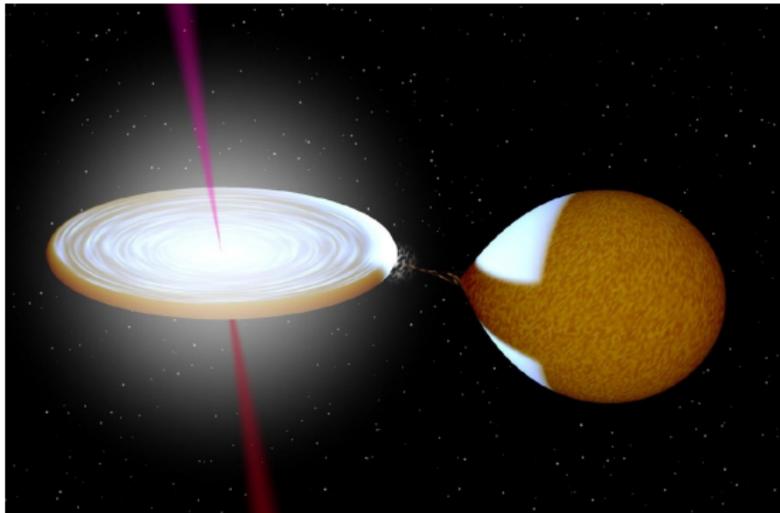
Même si il n'émet aucun photon, un trou noir est observable par ses effets sur son environnement immédiat, en général un **disque d'accrétion**

Libération d'énergie potentielle gravitationnelle par accrétion sur un trou noir : jusqu'à 42% de l'énergie de masse mc^2 !



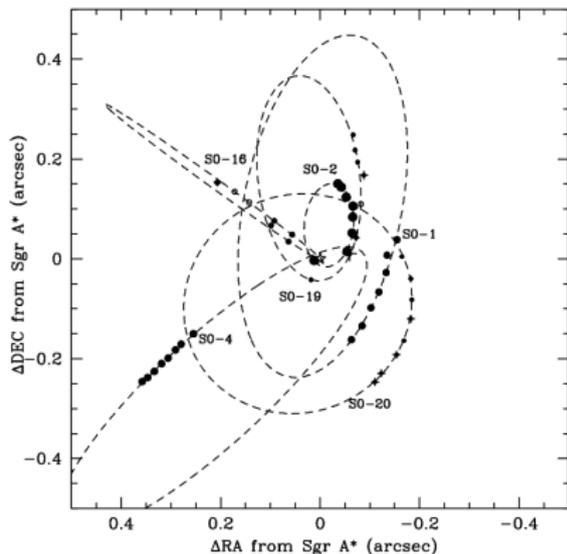
[J.A. Marck, CQG 13, 393]

Trous noirs dans les binaires X



une vingtaine de trous noirs
identifiés dans notre galaxie

Trous noirs massifs au cœur des galaxies



Orbites d'étoiles autour du trou noir
Sgr A* au centre de notre galaxie

[Ghez (2004)]

$$M_{\text{TN}} = 3.6 \times 10^6 M_{\odot}$$

- détection via la dynamique stellaire (Sgr A*)
- noyaux actifs de galaxies
- quasars

$$M_{\text{TN}} \sim 10^6 M_{\odot} \text{ à } \text{qqqs } 10^9 M_{\odot}$$

Observation des trous noirs en ondes gravitationnelles

...dans les années qui viennent !



Détecteur interférométrique **VIRGO** près de Pise (Italie) [CNRS/INFN]

Outline

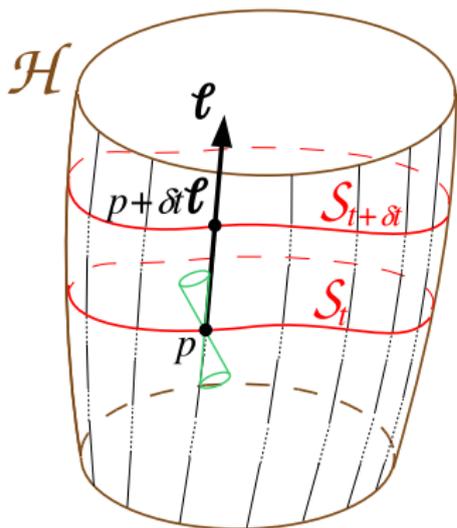
- 1 Les trous noirs : une brève introduction
- 2 Les quatre lois de la dynamique des trous noirs**
- 3 Thermodynamique des trous noirs
- 4 Bibliographie

Les quatre lois de la dynamique des trous noirs

Ces quatre lois ont été établies au début des années 1970 à partir de l'équation d'Einstein, dans le cadre de la **relativité générale classique** (c'est-à-dire sans faire appel à des processus quantiques).
Elles constituent une analogie “troublante” avec les quatre principes de la thermodynamique.

Loi zéro

Bardeen, Carter & Hawking 1973

gravité de surface κ :

- Définition géométrique : $(\ell \cdot \nabla)\ell = \kappa \ell$

ℓ : vecteur du genre lumière normal à l'horizon et associé à la coordonnée temporelle t

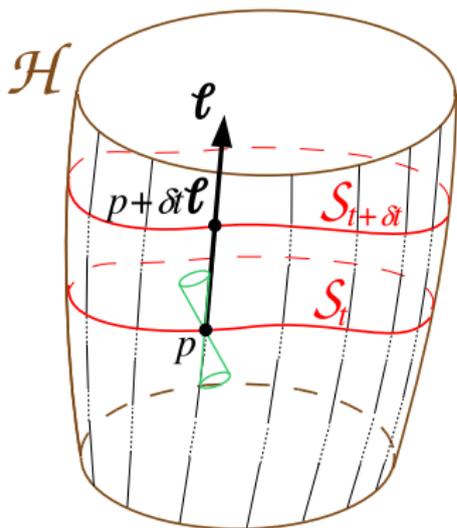
κ mesure l'écart à l'affinité de la coordonnée t le long des géodésiques lumières génératrices de \mathcal{H}

- Interprétation physique : $c\kappa = \frac{d\tau}{dt}a$

a : amplitude de l'accélération d'un observateur \mathcal{O} infiniment proche de l'horizon et en corotation avec \mathcal{H} : $a \rightarrow +\infty$ et $d\tau/dt \rightarrow 0$ (τ temps propre de \mathcal{O})

Loi zéro

Bardeen, Carter & Hawking 1973

gravité de surface κ :

- Définition géométrique : $(\ell \cdot \nabla)\ell = \kappa \ell$

ℓ : vecteur du genre lumière normal à l'horizon et associé à la coordonnée temporelle t

κ mesure l'écart à l'affinité de la coordonnée t le long des géodésiques lumières génératrices de \mathcal{H}

- Interprétation physique : $c\kappa = \frac{d\tau}{dt}a$

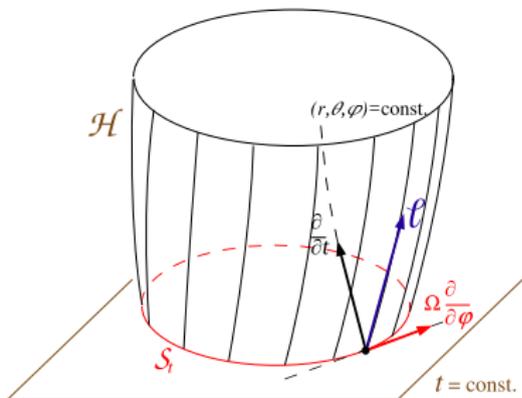
a : amplitude de l'accélération d'un observateur \mathcal{O} infiniment proche de l'horizon et en corotation avec \mathcal{H} : $a \rightarrow +\infty$ et $d\tau/dt \rightarrow 0$ (τ temps propre de \mathcal{O})

Loi zéro : si le trou noir est en équilibre, alors κ est constant sur tout \mathcal{H}

$$\text{Trou noir de Kerr : } \kappa = \frac{c^3}{2GM} \frac{\sqrt{1 - (cJ/GM^2)^2}}{1 + \sqrt{1 - (cJ/GM^2)^2}} \implies \kappa = \frac{c^3}{4GM} \text{ si } J = 0$$

Première loi

Bekenstein 1972, Bardeen, Carter & Hawking 1973



- Aire d'un trou noir : aire $A = A(t)$ d'une section $t = \text{const}$ de l'horizon des événements \mathcal{H} (2-surface S_t de topologie sphérique)
- Vitesse de rotation Ω d'un trou noir axisymétrique stationnaire : $\ell = \partial_t + \Omega \partial_\varphi$
 ∂_t : générateur des translations temporelles
 ∂_φ : générateur des rotations

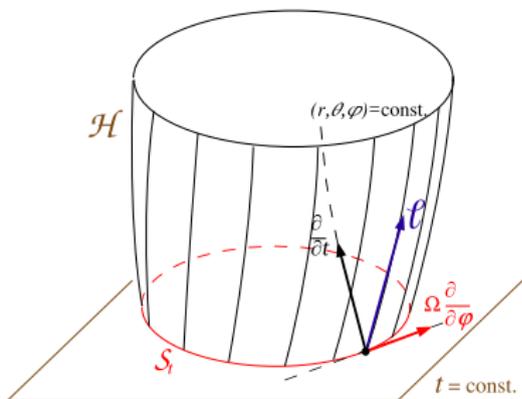
Trou noir de Kerr :

$$A = \frac{8\pi G^2 M^2}{c^4} \left[1 + \sqrt{1 - (cJ/GM^2)^2} \right]$$

$$\text{et } \Omega = \frac{c^4 J}{2G^2 M^3 \left[1 + \sqrt{1 - (cJ/GM^2)^2} \right]}$$

Première loi

Bekenstein 1972, Bardeen, Carter & Hawking 1973



- Aire d'un trou noir : aire $A = A(t)$ d'une section $t = \text{const}$ de l'horizon des événements \mathcal{H} (2-surface \mathcal{S}_t de topologie sphérique)
- Vitesse de rotation Ω d'un trou noir axisymétrique stationnaire : $\ell = \partial_t + \Omega \partial_\varphi$
 ∂_t : générateur des translations temporelles
 ∂_φ : générateur des rotations

Trou noir de Kerr :

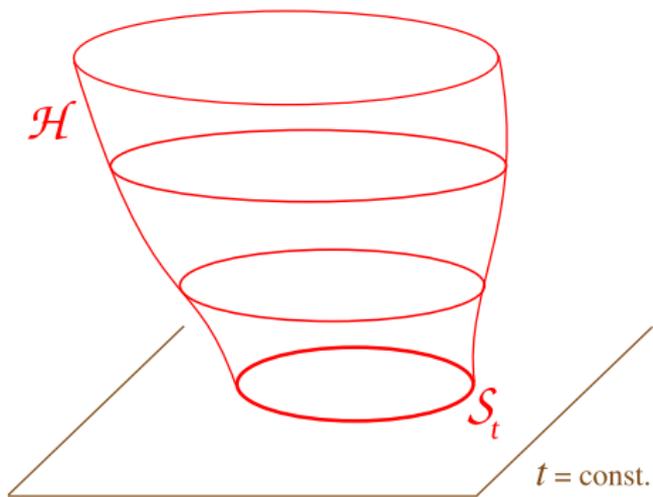
$$A = \frac{8\pi G^2 M^2}{c^4} \left[1 + \sqrt{1 - (cJ/GM^2)^2} \right] \quad \text{et} \quad \Omega = \frac{c^4 J}{2G^2 M^3 \left[1 + \sqrt{1 - (cJ/GM^2)^2} \right]}$$

Première loi : deux configurations d'équilibre voisines sont reliées par

$$\delta M c^2 = \frac{c^3 \kappa}{8\pi G} \delta A + \Omega \delta J.$$

Deuxième loi

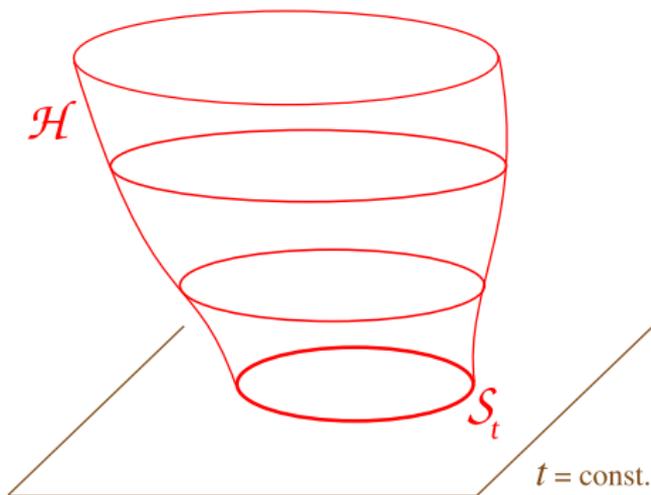
Hawking 1971



Évolution de l'aire $A(t)$ d'un trou noir hors d'équilibre (en formation lors d'un effondrement gravitationnel, accréation de matière, rayonnement gravitationnel, fusion de deux trous noirs, etc...)

Deuxième loi

Hawking 1971



Évolution de l'aire $A(t)$ d'un trou noir hors d'équilibre (en formation lors d'un effondrement gravitationnel, accretion de matière, rayonnement gravitationnel, fusion de deux trous noirs, etc...)

Deuxième loi : si la matière éventuellement présente aux environs du trou noir satisfait à la condition de positivité d'énergie $\forall \mathbf{k}$ genre lumière, $T(\mathbf{k}, \mathbf{k}) \geq 0$, alors

$$\frac{dA}{dt} \geq 0$$

Réversibilité des transformations d'un trou noir

Christodoulou 1970

Accrétion de matière sur un trou noir stationnaire en rotation : $\delta M c^2 \geq \Omega \delta J$

Processus de Penrose (1969) : on peut avoir $\delta M < 0$ et $\delta J < 0 \implies$ extraction d'énergie d'un trou noir en rotation

Rappel : première loi : $\delta M c^2 = \frac{c^3 \kappa}{8\pi G} \delta A + \Omega \delta J$

Transformation réversible : $\delta M c^2 = \Omega \delta J \iff \delta A = 0$

Formule de Christodoulou :

$$M^2 = M_{\text{irr}}^2 + \left(\frac{cJ}{2GM_{\text{irr}}} \right)^2 \quad \text{avec} \quad M_{\text{irr}} := \frac{c^2}{4G} \sqrt{\frac{A}{\pi}} \quad (\text{masse irréductible})$$

- transformation réversible : $M_{\text{irr}} = \text{const}$
- transformation irréversible : $M_{\text{irr}} \nearrow$

Troisième loi

Bardeen, Carter & Hawking 1973, Israel 1986

Définition : un trou noir stationnaire est dit **extrême** ssi sa gravité de surface est nulle : $\kappa = 0$

Trou noir de Kerr : $\kappa = 0 \iff J = GM^2/c$

Pour $J > GM^2/c$, la solution de Kerr représente une **singularité nue**, c'est-à-dire une singularité qui n'est pas entourée d'un horizon des événements. Il ne s'agit donc pas d'un trou noir.

\implies Un trou noir de Kerr extrême est un trou noir en rotation maximale

Troisième loi

Bardeen, Carter & Hawking 1973, Israel 1986

Définition : un trou noir stationnaire est dit **extrême** ssi sa gravité de surface est nulle : $\kappa = 0$

Trou noir de Kerr : $\kappa = 0 \iff J = GM^2/c$

Pour $J > GM^2/c$, la solution de Kerr représente une **singularité nue**, c'est-à-dire une singularité qui n'est pas entourée d'un horizon des événements. Il ne s'agit donc pas d'un trou noir.

\implies Un trou noir de Kerr extrême est un trou noir en rotation maximale

Troisième loi : si $\kappa > 0$, aucun processus physique, par lequel le tenseur énergie-impulsion T reste borné et vérifie la condition d'énergie faible, ne peut réduire κ à zéro en un temps t fini

Outline

- 1 Les trous noirs : une brève introduction
- 2 Les quatre lois de la dynamique des trous noirs
- 3 Thermodynamique des trous noirs**
- 4 Bibliographie

Les trous noirs et le second principe

Bekenstein 1973, 1974

Les trous noirs et la thermodynamique standard (Wheeler 1970) :

Si je jette ma tasse de thé dans un trou noir, elle disparaît à tout jamais, emportant son entropie. L'entropie de l'Univers diminue alors, en violation avec le second principe de la thermodynamique.

Les trous noirs et le second principe

Bekenstein 1973, 1974

Les trous noirs et la thermodynamique standard (Wheeler 1970) :

Si je jette ma tasse de thé dans un trou noir, elle disparaît à tout jamais, emportant son entropie. L'entropie de l'Univers diminue alors, en violation avec le second principe de la thermodynamique.

Solution de Bekenstein (1973,1974) : tout trou noir possède une entropie et cette dernière est proportionnelle à son aire :

$$S = \alpha k \frac{A}{\ell_P^2}$$

$\alpha \approx 1$, $k = \text{const. de Boltzmann}$

$\ell_P := \sqrt{\hbar G/c^3} = 1.62 \cdot 10^{-35} \text{ m} = \text{longueur de Planck}$

Les trous noirs et le second principe

Bekenstein 1973, 1974

Les trous noirs et la thermodynamique standard (Wheeler 1970) :

Si je jette ma tasse de thé dans un trou noir, elle disparaît à tout jamais, emportant son entropie. L'entropie de l'Univers diminue alors, en violation avec le second principe de la thermodynamique.

Solution de Bekenstein (1973,1974) : tout trou noir possède une entropie et cette dernière est proportionnelle à son aire :

$$S = \alpha k \frac{A}{\ell_P^2}$$

$\alpha \approx 1$, $k = \text{const. de Boltzmann}$

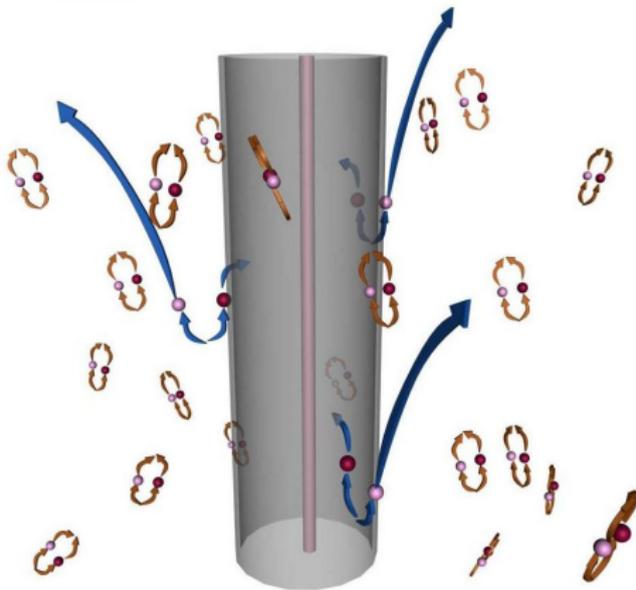
$\ell_P := \sqrt{\hbar G/c^3} = 1.62 \cdot 10^{-35} \text{ m} = \text{longueur de Planck}$

Second principe généralisé

L'entropie généralisée de l'Univers, $S := S_{\text{standard}} + S_{\text{TN}}$, ne peut que croître.

Rayonnement de Hawking

Zeldovitch 1971, Hawking 1974, 1975



[<http://library.thinkquest.org/>]

Étude des **fluctuations du vide** au voisinage d'un trou noir (théorie quantique des champs en espace courbe^{a)} :

création de paires de particules virtuelles près de l'horizon

⇒ le trou noir rayonne comme un **corps noir** à une température proportionnelle à

la gravité de surface : $T = \frac{\hbar}{2\pi k} \kappa$

t.n. de Schwarzschild : $\kappa = c^3/4GM \Rightarrow$

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi Gk} \frac{1}{M} = 6.1 \cdot 10^{-8} \left(\frac{M_{\odot}}{M} \right) \text{ K}$$

^{a)}le champ gravitationnel n'est pas quantifié : il s'agit donc d'une approche semi-classique

Entropie d'un trou noir

La première loi de la dynamique des trous noirs s'écrit

$$\delta M c^2 = T \delta S + \Omega \delta J$$

ssi dans l'expression de Bekenstein de l'entropie de Bekenstein $\alpha = 1/4$, d'où l'expression finale de l'entropie d'un trou noir :

$$S = \frac{k}{4} \frac{A}{\ell_{\text{P}}^2} \quad (\text{formule de Bekenstein-Hawking})$$

t.n. de Schwarzschild : $A = 16\pi G^2 M^2 / c^4$

$$\Rightarrow S = \frac{4\pi G k}{\hbar c} M^2 = 1.5 \cdot 10^{54} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^2 \text{ J K}^{-1} = 1.1 \cdot 10^{77} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^2 k$$

Entropie d'un trou noir

La première loi de la dynamique des trous noirs s'écrit

$$\delta M c^2 = T \delta S + \Omega \delta J$$

ssi dans l'expression de Bekenstein de l'entropie de Bekenstein $\alpha = 1/4$, d'où l'expression finale de l'entropie d'un trou noir :

$$S = \frac{k}{4} \frac{A}{\ell_P^2} \quad (\text{formule de Bekenstein-Hawking})$$

t.n. de Schwarzschild : $A = 16\pi G^2 M^2 / c^4$

$$\Rightarrow S = \frac{4\pi G k}{\hbar c} M^2 = 1.5 \cdot 10^{54} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^2 \text{ JK}^{-1} = 1.1 \cdot 10^{77} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^2 k$$

Bilan

énergie	$M c^2$
température	$T = (\hbar / 2\pi k) \kappa$
entropie	$S = (k / 4\ell_P^2) A$
travail des forces externes	$\Omega \delta J$

Interprétation statistique de l'entropie des trous noirs

L'entropie d'un trou noir donnée par la formule de Bekenstein-Hawking est

énorme : pour Sgr A* ($M = 4 \cdot 10^6 M_{\odot}$) $S = 2 \cdot 10^{90} k$!

↔ entropie totale de l'Univers observable $S \sim 10^{88} k$

(essentiellement dans les photons du fond diffus cosmologique)

Interprétation statistique de l'entropie des trous noirs

L'entropie d'un trou noir donnée par la formule de Bekenstein-Hawking est

énorme : pour Sgr A* ($M = 4 \cdot 10^6 M_{\odot}$) $S = 2 \cdot 10^{90} k$!

↔ entropie totale de l'Univers observable $S \sim 10^{88} k$

(essentiellement dans les photons du fond diffus cosmologique)

Nombre d'états microscopiques : $S = k \ln N \implies N_{\text{Sgr A}^*} = \exp(S/k) \sim 10^{10^{90}}$

Interprétation statistique de l'entropie des trous noirs

L'entropie d'un trou noir donnée par la formule de Bekenstein-Hawking est

énorme : pour Sgr A* ($M = 4 \cdot 10^6 M_{\odot}$) $S = 2 \cdot 10^{90} k$!

↔ entropie totale de l'Univers observable $S \sim 10^{88} k$

(essentiellement dans les photons du fond diffus cosmologique)

Nombre d'états microscopiques : $S = k \ln N \implies N_{\text{Sgr A*}} = \exp(S/k) \sim 10^{10^{90}}$

Mais au fait que sont ces états microscopiques ?

Interprétation statistique de l'entropie des trous noirs

L'entropie d'un trou noir donnée par la formule de Bekenstein-Hawking est

énorme : pour Sgr A* ($M = 4 \cdot 10^6 M_{\odot}$) $S = 2 \cdot 10^{90} k$!

↔ entropie totale de l'Univers observable $S \sim 10^{88} k$

(essentiellement dans les photons du fond diffus cosmologique)

Nombre d'états microscopiques : $S = k \ln N \implies N_{\text{Sgr A*}} = \exp(S/k) \sim 10^{10^{90}}$

Mais au fait que sont ces états microscopiques ?

La réponse ne peut provenir que d'une **théorie quantique de la gravitation**

Diverses tentatives :

- **théorie des cordes** : formule de Bekenstein-Hawking obtenue pour une certaine classe de trous noirs extrémaux (Strominger & Vafa, 1996)
- **gravité quantique à boucles** : $S \propto A/\ell_{\text{P}}^2$ pour un trou noir de Schwarzschild (Rovelli 1996, Krasnov 1997, Ashtekar et al. 2000)

Conclusions

- Dans le cadre de la relativité générale stricte (i.e. sans effets quantiques), on peut établir des **lois pour la dynamique des trous noirs** qui sont fortement **analogues aux principes de la thermodynamique**
- En quantifiant les champs autres que le champ gravitationnel (théorie quantique des champs en espace courbe), cette analogie devient une identification physique et permet de définir la **température** et l'**entropie** d'un trou noir. Ce dernier devient alors un objet thermodynamique "presque" comme un autre
- La thermodynamique des trous noirs, notamment via la formule de Bekenstein-Hawking pour l'entropie, constitue un pont entre la relativité générale et une **théorie quantique de la gravitation** (qui reste à construire).

Outline

- 1 Les trous noirs : une brève introduction
- 2 Les quatre lois de la dynamique des trous noirs
- 3 Thermodynamique des trous noirs
- 4 Bibliographie

Références générales

- S.M. Carroll, 2004, *Spacetime and geometry*, Pearson / Addison Wesley (chapitres 6 et 9)
- T. Damour, 2004, *The entropy of black holes : a primer*, in *Poincaré Seminar 2003*, Birkhauser, en ligne sur <http://fr.arxiv.org/abs/hep-th/0401160>
- R. Penrose, 2007, *À la découverte des lois de l'univers*, Odile Jacob
- K.S. Thorne, 1997, *Trous noirs et distorsions du temps*, Flammarion
- R.M. Wald, 2001, *The Thermodynamics of Black Holes*, Living Rev. Relativity **4**, 6, en ligne sur <http://www.livingreviews.org/lrr-2001-6>

Références citées dans le texte (1/2)

- A. Ashtekar, J.C. Baez, & K. Krasnov, 2000, *Quantum Geometry of Isolated Horizons and Black Hole Entropy*, Adv. Theor. Math. Phys. **4**, 1
- J.M. Bardeen, B. Carter, & S.W. Hawking, 1973, *The four laws of black hole mechanics*, Commun. Math. Phys. **31**, 161
- J. D. Bekenstein, 1973, *Black holes and entropy*, Phys. Rev. D **7**, 2333
- J. D. Bekenstein, 1974, *Generalized second law of thermodynamics in black hole physics*, Phys. Rev. D **9**, 3292
- B. Carter, 1971, *An Axisymmetric Black Hole has only Two Degrees of Freedom*, Phys. Rev. Lett. **26**, 331
- D. Christodoulou, 1970, *Reversible and Irreversible Transformations in Black-Hole Physics*, Phys. Rev. Lett. **25**, 1596
- S.W. Hawking, 1971, *Gravitational Radiation from Colliding Black Holes*, Phys. Rev. Lett. **26**, 1344
- S.W. Hawking, 1972, *Black Holes in General Relativity*, Commun. Math. Phys. **25**, 152
- S.W. Hawking, 1974, *Black hole explosions?*, Nature **248**, 30
- S.W. Hawking, 1975, *Particle creation by black holes*, Commun. Math. Phys. **43**, 199

Références citées dans le texte (2/2)

- W. Israel, 1967, *Event horizons in static vacuum spacetimes*, Phys. Rev. **164**, 1776
- K.V. Krasnov, 1997, *Geometrical entropy from loop quantum gravity*, Phys. Rev. D **55**, 3505
- C. Rovelli, 1996, *Black Hole Entropy from Loop Quantum Gravity*, Phys. Rev. Lett. **77**, 3288
- A. Strominger & C. Vafa, 1996, *Microscopic origin of the Bekenstein-Hawking entropy*, Phys. Lett. B **379**, 99
- Y. B. Zeldovitch & A.A. Starobinsky, 1971, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **61**, 2161