

Relativité numérique et sources d'ondes gravitationnelles

Éric Gourgoulhon
Laboratoire de l'Univers et de ses Théories (LUTH)
CNRS / Observatoire de Paris
F-92195 Meudon, France

en collaboration avec

Michal Bejger, Silvano Bonazzola, Dorota Gondek-Rosińska,
Philippe Grandclément, Pawel Haensel, Jose Luis Jaramillo,
François Limousin, Jérôme Novak, Keisuke Taniguchi, & Leszek Zdunik

Eric.Gourgoulhon@obspm.fr

<http://www.luth.obspm.fr>

Séminaire à l'Institut d'Astrophysique de Paris, 12 Déc. 2003

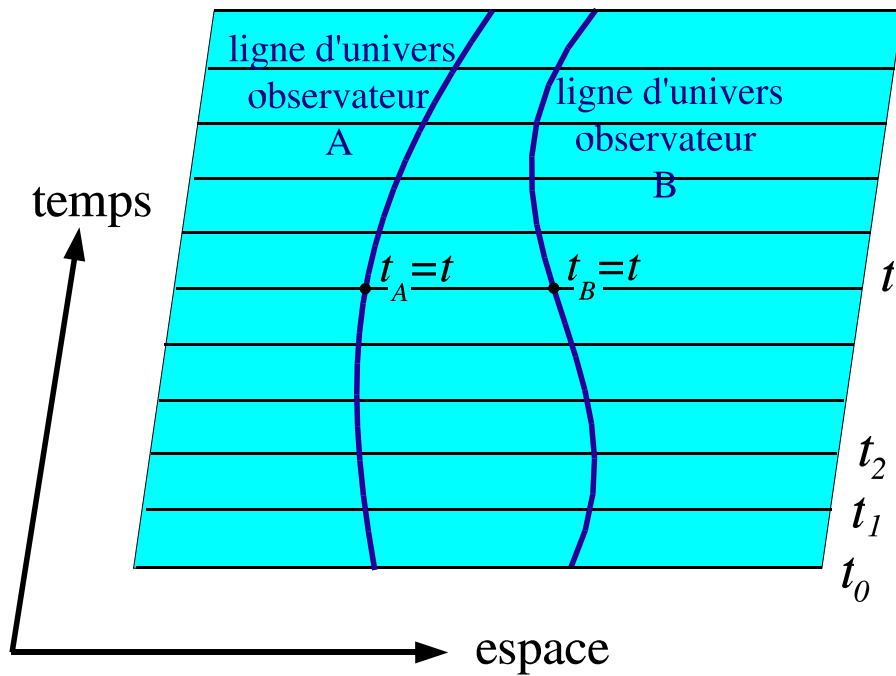
Plan

1. L'espace-temps relativiste et les ondes gravitationnelles
2. Le formalisme 3+1 de la relativité générale
3. La décomposition conforme des équations d'Einstein
4. Un exemple d'implémentation numérique: LORENE
5. Applications astrophysiques

1

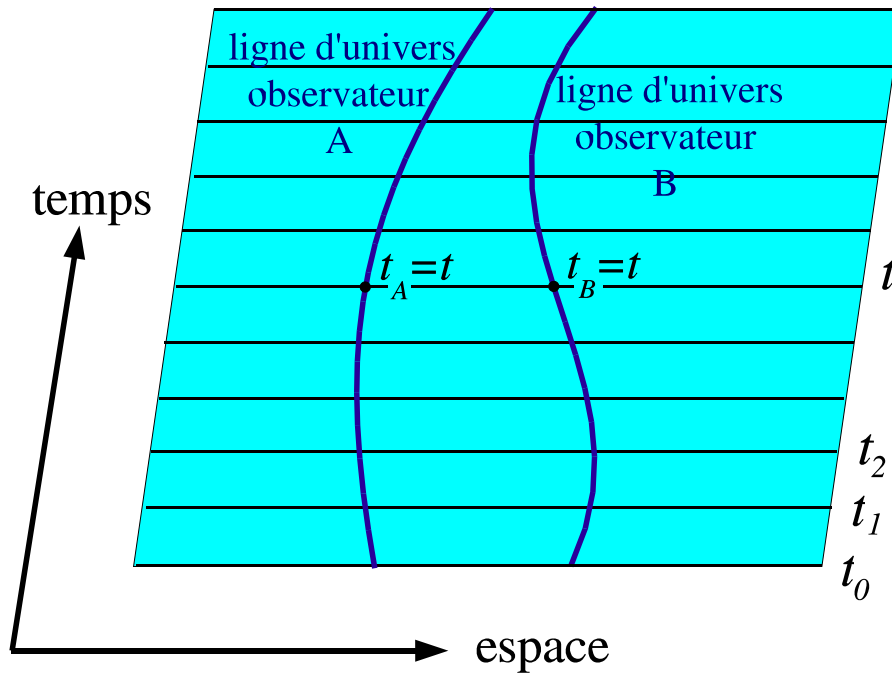
L'espace-temps relativiste et les ondes gravitationnelles

L'espace-temps relativiste

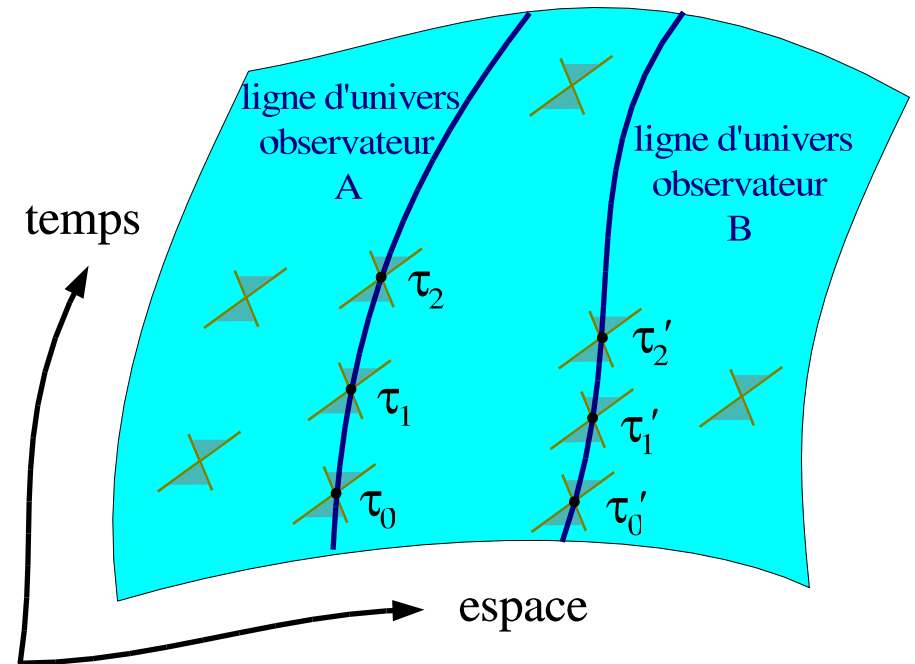


Espace-temps newtonien
structure: temps universel

L'espace-temps relativiste

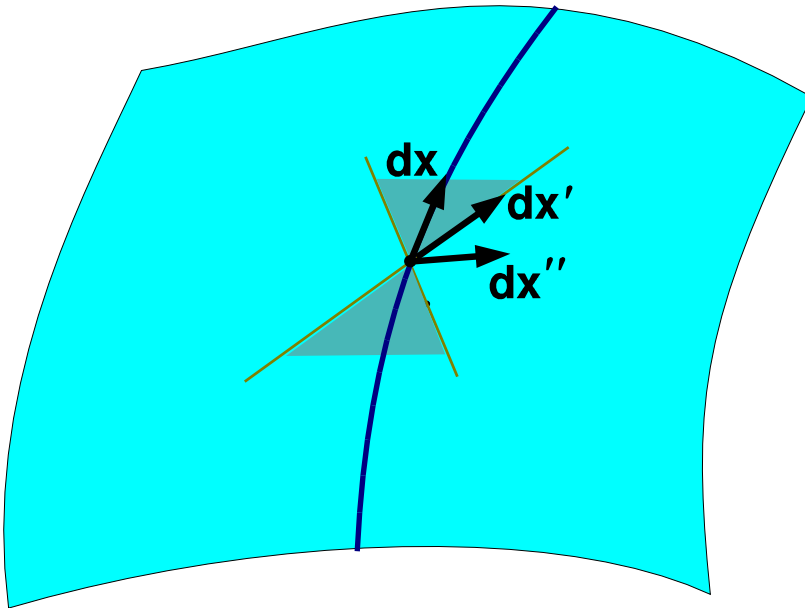


Espace-temps newtonien
structure: temps universel



Espace-temps de la relativité générale
structure: cônes de lumière (tenseur métrique)

Le tenseur métrique



tenseur métrique \mathbf{g} = forme bilinéaire symétrique signature $(-, +, +, +)$ telle que

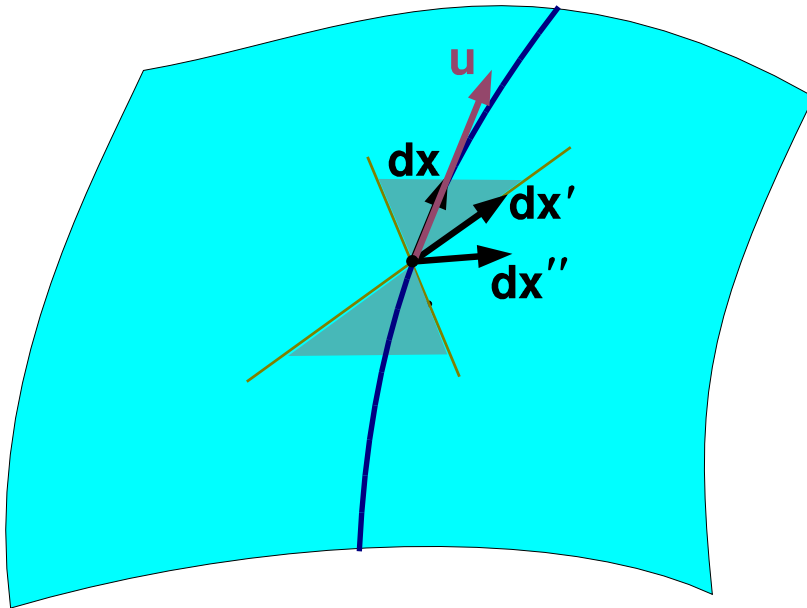
- temps propre pour un déplacement \mathbf{dx} :

$$d\tau^2 = -\mathbf{g}(\mathbf{dx}, \mathbf{dx}) = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -\mathbf{dx} \cdot \mathbf{dx}$$
- le long du cône de lumière :

$$\mathbf{g}(\mathbf{dx}', \mathbf{dx}') = 0$$
- distance propre pour un déplacement \mathbf{dx}'' :

$$dl^2 = \mathbf{g}(\mathbf{dx}'', \mathbf{dx}'')$$

Le tenseur métrique



tenseur métrique \mathbf{g} = forme bilinéaire symétrique signature $(-, +, +, +)$ telle que

- temps propre pour un déplacement \mathbf{dx} :

$$d\tau^2 = -\mathbf{g}(\mathbf{dx}, \mathbf{dx}) = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -\mathbf{dx} \cdot \mathbf{dx}$$
- le long du cône de lumière :

$$\mathbf{g}(\mathbf{dx}', \mathbf{dx}') = 0$$
- distance propre pour un déplacement \mathbf{dx}'' :

$$dl^2 = \mathbf{g}(\mathbf{dx}'', \mathbf{dx}'')$$

Quadrivitesse le long d'une ligne d'univers: $\mathbf{u} := \frac{\mathbf{dx}}{d\tau}$

NB: $\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = -1$

Dynamique de l'espace-temps

Équation d'Einstein :

$$\mathbf{R} - \frac{1}{2}R \mathbf{g} = \frac{8\pi G}{c^4} \mathbf{T}$$

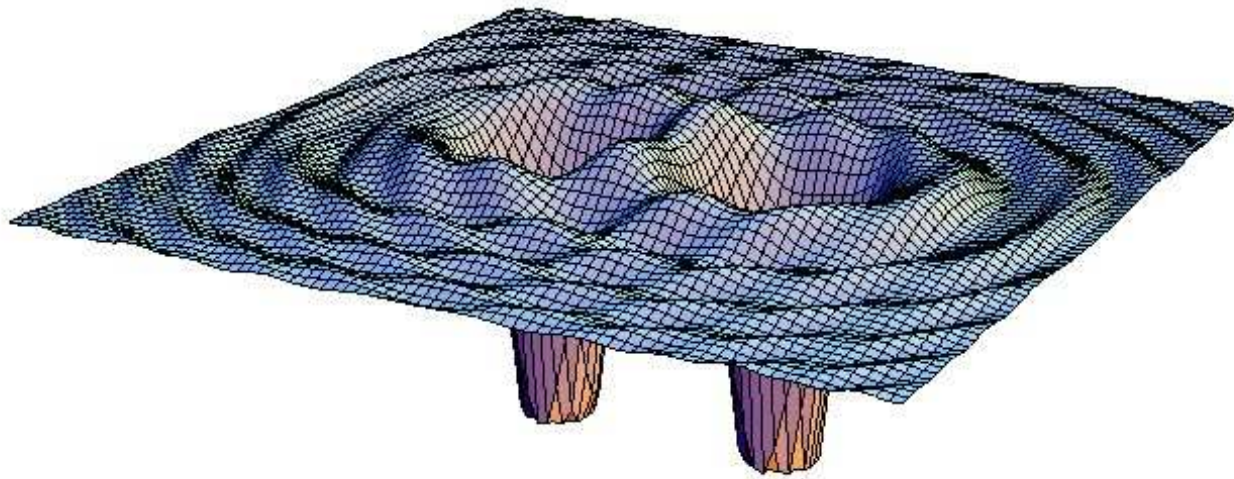
- \mathbf{R} = tenseur de Ricci = trace du **tenseur de courbure** (tenseur de Riemann) :
 “ $\mathbf{R} \sim \mathbf{g} \partial^2 \mathbf{g} + \mathbf{g} \partial \mathbf{g} \partial \mathbf{g}$ ”
- $R = \text{Trace}(\mathbf{R})$
- \mathbf{T} = **tenseur énergie-impulsion** de la matière = forme bilinéaire symétrique telle que
 - ★ $E := \mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ est la densité d'énergie de la matière mesurée par un observateur \mathcal{O} de quadrivitesse \mathbf{u}
 - ★ $p_i := -\mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{e}_i)$ composante i de la densité d'impulsion de la matière mesurée par \mathcal{O} dans la direction \mathbf{e}_i
 - ★ $S_{ij} := \mathbf{T}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ composante i de la force exercée par la matière sur l'unité de surface normale à \mathbf{e}_j

Ondes gravitationnelles

Linéarisation de l'équation d'Einstein en champ faible ($\mathbf{g} = \boldsymbol{\eta} + \mathbf{h}$, $\boldsymbol{\eta}$:= métrique de Minkowski¹)

$$\implies \square \bar{\mathbf{h}} = 0 \quad (\text{en jauge de Lorentz})$$

avec $\square := \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$, $\bar{\mathbf{h}} := \mathbf{h} - \frac{1}{2} h \boldsymbol{\eta}$ et $h := \text{Trace}(\mathbf{h})$.



Puissance totale émise:

$$L \sim \frac{c^5}{G} s^2 \left(\frac{v}{c}\right)^6 \Xi^2$$

s = facteur d'asymétrie

v = vitesse caractéristique dans la source

Ξ = **compacité**

\implies **Bons émetteurs d'ondes gravitationnelles = objets compacts**

¹ $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ en coordonnées cartésiennes

Détection des ondes gravitationnelles

Des détecteurs d'ondes gravitationnelles entrent en service...



VIRGO, Cascina, Italie

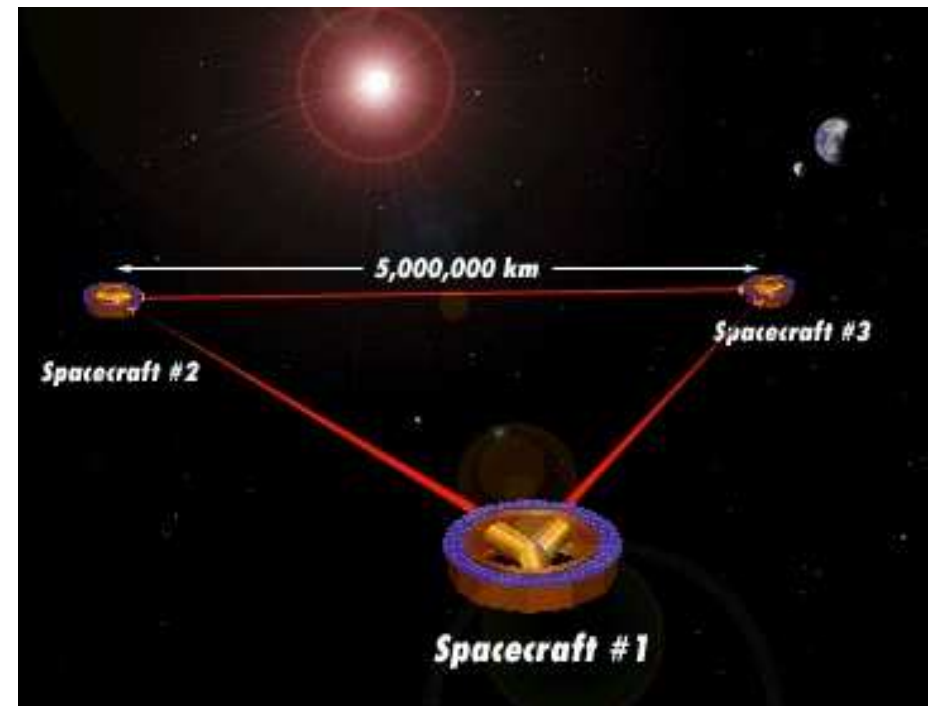
$10 \text{ Hz} < f < 10^3 \text{ Hz}$

(inauguration le 23 juillet 2003)

Autres détecteurs: LIGO, GEO600, TAMA

$$\delta L = hL, \quad h \sim 10^{-21}$$

...ou seront lancés dans un futur pas trop lointain (2011)



LISA (ESA/NASA)

$10^{-4} \text{ Hz} < f < 10^{-1} \text{ Hz}$

Modélisation des sources d'ondes gravitationnelles

Ondes gravitationnelles = nouveau vecteur d'information pour l'astronomie, complémentaire du **photon**:

- se propagent pratiquement sans absorption
- proviennent d'objets qui n'émettent pas ou peu de photons (ex: trous noirs)

Calcul théorique des formes d'ondes gravitationnelles

- nécessaire pour la détection des ondes (extraction du signal du bruit de fond à faible S/N)
- permet l'analyse du signal et la détermination des caractéristiques de la source

Sources principales = objets compacts (étoiles à neutrons, trous noirs), dont la dynamique est régie par la relativité générale

⇒ **il faut résoudre l'équation d'Einstein**

2

Le formalisme 3+1 de la relativité générale

Formalisme 3+1 de la relativité générale

Histoire: Lichnerowicz (1944), Choquet-Bruhat (1952), Arnowitt, Deser & Misner (1962), York & Ó Murchadha (1974), et beaucoup d'autres...

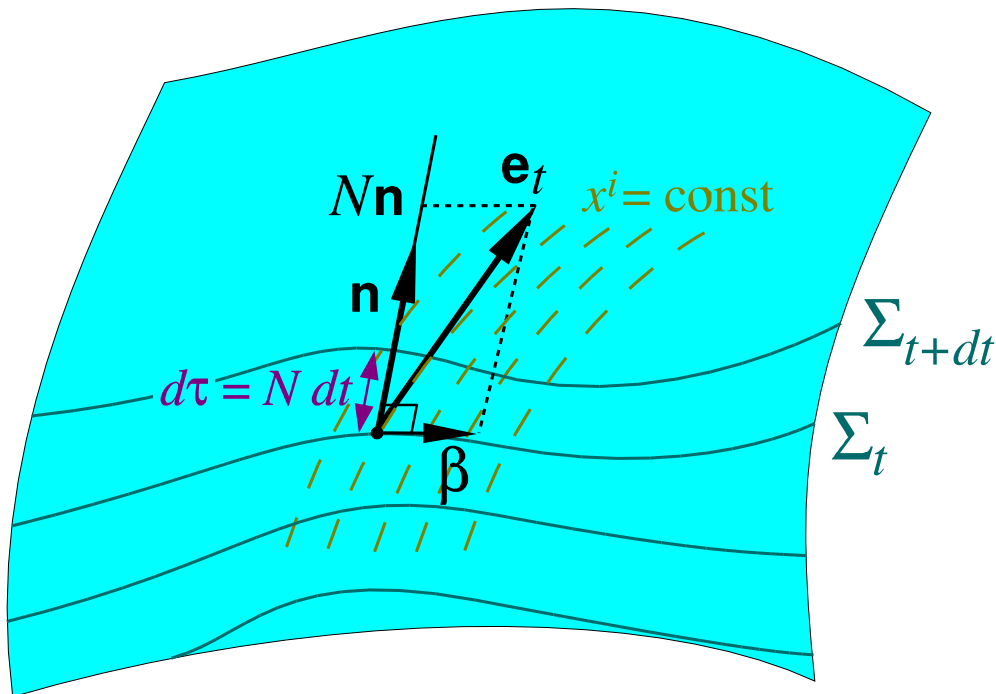
Principe du formalisme 3+1:

Rappel: pas de structure temporelle globale privilégiée dans l'espace-temps relativiste

Feuilletage de l'espace-temps par une famille d'hypersurfaces $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$ spatiales; sur chaque hypersurface, système de coordonnées $(x^i)_{i \in \{1,2,3\}}$

$\implies (x^\mu)_{\mu \in \{0,1,2,3\}} = (t, x^1, x^2, x^3) =$ système de coordonnées de l'espace-temps tout entier ($t =$ coordonnée "temps", sans signification physique particulière)

Feuilletage de l'espace-temps



\mathbf{n} : normale unitaire à Σ_t / métrique \mathbf{g}
 $\mathbf{n} = -N dt$, N : fonction *lapse*
 \mathbf{e}_t : vecteur “temps” de la base naturelle / coordonnées (x^μ)

$$\left. \begin{array}{l} N : \text{fonction lapse} \\ \beta : \text{vecteur shift} \end{array} \right\} \mathbf{e}_t = N\mathbf{n} + \beta$$

Géométrie des hypersurfaces Σ_t :

– métrique induite $\gamma = \mathbf{g} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$

– tenseur de courbure extrinsèque : \mathbf{K}

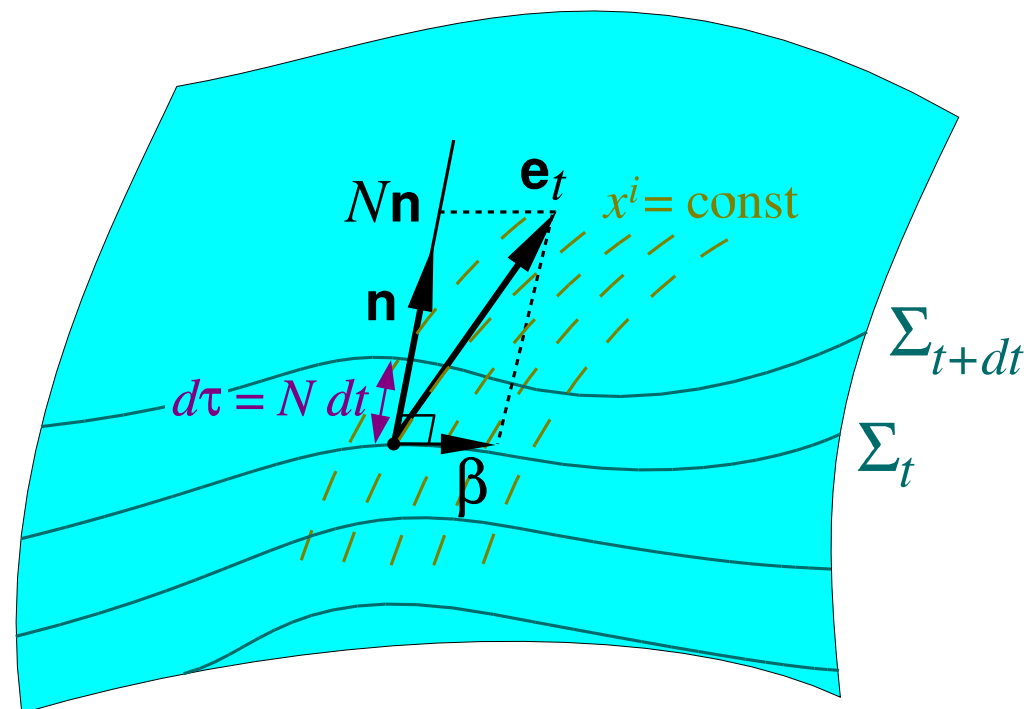
$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -(N^2 - \beta_i \beta^i) dt^2 + 2\beta_i dt dx^i + \gamma_{ij} dx^i dx^j$$

Choix de coordonnées et formalisme 3+1

$$(x^\mu) = (t, x^i) = (t, x^1, x^2, x^3)$$

Choix de la fonction lapse N \iff choix du feuilletage (Σ_t)

Choix du vecteur shift β \iff choix des coordonnées spatiales (x^i) sur chaque hypersurface Σ_t (via le choix de \mathbf{e}_t)



Un choix de feuilletage très répandu: le feuilletage maximal $K := \text{tr } \mathbf{K} = 0$

[Lichnerowicz 1944]

Équations d'Einstein sous forme 3+1

Projection orthogonale de l'équation d'Einstein sur Σ_t et suivant la normale à Σ_t :

- Équation de contrainte hamiltonienne:

$$R + K^2 - K_{ij}K^{ij} = 16\pi E$$

- Équation de contrainte impulsionnelle :

$$D_j K^{ij} - D^i K = 8\pi J^i$$

- Équations dynamiques :

$$\frac{\partial K_{ij}}{\partial t} - \mathcal{L}_\beta K_{ij} = -D_i D_j N + N [R_{ij} - 2K_{ik}K^k_j + K K_{ij} + 4\pi((S - E)\gamma_{ij} - 2S_{ij})]$$

$$E := \mathbf{T}(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = T_{\mu\nu} n^\mu n^\nu, \quad J_i := -\gamma_i^\mu T_{\mu\nu} n^\nu, \quad S_{ij} := \gamma_i^\mu \gamma_j^\nu T_{\mu\nu}$$

R_{ij} : tenseur de Ricci de la métrique spatiale γ , D_i : dérivée covariante associée à γ

Relation cinématique entre γ et \mathbf{K} :
$$\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} - \mathcal{L}_\beta \gamma_{ij} = -2N K_{ij}$$

Formal. 3+1 \implies Résolution équation d'Einstein = **problème de Cauchy** [Choquet-Bruhat 1952]

3

La décomposition conforme des équations d'Einstein

Conformal metric

York (1972) : **Dynamical degrees of freedom** of the gravitational field carried by the conformal “metric”

$$\hat{\gamma}_{ij} := \gamma^{-1/3} \gamma_{ij} \quad \text{with } \gamma := \det \gamma_{ij}$$

$$\hat{\gamma}_{ij} = \text{tensor density of weight } -2/3$$

To work with tensor fields only, introduce an *extra structure* on Σ_t : a **flat metric \mathbf{f}** such that $\frac{\partial f_{ij}}{\partial t} = 0$ and $\gamma_{ij} \sim f_{ij}$ at spatial infinity (**asymptotic flatness**)

Define $\tilde{\gamma}_{ij} := \Psi^{-4} \gamma_{ij}$ or $\gamma_{ij} =: \Psi^4 \tilde{\gamma}_{ij}$ with $\Psi := \left(\frac{\gamma}{f}\right)^{1/12}$, $f := \det f_{ij}$

$\tilde{\gamma}_{ij}$ is invariant under any conformal transformation of γ_{ij} and verifies $\det \tilde{\gamma}_{ij} = f$

Notations: $\tilde{\gamma}^{ij}$: inverse conformal metric : $\tilde{\gamma}_{ik} \tilde{\gamma}^{kj} = \delta_i^j$
 \tilde{D}_i : covariant derivative associated with $\tilde{\gamma}_{ij}$, $\tilde{D}^i := \tilde{\gamma}^{ij} \tilde{D}_j$
 \mathcal{D}_i : covariant derivative associated with f_{ij} , $\mathcal{D}^i := f^{ij} \mathcal{D}_j$

Conformal decomposition

Relation between the Ricci tensor \mathbf{R} of γ at the Ricci tensor $\tilde{\mathbf{R}}$ of $\tilde{\gamma}$:

$$R_{ij} = \tilde{R}_{ij} - 2\tilde{D}_i\tilde{D}_j \ln \Psi + 4\tilde{D}_i \ln \Psi \tilde{D}_j \ln \Psi - 2 \left(\tilde{D}^k \tilde{D}_k \ln \Psi + 2\tilde{D}_k \ln \Psi \tilde{D}^k \ln \Psi \right) \tilde{\gamma}_{ij}$$

$$\text{Trace : } R = \Psi^{-4} \left(\tilde{R} - 8\tilde{D}_k \tilde{D}^k \ln \Psi - 8\tilde{D}_k \ln \Psi \tilde{D}^k \ln \Psi \right)$$

Conformal representation of the traceless part of the extrinsic curvature:

$$A^{ij} := \Psi^4 \left(K^{ij} - \frac{1}{3}K\gamma^{ij} \right)$$

$$\text{Indices lowered with the conformal metric: } A_{ij} := \tilde{\gamma}_{ik}\tilde{\gamma}_{jl}A^{kl} = \Psi^{-4} \left(K_{ij} - \frac{1}{3}K\gamma_{ij} \right)$$

Conformal decomposition of Einstein equations

Hamiltonian constraint $\rightarrow \quad \tilde{D}_i \tilde{D}^i \Psi = \frac{\Psi}{8} \tilde{R} - \Psi^5 \left(2\pi E + \frac{1}{8} A_{ij} A^{ij} - \frac{K^2}{12} \right)$

Momentum constraint $\rightarrow \quad \tilde{D}_j A^{ij} + 6A^{ij} \tilde{D}_j \ln \Psi - \frac{2}{3} \tilde{D}^i K = 8\pi \Psi^4 J^i$

Trace of the evolution equation for \mathbf{K} \rightarrow

$$\frac{\partial K}{\partial t} - \beta^i \tilde{D}_i K = -\Psi^{-4} \left(\tilde{D}_i \tilde{D}^i N + 2\tilde{D}_i \ln \Psi \tilde{D}^i N \right) + N \left[4\pi(E + S) + A_{ij} A^{ij} + \frac{K^2}{3} \right],$$

combined with the Hamiltonian constr. \rightarrow equation for $Q := \Psi^2 N$:

$$\begin{aligned} \tilde{D}_i \tilde{D}^i Q &= \Psi^6 \left[N \left(4\pi S + \frac{3}{4} A_{ij} A^{ij} + \frac{K^2}{2} \right) - \frac{\partial K}{\partial t} + \beta^i \tilde{D}_i K \right] \\ &\quad + \Psi^2 \left[N \left(\frac{1}{4} \tilde{R} + 2\tilde{D}_i \ln \Psi \tilde{D}^i \ln \Psi \right) + 2\tilde{D}_i \ln \Psi \tilde{D}^i N \right] \end{aligned}$$

Conformal decomposition of Einstein equations (con't)

Traceless part of the evolution equation for $\mathbf{K} \rightarrow$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial A^{ij}}{\partial t} - \mathcal{L}_\beta A^{ij} - \frac{2}{3} \tilde{D}_k \beta^k A^{ij} = & -\Psi^{-6} \left(\tilde{D}^i \tilde{D}^j Q - \frac{1}{3} \tilde{D}_k \tilde{D}^k Q \tilde{\gamma}^{ij} \right) \\
 & + \Psi^{-4} \left\{ N \left(\tilde{\gamma}^{ik} \tilde{\gamma}^{jl} \tilde{R}_{kl} + 8 \tilde{D}^i \ln \Psi \tilde{D}^j \ln \Psi \right) + 4 \left(\tilde{D}^i \ln \Psi \tilde{D}^j N + \tilde{D}^j \ln \Psi \tilde{D}^i N \right) \right. \\
 & \left. - \frac{1}{3} \left[N \left(\tilde{R} + 8 \tilde{D}_k \ln \Psi \tilde{D}^k \ln \Psi \right) + 8 \tilde{D}_k \ln \Psi \tilde{D}^k N \right] \tilde{\gamma}^{ij} \right\} \\
 & + N \left[K A^{ij} + 2 \tilde{\gamma}_{kl} A^{ik} A^{jl} - 8\pi \left(\Psi^4 S^{ij} - \frac{1}{3} S \tilde{\gamma}^{ij} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Conformal decomposition of the kinematical relation between γ and K

Relation between the extrinsic curvature and the time derivative of the metric:

$$\frac{\partial \gamma^{ij}}{\partial t} + D^i \beta^j + D^j \beta^i = 2NK^{ij}$$

- trace part $\rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \beta^i \tilde{D}_i \Psi + \frac{\Psi}{6} (\tilde{D}_i \beta^i - NK)$
- traceless part $\rightarrow \frac{\partial \tilde{\gamma}^{ij}}{\partial t} = 2NA^{ij} - (\tilde{L}\beta)^{ij}$

with the conformal Killing operator acting on the shift vector being defined as

$$(\tilde{L}\beta)^{ij} := \tilde{D}^j \beta^i + \tilde{D}^i \beta^j - \frac{2}{3} \tilde{D}_k \beta^k \tilde{\gamma}^{ij}$$

Solving the constraint equations

General remarks

Solving the **constraint equations** \implies get **initial data** (γ, \mathbf{K}) for the Cauchy problem of the 3+1 formalism

- **Hamiltonian constraint:** quasilinear elliptic equation for the conformal factor Ψ
- **Momentum constraint:** fix the divergence of A^{ij} (with respect to \tilde{D})

Basic property: the constraint equations are preserved by the evolution equations
Consequently one may choose between

- a **free evolution** schemes (constraint equations used only to check the numerical solution)
- a **constrained evolution** schemes (solve the constraint equations at each step)

Methods to solve the constraint equations

- Conformal transverse-traceless method (York & Ó Murchadha)
- Conformal thin sandwich (York)
- Gluing techniques (Isenberg, Mazzeo, Pollack, Corvino, Schoen)
- Quasi-spherical (Bartnik, Sharples)

The conformal transverse-traceless (CTT) method

Origin: York (1979), variant of Ó Murchadha & York (1974)

Split K^{ij} into a traceless part K_T^{ij} and a trace part : $K^{ij} = K_T^{ij} + \frac{K}{3} \gamma^{ij}$

Motivated by the identity $D_j K_T^{ij} = \Psi^{-10} \tilde{D}_j (\Psi^{10} K_T^{ij})$,

introduce a conformal traceless extrinsic curvature \tilde{A}^{ij} by $K_T^{ij} =: \Psi^{-10} \tilde{A}^{ij}$

NB: $\tilde{A}^{ij} = \Psi^6 A^{ij}$

Split \tilde{A}^{ij} into a longitudinal and transverse part: $\tilde{A}^{ij} = (\tilde{L}X)^{ij} + \tilde{A}_{TT}^{ij}$

with $(\tilde{L}X)^{ij} := \tilde{D}^j X^i + \tilde{D}^i X^j - \frac{2}{3} \tilde{D}_k X^k \tilde{\gamma}^{ij}$ (conformal Killing operator)

and $\tilde{D}_j \tilde{A}_{TT}^{ij} = 0$ (transversality with respect to $\tilde{\gamma}$)

Finally: $K^{ij} = \Psi^{-10} \left[(\tilde{L}X)^{ij} + \tilde{A}_{TT}^{ij} \right] + \frac{K}{3} \gamma^{ij}$

Constraint equations in the CTT framework

Hamiltonian constraint \searrow (Lichnerowicz equation)

$$\tilde{D}_i \tilde{D}^i \Psi = \frac{\Psi}{8} \tilde{R} - \Psi^5 \left(2\pi E - \frac{K^2}{12} \right) - \frac{1}{8} \tilde{A}_{ij} \tilde{A}^{ij} \Psi^{-7} \quad (1)$$

Momentum constraint \searrow

$$\tilde{D}_k \tilde{D}^k X^i + \frac{1}{3} \tilde{D}^i \tilde{D}_k X^k + \tilde{R}^i_j X^j = 8\pi \Psi^{10} J^i + \frac{2}{3} \Psi^6 \tilde{D}^i K \quad (2)$$

Freely specifiable data: $(\tilde{\gamma}_{ij}, K, \tilde{A}_{\text{TT}}^{ij})$ and (E, J^i) , with

- $\tilde{\gamma}_{ij}$ symmetric, positive definite
- $\tilde{A}_{\text{TT}}^{ij}$ symmetric, transverse and traceless with respect to $\tilde{\gamma}_{ij}$

Procedure: solve (1) and (2) to get Ψ and X^i ; the valid initial data is then

$$\gamma_{ij} = \Psi^4 \tilde{\gamma}_{ij} \quad \text{and} \quad K^{ij} = \Psi^{-10} \left[(\tilde{L}X)^{ij} + \tilde{A}_{\text{TT}}^{ij} \right] + \frac{K}{3} \gamma^{ij}$$

Remarks about the CTT constraint equations

- The Hamiltonian constraint (1) is a **quasilinear** elliptic equation for Ψ
- The momentum constraint (2) is a **linear** vector elliptic equation for X^i
- If one chooses **maximal slicing**, $K = 0$ and (2) becomes independent from Ψ :

$$\tilde{D}_k \tilde{D}^k X^i + \frac{1}{3} \tilde{D}^i \tilde{D}_k X^k + \tilde{R}^i_j X^j = 8\pi \tilde{J}^i$$

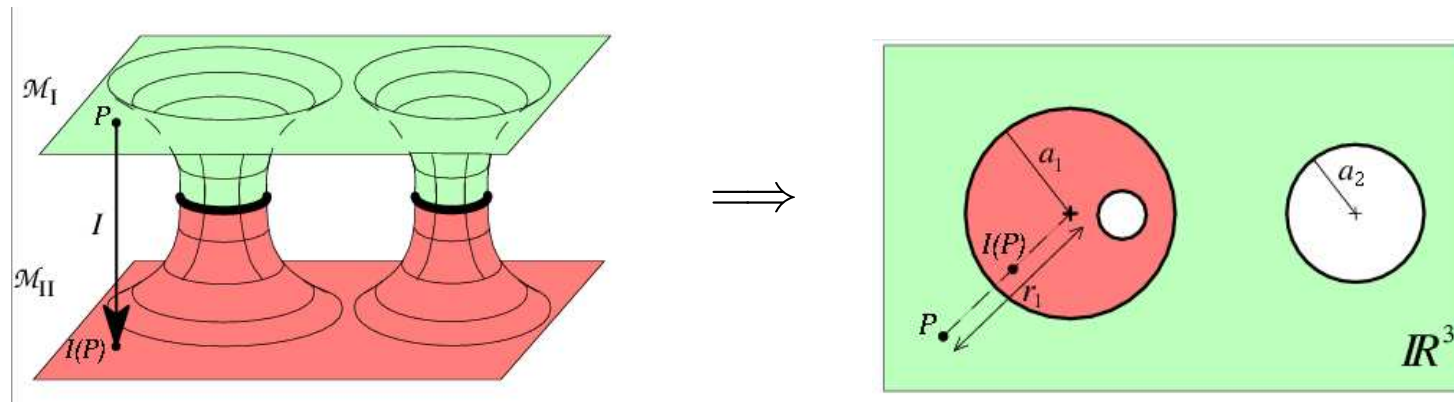
(provided one selects $\tilde{J}^i := \Psi^{10} J^i$ as the matter freely specifiable data)

Boundary conditions

Topology of the initial data manifold Σ_0 :

- for neutron star spacetimes: $\Sigma_0 \sim \mathbb{R}^3$
- for black hole spacetimes: $\Sigma_0 \sim \mathbb{R}^3 \setminus \text{some balls}$ (half of Misner-Lindquist topology) or $\Sigma_0 \sim \mathbb{R}^3 \setminus \text{some points}$ (*punctures*) (Brill-Linquist topology)

Example: Misner-Lindquist topology for two black holes:



Constraint equations (1) and (2) = *elliptic* equations \implies **boundaries conditions** have to be supplied at the inner boundaries and outer boundary (spatial infinity) of Σ_0 to yield a **unique** solution

At spatial infinity :

$$\Psi|_{r \rightarrow \infty} = 1 \quad \text{and} \quad X^i|_{r \rightarrow \infty} = 0$$

(asymptotic flatness for $\tilde{\gamma}_{ij} \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} f_{ij}$)

At some inner sphere \mathcal{S} : for example, Ψ such that $\mathcal{S} =$ apparent horizon

Global quantities as surface integrals at spatial infinity

Asymptotic flatness for $r \rightarrow \infty$ (Cartesian components):

- $\gamma_{ij} = f_{ij} + O(r^{-1}) \iff \Psi = 1$ and $\tilde{\gamma}_{ij} = f_{ij} + O(r^{-1})$ (NB: $f^{ij}\tilde{\gamma}_{ij} = 1 + O(r^{-2})$)
- $\mathcal{D}_k\gamma_{ij} = O(r^{-2}) \iff \mathcal{D}_k\Psi = O(r^{-2})$ and $\mathcal{D}_k\tilde{\gamma}_{ij} = O(r^{-2})$ (no grav. wave at spatial inf.)
- $K^{ij} = O(r^{-2})$
- **quasi-isotropic gauge** : additional condition: $\mathcal{D}^j\tilde{\gamma}_{ij} = O(r^{-3})$ [York 1979]

- **ADM mass** : $M_{\text{ADM}} = \frac{1}{16\pi} \oint_{\infty} (\mathcal{D}^j\gamma_{ij} - f^{jk}\mathcal{D}_i\gamma_{jk}) dS^i$

- ★ in the quasi-isotropic gauge: $M_{\text{ADM}} = -\frac{1}{2\pi} \oint_{\infty} \mathcal{D}_i\Psi dS^i$ (function of Ψ only)

- **ADM linear momentum** : P_{ADM}^i , projections along three independent translational Killing vectors of \mathbf{f} , $\xi_{(i)}$:

$$P_{j\text{ADM}} \xi_{(i)}^j = \frac{1}{8\pi} \oint_{\infty} (K_{jk} - K f_{jk}) \xi_{(i)}^j dS^k$$

- **Angular momentum** : **defined only within the quasi-isotropic gauge** : projections along three independent rotational Killing vectors of \mathbf{f} , $\eta_{(i)}$:

$$J_j \xi_{(i)}^j = \frac{1}{8\pi} \oint_{\infty} (K_{jk} - K f_{jk}) \eta_{(i)}^j dS^k$$

Conformally flat initial data

As a part of the freely specifiable data, choose $\tilde{\gamma}_{ij} = f_{ij}$ (flat metric)

Consequently $\tilde{D}_i = \mathcal{D}_i$ and $\tilde{R}_{ij} = 0$

Choose also $K = 0$ (maximal slicing)

Then the Hamiltonian constraint (1) becomes

$$\Delta \Psi = -2\pi \Psi^5 E - \frac{1}{8} \tilde{A}_{ij} \tilde{A}^{ij} \Psi^{-7}$$

and the momentum constraint (2) reduces to

$$\Delta X^i + \frac{1}{3} \mathcal{D}^i \mathcal{D}_k X^k = 8\pi \tilde{J}^i$$

where $\Delta := f^{ij} \mathcal{D}_i \mathcal{D}_j$ is the flat space Laplacian

The conformal thin sandwich (CTS) method

Origin: York (1999) [PRL **82**, 1350], Pfeiffer & York (2003), [PRD **67**, 044022]

Use the same conformal decomposition of the extrinsic curvature as in the **3+1 evolution equations**:

$$K^{ij} = \Psi^{-4} A^{ij} + \frac{1}{3} K \gamma^{ij}$$

and rewrite the **traceless kinematical relation** between γ and \mathbf{K} as

$$A^{ij} = \frac{1}{2N} \left[(\tilde{L}\beta)^{ij} + \tilde{u}^{ij} \right]$$

$$\text{with } \tilde{u}^{ij} := \frac{\partial \tilde{\gamma}^{ij}}{\partial t}$$

\tilde{u}^{ij} = **freely specifiable data** (conformal thin sandwich), instead of $\tilde{A}_{\text{TT}}^{ij}$ in the CTT formulation.

Equations in the CTS framework

Hamiltonian constraint \searrow

$$\tilde{D}_i \tilde{D}^i \Psi = \frac{\Psi}{8} \tilde{R} - \Psi^5 \left(2\pi E + \frac{1}{8} A_{ij} A^{ij} - \frac{K^2}{12} \right) \quad (3)$$

Momentum constraint \searrow

$$\begin{aligned} \tilde{D}_k \tilde{D}^k \beta^i + \frac{1}{3} \tilde{D}^i \tilde{D}_k \beta^k + \tilde{R}^i_j \beta^j - (\tilde{L}\beta)^{ij} \tilde{D}_j \ln(N\Psi^{-6}) = \\ 2N \left(8\pi \Psi^4 J^i + \frac{2}{3} \tilde{D}^i K \right) - \tilde{D}_j \tilde{u}^{ij} + \tilde{u}^{ij} \tilde{D}_j \ln(N\Psi^{-6}) \end{aligned} \quad (4)$$

Trace of the evolution equation for \mathbf{K} \searrow ($\dot{K} := \partial K / \partial t$)

$$\tilde{D}_i \tilde{D}^i N + 2\tilde{D}_i \ln \Psi \tilde{D}^i N = \Psi^4 \left\{ N \left[4\pi(E + S) + A_{ij} A^{ij} + \frac{K^2}{3} \right] + \beta^i \tilde{D}_i K - \dot{K} \right\} \quad (5)$$

Freely specifiable data: $(\tilde{\gamma}_{ij}, \tilde{u}^{ij} = \dot{\tilde{\gamma}}^{ij}, K, \dot{K})$ and (E, J^i)

Equations in the CTS framework (con't)

Freely specifiable data: $(\tilde{\gamma}_{ij}, \tilde{u}^{ij} = \dot{\tilde{\gamma}}^{ij}, K, \dot{K})$ and (E, J^i) with

- $\tilde{\gamma}_{ij}$ symmetric, positive definite
- \tilde{u}^{ij} symmetric and traceless with respect to $\tilde{\gamma}_{ij}$

Procedure: solve (3), (4) and (5) to get Ψ , β^i and N ; the valid initial data is then

$$\gamma_{ij} = \Psi^4 \tilde{\gamma}_{ij} \quad \text{and} \quad K^{ij} = \frac{\Psi^{-4}}{2N} \left[(\tilde{L}\beta)^{ij} + \tilde{u}^{ij} \right] + \frac{K}{3} \gamma^{ij}$$

Comparing CTT and CFS

- CTT : choose some transverse traceless part $\tilde{A}_{\text{TT}}^{ij}$ of the extrinsic curvature K^{ij} , i.e. some *momentum*² \implies **CTT = Hamiltonian representation**
- CTS : choose some time derivative \tilde{u}^{ij} of the conformal metric $\tilde{\gamma}^{ij}$, i.e. some *velocity* \implies **CTS = Lagrangian representation**

Advantage of CTT : mathematical theory well developed (at least for constant mean curvature ($K = \text{const}$) slices)

Advantage of CTS : better suited to the description of quasi-stationary spacetimes (\rightarrow quasiequilibrium initial data) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{ Killing vector} \implies u^{ij} = 0$$

²recall the relation $\pi^{ij} = \sqrt{\gamma}(K\gamma^{ij} - K^{ij})$ between K^{ij} and the ADM canonical momentum

4

Un exemple d'implémentation numérique:

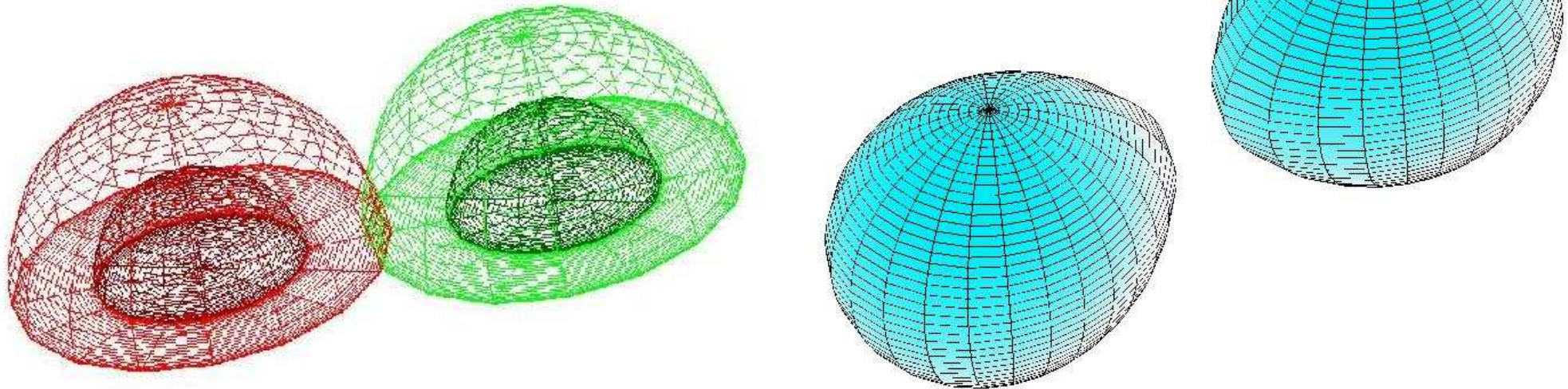
LORENE

Méthodes numériques développées à Meudon

S. Bonazzola, E. Gourgoulhon, P. Grandclément, J.-A. Marck, J. Novak

- **Méthodes spectrales multi-domaines 3D**
- Coordonnées de type **sphérique** (r, θ, φ)
- Fonctions de base: r : polynômes de Tchebyshev; θ : cosinus/sinus ou fonction de Legendre associées; φ : séries de Fourier
- Domaines = coquilles sphériques + 1 noyau (contenant $r = 0$)
- L'espace entier (\mathbb{R}^3) est couvert: **compactification** de la coquille la plus externe
- **Coordonnées adaptatives**: décomposition de domaine avec topologie sphérique
- Implémentation numérique: codes C++ basés sur **LORENE**
(<http://www.lorene.obspm.fr>)

Domain decomposition



Double domain decomposition

[Taniguchi, Gourgoulhon & Bonazzola, Phys. Rev. D **64**, 064012 (2001)]

Surface fitted coordinates:

$F_0(\theta, \varphi)$ and $G_0(\theta, \varphi)$ chosen so that
 $\xi = 1 \Leftrightarrow$ surface of the star

Caractéristiques de LORENE

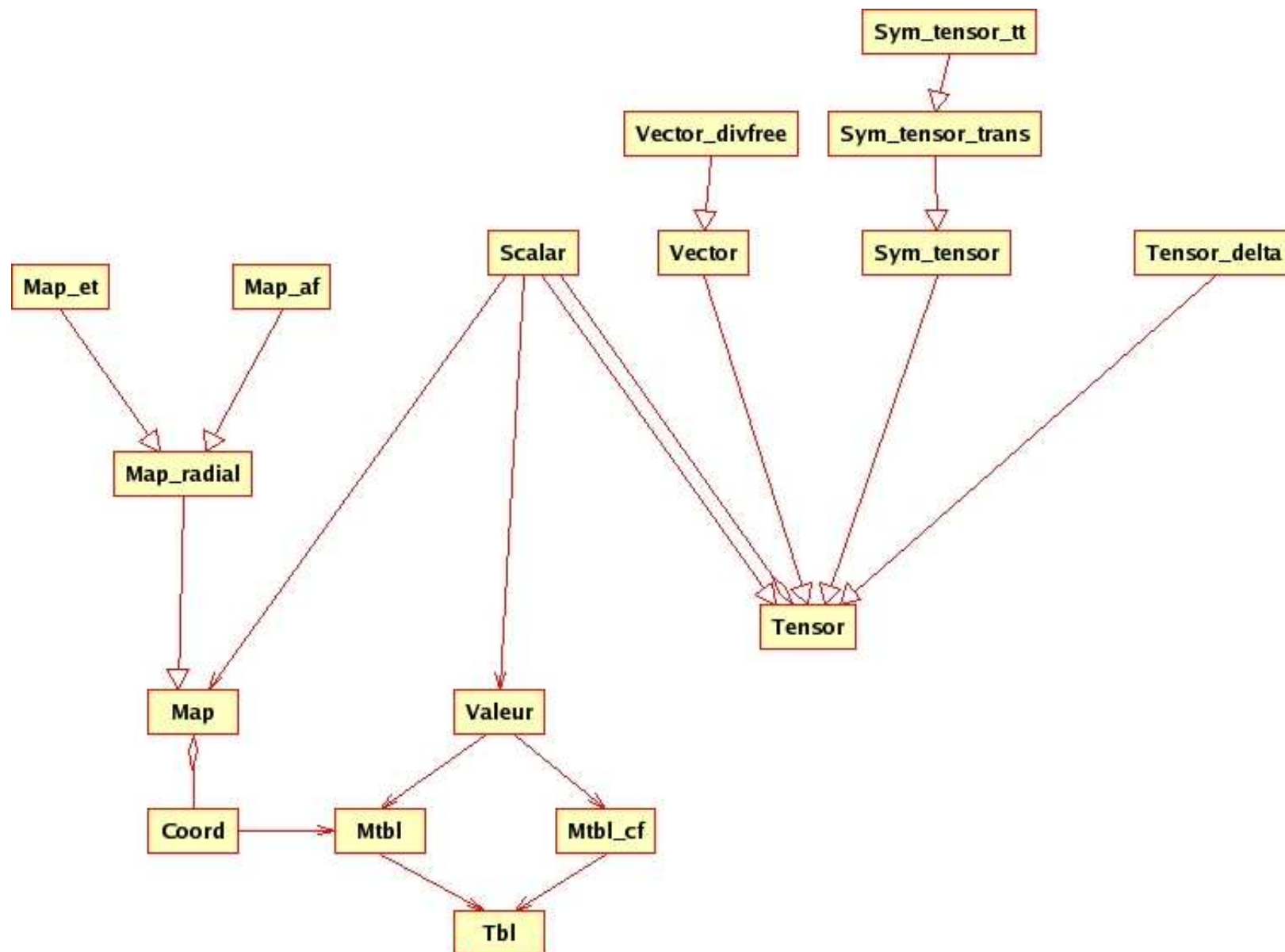
LORENE : Langage Objet pour la RElativité NumériquE

- LORENE = bibliothèque de classes C++ mettant en oeuvre des concepts informatiques (par ex. tableaux), mathématiques (par ex. champ tensoriel), ou physiques (par ex. étoile).
- Environ 250 000 lignes de code
- En développement perpétuel
- Auteurs principaux: E.ourgoulhon, P. Grandclément, J.-A. Marck, J. Novak, K. Taniguchi (avec une contribution de S. Bonazzola pour l'algorithmique)
- Une douzaine de développeurs dans le monde: Allemagne, Espagne, Japon, Pologne
- Bibliothèque mise dans le domaine public (licence libre GPL) en 2001

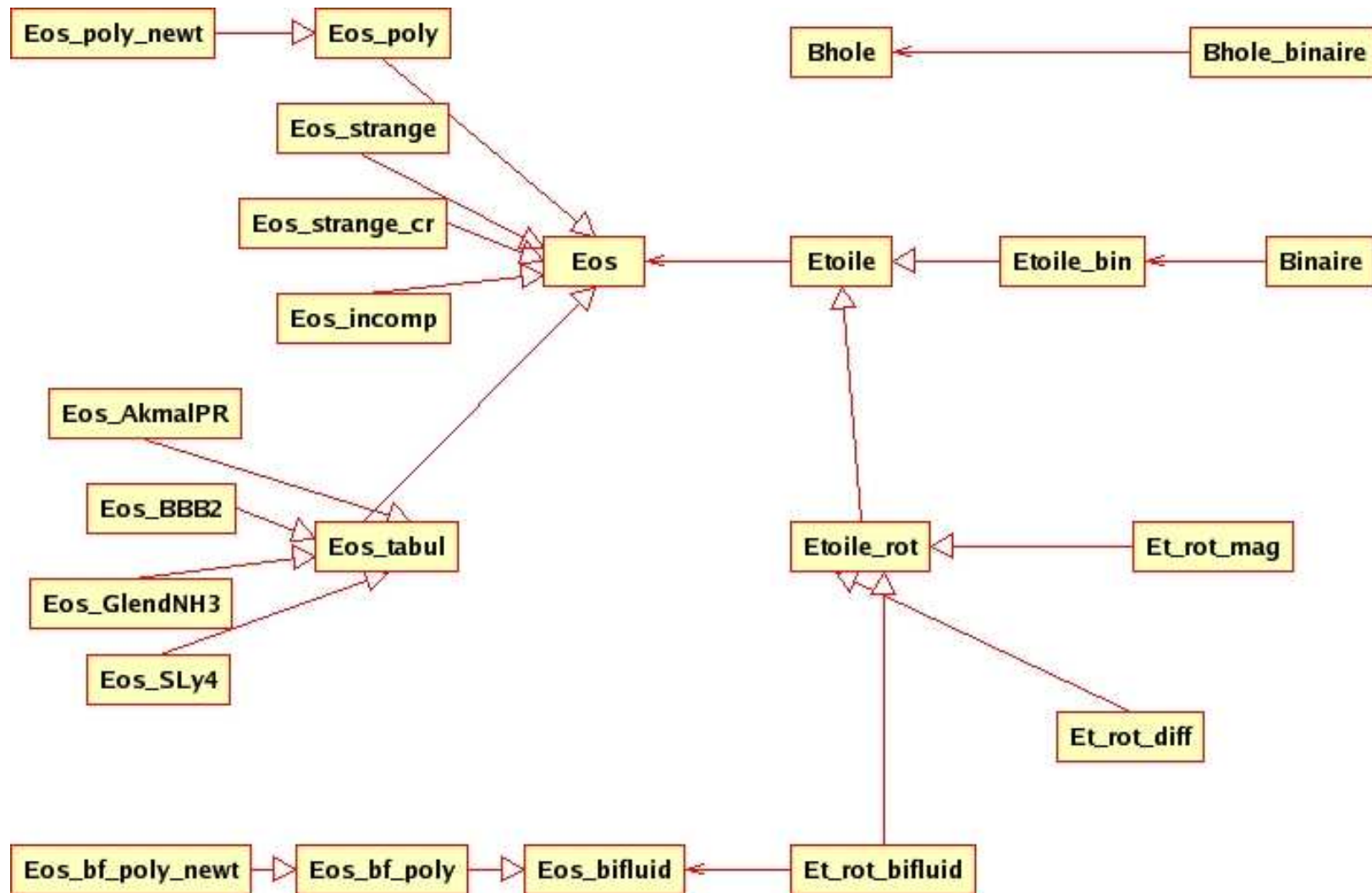
Structure réseau de LORENE

- **serveur CVS:** octane.obspm.fr
accès anonyme (lecture seule) et nominal (lecture/écriture) aux sources C++: gestion des versions successives, développement multi-sites
- **serveur Web:** <http://www.lorene.obspm.fr>
informations générales, instructions d'installation, documentation HTML (Doc++)
- **serveur ftp anonyme:** <ftp://moscou.obspm.fr>
accès aux résultats numériques de codes construits sur LORENE
- **liste de discussion:** lorene.list_at_obspm.fr
liste gérée par GNU Mailman, pour faciliter le développement multi-sites

Les classes C++ de LORENE



Classes “astrophysiques”

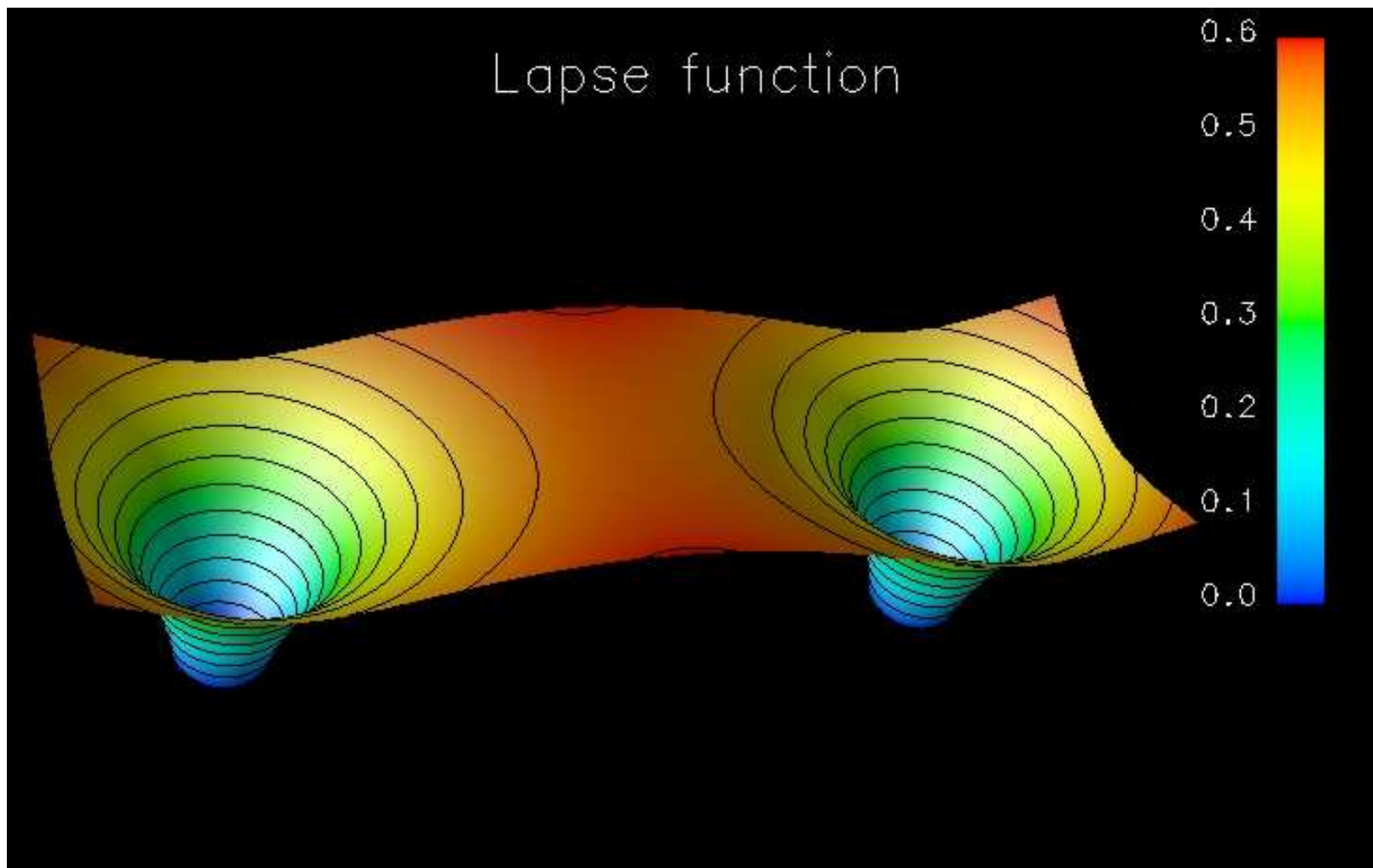


5

Application aux sources d'ondes gravitationnelles

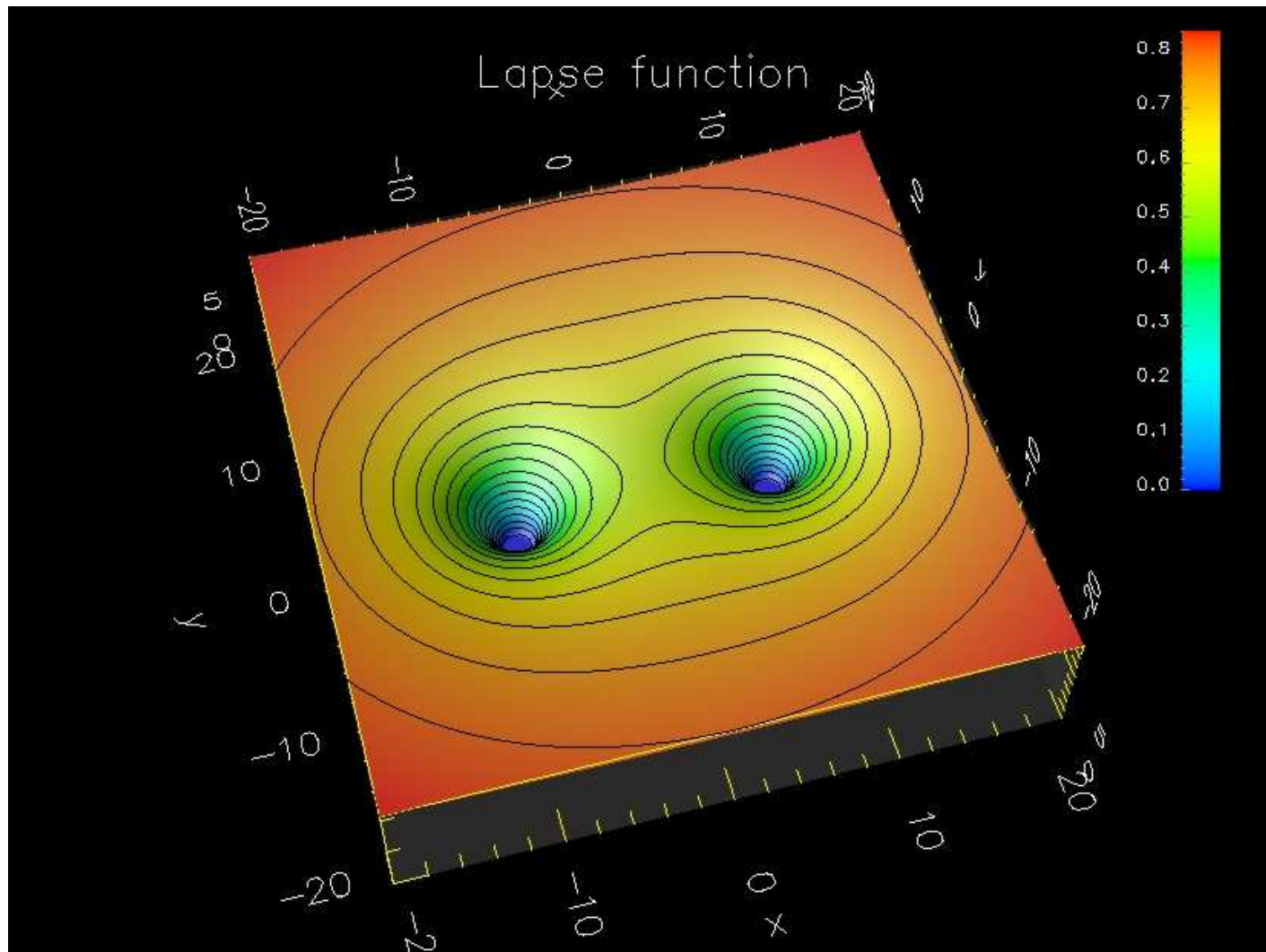
Dernière orbite stable des trous noirs binaires

Valeur de la fonction lapse N dans le plan équatorial



[Grandclément, Gourgoulhon, Bonazzola, PRD **65**, 044021 (2002)]

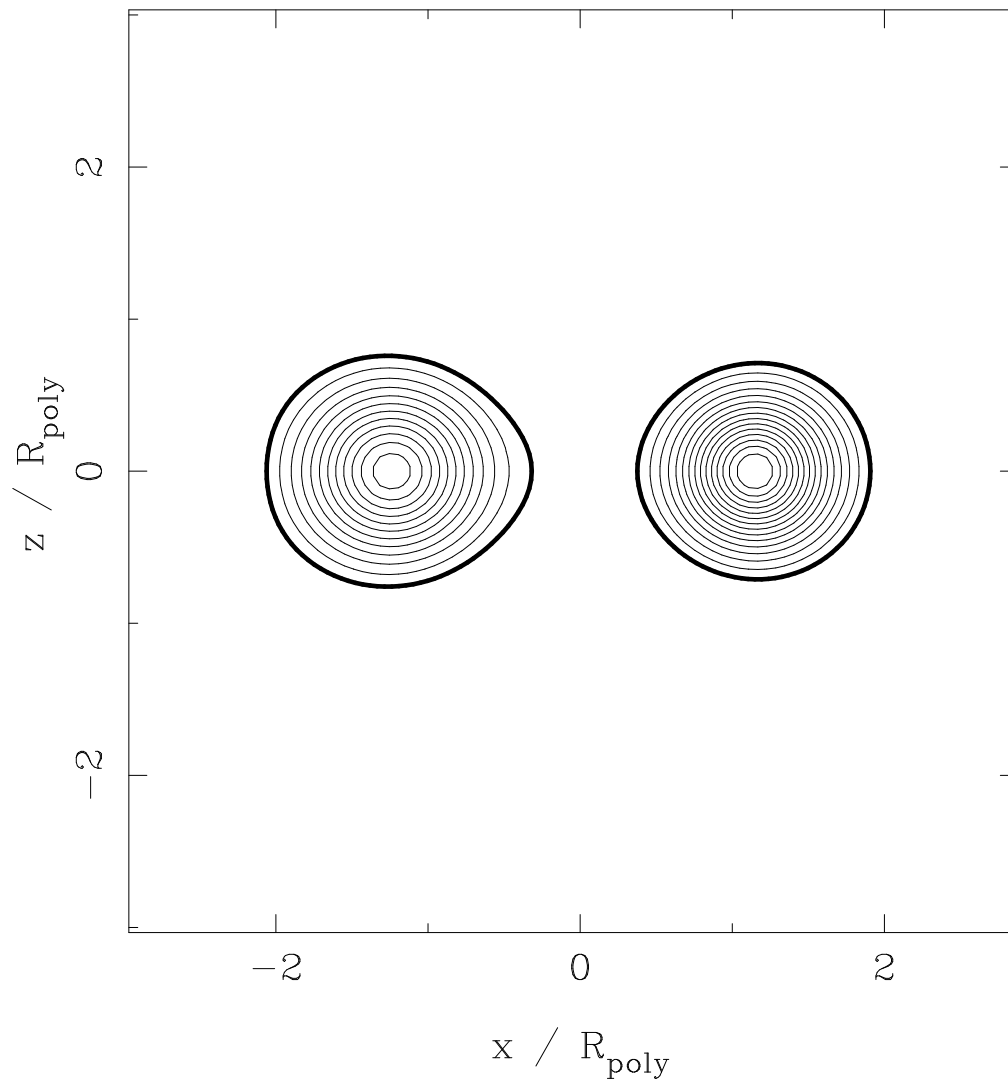
Zoom arrière



[Grandclément, Gourgoulhon, Bonazzola, PRD **65**, 044021 (2002)]

Binary neutron stars

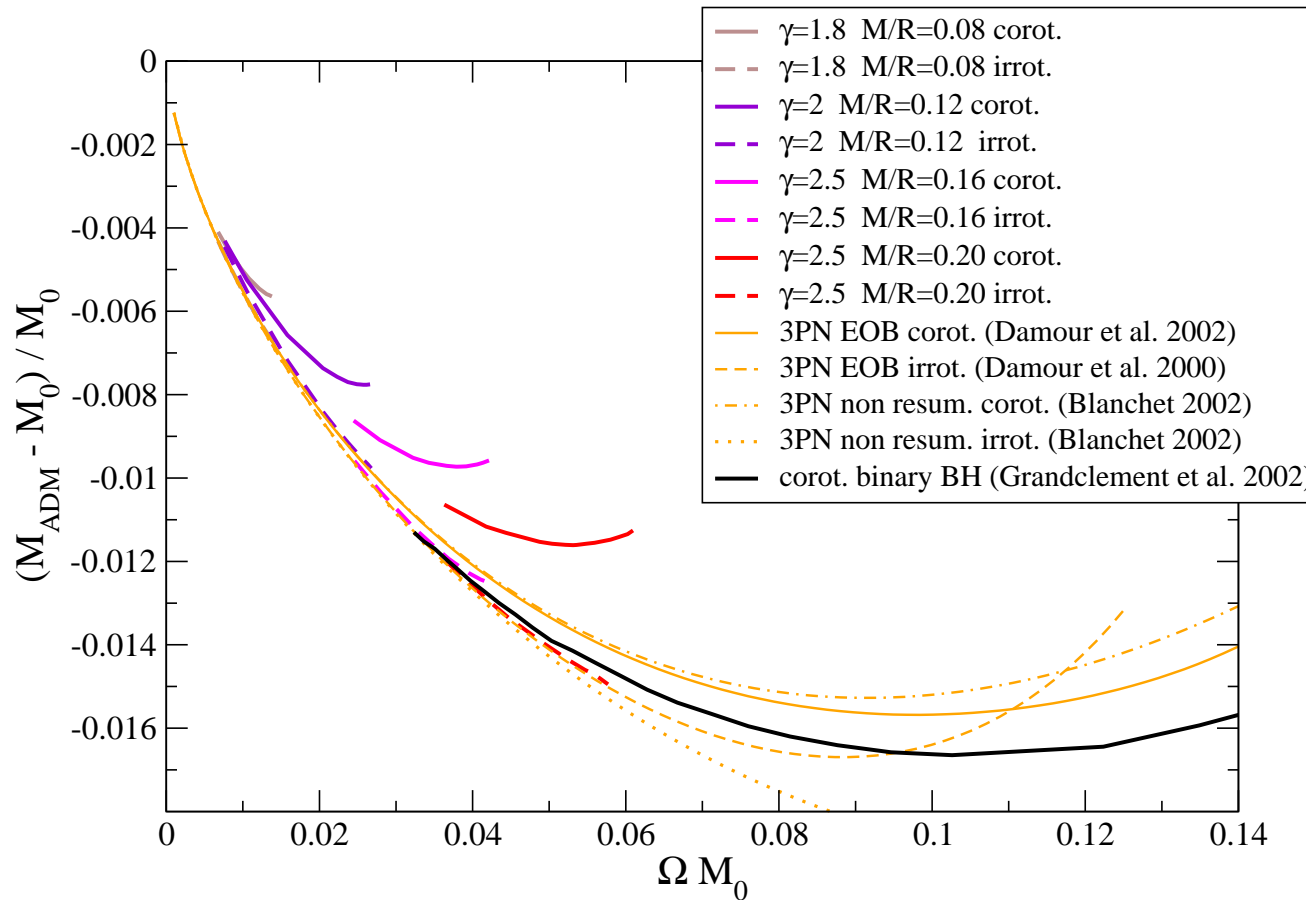
Baryon density ($y=0$)



Isocontour of baryon density for an irrotational binary system constructed upon a polytropic EOS with $\gamma = 2$. The compactness of the left star is $M/R = 0.14$ and that of the right star is $M/R = 0.16$

[Taniguchi & Gourgoulhon, PRD **66**, 104019 (2002)]

Evolutionary sequences of binary compact objects



Gravitational wave frequency:

$$f = 320 \frac{\Omega M_0}{0.1} \frac{20 M_\odot}{M_0} \text{ Hz}$$

$$= 1140 \frac{\Omega M_0}{0.05} \frac{2.8 M_\odot}{M_0} \text{ Hz}$$

[Taniguchi & Gourgoulhon, PRD in press, gr-qc/0309045 (2003)]