Nathalie Deruelle

LA THEORIE D'EINSTEIN DE LA GRAVITATION

"Probablement la plus grande découverte scientifique jamais faite".
P.A.M. Dirac

Relativité générale, gravitation et courbure

Forces d'inertie et de gravitation

1. Une relativité "générale"

Les physiciens du XIXème siècle avaient cherché à mesurer la vitesse de la terre par rapport au milieu dans lequel la lumière se propageait, l'*éther*, souvent considéré alors comme l'incarnation de l'espace absolu de Newton.[1] Ce fut en vain : la vitesse de la lumière était c par rapport au référentiel où le système solaire et, pensait-on, l'éther, étaient au repos (aberration des étoiles) *et* par rapport à la Terre (expérience de Michelson et Morley). Comme le résuma Henri Poincaré : "*Il semble au premier abord que l'aberration de la lumière et les phénomènes optiques qui s'y rattachent vont nous fournir un moyen de déterminer le mouvement absolu de la terre, ou plutôt son mouvement, non par rapport aux autres astres, mais par rapport à l'éther. Fresnel l'avait déjà tenté (...), Michelson (...) échoua à son tour. Il semble que cette impossibilité de mettre en évidence expérimentalement le mouvement absolu de la terre soit une loi générale de la nature.*"[2]

Comme on l'a vu au chapitre précédent il fallut multiplier les hypothèses sur l'"électrodynamique des corps en mouvement" pour faire respecter aux équations de Lorentz et de Maxwell, dans le cadre de la physique de Newton, cette impossibilité de distinguer le référentiel où l'éther serait au repos. Nous avons également vu comment Einstein, en réfléchissant au concept de temps, montra qu'on pouvait en fait marier naturellement constance observée de la vitesse de la lumière dans tous les référentiels en mouvement rectiligne uniforme relatif, équivalence dynamique de ces repères *inertiels* et loi de composition des vitesses, à condition de formuler électromagnétisme et mécanique dans le cadre d'une nouvelle représentation géométrique de l'espace-temps : la relativité restreinte. En 1905 donc, l'espace absolu et l'éther dont on l'avait rempli étaient retournés dans les limbes.

La classe des référentiels inertiels restait cependant privilégiée. C'est seulement dans ces systèmes en effet que les particules libres peuvent être au repos. Dans tout autre elles sont accélérées et pour les y maintenir au repos il faut les soumettre à des forces, forces d'*inertie*, qui signalent seulement que le système auquel leur mouvement est rapporté n'est pas inertiel. Ces forces d'inertie agissent en quelque sorte comme un "*rappel à l'ordre*" de la cohorte des repères galiléens associée au "*fantôme*" qu'est l'espace absolu. L'on peut donc être insatisfait "*d'un tel acteur restant ainsi dans l'ombre, qui agit sur la matière sans qu'elle puisse agir en retour sur lui*" (Gilles Châtelet).

L'ambition d'Einstein fut alors, dès 1907, de bâtir une théorie où *tous* les repères seraient privilégiés (soit encore aucun), où les lois de la physique auraient la même forme dans tous les repères, inertiels ou non, où il n'y aurait plus de forces d'inertie, plus de rappel à l'ordre de l'espace absolu, bref une théorie de *relativité générale*.[3]

---

[1] Tout comme on peut déterminer la vitesse d'un avion par rapport à l'atmosphère en mesurant, de l'avion, la vitesse du son (à condition de savoir dans quelle mesure l'avion entraîne l'atmosphère dans son sillage...)

[2] cité par J. Eisenstaedt in *Avant Einstein*, Seuil 2005.

[3] "*Est-il concevable que le principe de relativité vale aussi pour des systèmes qui sont accélérés les uns par rapport aux autres ?*" Jahrb. Rad. Elektr., 4 (1907), 411, cité par A. Pais in *Subtle is the Lord*, p. 179.

Cette idée comporte plusieurs facettes. La première, dite de *covariance générale*,[4] consiste à écrire les lois de la dynamique de sorte qu'elles préservent leur forme (soient "invariantes") dans un changement général de coordonnées. Ainsi par exemple (comme nous l'avons vu au chapitre précédent), dans tout repère, inertiel ou non, l'équation du mouvement d'une particule de masse m, de quadri-vecteur vitesse u de composantes $u^i = \frac{dx^i}{d\tau}$ dans le système de coordonnées x^i ($x^i = x^i(\tau)$ étant sa ligne d'univers, τ son temps propre) s'écrit sous la forme

$$m\,\tilde{D}_u u = F \quad\Longleftrightarrow\quad m\,\frac{\tilde{D}u^i}{d\tau} = F^i \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{du^i}{d\tau} + \tilde{\Gamma}^i_{jk}u^j u^k = \frac{1}{m}F^i \tag{1.1}$$

où les symboles de Christoffel $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$ caractérisant la dérivée covariante $\tilde{D}$ sont déterminés par le système de coordonnées choisi et où F est un vecteur contravariant décrivant la force (de composantes F^i dans le système de coordonnées x^i) à laquelle la particule est soumise.

Bien que mathématiquement élémentaire dans le cadre de la relativité restreinte où coordonnées de temps et d'espace ont même statut, cette formulation covariante de la loi de la dynamique a néanmoins pour intéressant corollaire (comme nous l'avons souligné au chapitre précédent) de montrer de manière explicite l'origine géométrique des forces d'inertie. Ainsi le caractère non-inertiel du repère se manifeste dans les symboles de Christoffel $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$, c.-à-d. dans la métrique, grandeur géométrique.

Une seconde facette du principe de relativité générale, beaucoup plus riche de contenu, fut de chercher à assigner une origine géométrique à *toutes* les forces, d'inertie *et* réelles—d'absorber en quelque sorte le vecteur F dans un opérateur D. Ainsi toutes les forces seraient des manifestations de la géométrie, tout mouvement serait libre, mais s'effectuerait dans un espace-temps géométriquement plus complexe que ceux jusqu'alors considérés. On sait qu'Einstein réussit en 1916 à réduire ainsi la force de gravitation ; les autres résistent encore...

2. Le principe d'équivalence[5]

Le *"pied de biche"* qu'Einstein utilisa pour *"fracturer l'espace-temps absolu"* (Thibault Damour), et en extraire la gravitation, fut le fait curieux que tous les corps tombent de la même façon dans un champ de gravitation.[6]

La mécanique newtonienne "explique" ce fait par une égalité fortuite des masses grave et inerte. Mais cette égalité, comme Einstein le dévoila, n'est pas anodine. En effet l'accélération à laquelle une particule libre est soumise du fait que son mouvement est rapporté à un système de référence non-inertiel ne dépend que du mouvement du référentiel, et non des propriétés intrinsèques de la particule, comme sa masse inerte. Dans un champ d'inertie donc, comme dans un champ de gravitation, tous les corps "tombent" de la même façon.

Cette similarité conduisit Einstein à ériger en postulat l'égalité des masses inerte et grave et à *identifier* forces d'inertie et de gravitation. C'est le *principe d'équivalence*.

Ce principe, lui-aussi, a plusieurs facettes. La première est que, les forces d'inertie étant d'essence géométrique, la gravitation doit l'être également (et donc "encodable" dans les symboles de Christoffel d'une dérivation covariante). Il implique par ailleurs qu'une accélération peut simuler un champ de gravitation : ainsi un observateur accéléré (comme celui de Rindler, voir chapitre précédent) peut légitimement mettre ses observations (un décalage de fréquence par exemple) sur le compte d'un champ de gravitation plutôt que sur celui d'effets cinématiques liés au mouvement de son référentiel—comment créer un tel champ n'est pas ici

[4] ou d'*indifférence*, *cf* T. Damour in "*Einstein aujourd'hui*", CNRS edts, 2005 et in "*Si Einstein m'était conté*", Cherche-Midi Edt, 2005.

[5] "*Der glücklichste Gedanke meines Lebens*", Einstein (1920).

[6] Cette idée lui vint à l'esprit un jour où "*j'étais assis à mon bureau de l'office des brevets de Berne ; soudain je pensai que si quelqu'un tombait en chute libre, il ne sentirait pas son propre poids. Je fus surpris. Cette simple pensée fit une forte impression sur moi (...) Car pour un observateur tombant d'un toit, il n'existe pas de champ de gravitation. S'il laisse tomber des objets, ils resteront au repos par rapport à lui, ou en mouvement uniforme (...) Il est donc en droit de se trouver au repos*". (Cité par A. Pais, *op. cit.* pp. 178–179.)

la question. Réciproquement, un champ de gravitation réel (par exemple celui de la terre ou du soleil) peut être effacé par une accélération : un observateur en *co-mouvement*, c'est-à-dire qui tombe en chute libre, dans un nuage de particules en chute libre elles aussi, peut légitimement ignorer le champ de gravitation dans lequel il tombe et considérer comme libres les particules qui l'entourent et tombent avec lui, voir Note 6.

Un intéressant corollaire de ce principe est la claire reconnaissance que la notion de particule libre (du moins au regard de la gravitation) n'a pas grand sens : une particule libre est, pour un observateur accéléré, soumise à un champ (le champ d'accélération de son repère) ; quant aux particules attirées par le soleil par exemple, elles sont libres pour un observateur en co-mouvement. Or la définition des repères inertiels *repose* sur la notion de particule libre. Si aucune ne l'est ou si elles le sont toutes, c'est toute la classe des repères inertiels qui disparaît à son tour dans les limbes.

3. Une mosaïque de M_4

Le principe d'équivalence stipule que tout champ gravitationnel peut être gommé. Voyons plus précisément dans quel sens.

Le champ de forces d'inertie subi par des particules libres que mesure un observateur accéléré peut être entièrement effacé par un changement de système de référence *i.e.* par un changement du mouvement de l'observateur ; l'effacement est global dans le sens où, dans le nouveau référentiel, inertiel, *toutes* les particules ont *in aeternum* un simple mouvement rectiligne uniforme.

En revanche, pour un observateur qui se met en chute libre, le champ de gravitation ne s'évanouit pas complètement : dans son référentiel en co-mouvement, deux particules initialement au repos y demeurent, leur distance reste invariable, mais pendant un certain temps seulement, d'autant plus court que la précision des mesures est grande ; en effet la distance entre les particules diminue en fait peu à peu car la force de Newton fait converger leurs trajectoires vers le centre de gravité du corps qui les attirent. Ainsi la propriété d'effacement n'est que locale : à tout moment, en tout lieu, il existe un système de référence "en chute libre" où le champ de gravitation s'évanouit, où les particules peuvent être au repos, mais le système dépend du lieu et du moment.

On est ainsi conduit à se représenter le cadre spatio-temporel où se formuleront les lois de la gravitation comme une *"mosaïque de petits éclats de l'espace-temps de Minkowski"* (Thibault Damour). Dans chaque éclat, c'est-à-dire localement, l'espace-temps est quasi-minkowskien, la gravitation peut être ignorée, et on postule que tous les résultats de la relativité restreinte y sont valables. C'est le principe de *relativité locale*.[7]

4. Le "mollusque" de référence

La mécanique newtonienne postule l'existence de trièdres matériels *solides* dont les distances spatiales entre les constituants (mesurées à l'aide de règles *rigides*) sont constantes et dont les axes restent orthornormés au cours du mouvement. De tels trièdres peuvent (en principe) servir de systèmes de référence globaux quadrillant tout l'espace, où tester les lois de la mécanique écrites dans tout repère accéléré, déduit du repère absolu par déplacement rigide. (Et si les lois de la mécanique n'y sont pas vérifiées c'est *a priori* que le solide se disloque sous l'effet des forces d'inertie qu'il subit.)

En relativité restreinte en revanche, les corps solides, référentiels globaux quadrillant tout l'espace, ne matérialisent *de facto* que les repères inertiels. La raison en est simple : le passage à un repère accéléré s'effectue par un changement non linéaire des coordonnées impliquant le temps, transformation dont il serait inutilement restrictif d'exiger qu'elle préserve l'orthogonalité des axes spatiaux, *cf* chapitre 2. Comme de plus le principe d'équivalence fait perdre aux repères inertiels leur statut privilégié, la notion de corps rigide de référence fut en fin de compte abandonnée par Einstein.[8]

En relativité générale l'espace-temps devient ainsi un simple *continuum*, un ensemble d'événements différenciés par leur étiquetage dans un repérage quelconque. On peut si l'on veut se figurer ce continuum et son "mollusque" de référence comme un océan peuplé de bathyscaphes reliés par de lâches filins, dont les

---

[7] Mathématiquement cela signifie (voir plus bas) que les bases orthonormées de l'espace tangent sont quasi-holonomes.

[8] "*Dans les champs gravitationnels il n'y a pas ce qu'on appelle de corps rigides aux propriétés euclidiennes : ainsi le corps rigide fictif de référence n'est-il d'aucune utilité dans la théorie générale de la relativité*", in *Relativity, The Special and General Theory*, Methuen, 1954.

mouvements relatifs sont mesurés au temps d'une horloge arbitraire.[9] Au voisinage de tout point on peut cependant passer de ce "mollusque" à un "quadrillage" local de coordonnées minkowskiennes c'est-à-dire passer à un repère momentanément inertiel, en chute libre.[10]

5. Un espace-temps pseudo-riemannien

L'espace est représenté en physique newtonienne par un espace "absolu" euclidien ; en relativité générale, l'espace et le temps sont représentés par une *variété*, continuum de points p repérés par quatre coordonnées x^i qui localement se réduit à l'espace-temps de Minkowski, ainsi que nous venons de le voir.

Une *variété* est beaucoup moins structurée qu'un espace euclidien car si on peut y définir *localement* (*i.e.* sur l'espace tangent du point considéré) des grandeurs géométriques, vecteurs, tenseurs etc, les notions de parallélisme et de distance n'y sont pas *a priori* définies. Pour pouvoir comparer des grandeurs en des points différents, et connecter entre eux les différents éclats de M_4 (*i.e.* les espaces tangents), il faut lui adjoindre une structure supplémentaire. Le rôle d'une *connexion* est de *définir* le *transport parallèle* des tenseurs (voir plus bas) ; plus particulièrement, elle permet de construire les courbes *auto-parallèles* (c.-à-d. les plus "droites" possible) d'une variété, de la façon suivante : si leurs lignes d'univers sont $p = p(\lambda)$ ($\Leftrightarrow\ x^i = x^i(\lambda)$), et si $u = \frac{dp}{d\lambda}$ ($\Leftrightarrow\ u^i = \frac{dx^i}{d\lambda}$) sont leurs vecteurs tangents, alors leur équation est

$$D_u u = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{du^i}{d\lambda} + \Gamma^{\ i}_{jk}\, u^j u^k = 0, \tag{5.1}$$

où les 64 coefficients de connexion $\Gamma^{\ i}_{jk}$ sont des fonctions *a priori* arbitraires des coordonnées. Si par simple changement de coordonnées ils peuvent être annulés en tous points (ce qui implique qu'ils peuvent être exprimés en termes de 4 fonctions des coordonnées seulement, *cf* livre ND-JPU ou chapitre précédent), alors la variété n'est autre que M_4 lui-même ; dans le cas contraire la variété est dite *courbe*.

Afin maintenant qu'un observateur en co-mouvement puisse comparer à deux instants notablement différents les distances entre deux particules et en inférer par exemple l'existence d'une masse centrale qui l'attire, une structure métrique définissant la notion de distance doit être également introduite. C'est le rôle du *tenseur métrique*

$$g = g_{ij}\, \mathrm{d}x^i\, \mathrm{d}x^j \tag{5.2}$$

où les 10 fonctions g_{ij} sont *a priori* arbitraires. La donnée d'une métrique permet de définir les courbes *géodésiques*, c'est-à-dire des courbes de longueur extrémale. Au voisinage de chaque point les coefficients g_{ij} peuvent être réduits par changement de coordonnées aux coefficients η_{ij} de la métrique de Minkowski mais il n'est pas possible en général de le faire globalement (cela n'est possible que s'ils peuvent s'exprimer à l'aide de 4 fonctions seulement, *cf* livre ND-JPU ou chapitre précédent).

Les notions de parallélisme et de distance sont conceptuellement distinctes mais toute métrique peut définir une de *connexion de Levi-Civita* (symétrique). Dans ce cas les 64 coefficients de connexion prennent le nom de *symboles de Christoffel* et s'expriment en fonction des 10 composantes de la métrique sous la forme (*cf* livre ND-JPU ou chapitre précédent)

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{il} \left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right) . \tag{5.3}$$

Auto-parallèles et géodésiques deviennent alors un seul et même objet. Une variété ainsi munie d'une métrique et de sa connexion de Levi-Civita associée est une *variété (pseudo)-riemannienne* ("pseudo" car la

[9] "*Des corps de référence non-rigides sont utilisés, qui de manière générale non seulement se meuvent de n'importe quelle façon mais subissent également des modifications de forme ad libitum pendant leur mouvement (...) Ce corps de référence non-rigide, qui peut de manière appropriée être qualifié de "mollusque de référence", est en gros équivalent à un système de coordonnées gaussiennes choisi arbitrairement*", A. Einstein, *ibidem*.

[10] Mathématiquement cela signifie que l'on peut passer, dans l'espace tangent d'un point donné, de la base naturelle associée aux coordonnées gaussiennes utilisées à un repère orthonormé, quasi-holonome au voisinage du point. Voir par exemple au chapitre précédent un exemple explicite de construction d'un tel repère inertiel tangent (repère de Rindler).

métrique doit se ramener localement à η_{ij} plutôt que δ_{ij}). Ce sont de telles variétés pseudo-riemanniennes qui représentent l'espace et le temps en relativité générale.

Un tel espace est *courbe* dans le sens qu'en général les auto-parallèles s'y coupent (*cf* les trajectoires des particules "libres" dans un repère en co-mouvement, qui se rejoignent au centre de gravité). Dans le cas exceptionnel où il est *plat*, il existe alors un système de référence minkowskien global (tous les "éclats" peuvent être "recollés").

En relativité générale tout comme en relativité restreinte, la métrique est une structure conférée à l'espace-temps. Mais alors qu'en relativité restreinte cette structure, qui peut se ramener à η_{ij}, est donnée *a priori*, elle est en relativité générale une grandeur physique conditionnée par la distribution de masse. L'espace-temps de la relativité générale n'est donc pas un réceptacle passif de la matière.

C'est-là la mise en forme par Einstein d'un complexe d'idées promues par Ernst Mach dont les aspects les plus saillants sont que (a) l'inertie d'une particule doit être due à une interaction avec toutes les masses de l'univers, (b) l'espace n'a pas d'existence en soi, indépendamment de la matière.

On voit que si la relativité générale incorpore d'une certaine manière la première idée (puisque forces d'inertie et de gravitation ne sont plus distinguées), elle ne traduit en revanche pas la seconde. En effet, en l'absence de matière, l'espace-temps ne se réduit pas à "rien", mais à l'espace-temps de Minkowski. Einstein ne réalisa donc pas complètement son ambition.[11]

6. Décalage spectral gravitationnel

Einstein illustra dès 1907 (puis en 1911) la richesse des concepts de la relativité générale par des *expériences de pensée* (*"Gedankenexperimente"*) restées célèbres. En voici une, qui utilise les repères inertiels tangents de façon typiquement einsteinienne (et qui n'est qu'une autre version des calculs faits au chapitre précédent) : considérons dans un repère inertiel $\mathcal{S}$ loin de toute masse une "tour" de longueur h accélérée le long de l'axe z (on prendra l'accélération constante, égale à g dans le sens des z positifs). A l'instant du départ (quand sa vitesse est nulle) un signal (bref) de durée ΔT est émis de $z = 0$ (il n'y a pas de confusion possible sur cette durée : observateur en $z = 0$ dans la tour et observateur inertiel "tangent" sont au repos dans $\mathcal{S}$). Le signal atteint $z = h$ environ h/c secondes plus tard et la tour a alors la vitesse $v \approx gh/c$—si $\frac{v}{c}(\approx gh/c^2)$ est suffisamment petit. Le signal est alors observé à cet endroit par un observateur inertiel tangent ayant la vitesse v qui mesure, au premier ordre en v/c (effet Doppler), une durée $\Delta T' \approx \Delta T(1 + gh/c^2)$ (en négligeant la dilatation du temps qui est un effet du second ordre).

Les observateurs de la tour subissent le champ d'accélération g. Or le principe d'équivalence stipule qu'un tel champ est (localement) indiscernable d'un champ de gravitation et le même phénomène doit donc se produire dans un champ de gravitation, par exemple celui de la terre. Alors ΔT est le temps mesuré *en bas* de la tour et $\Delta T'$ le temps mesuré *en haut* ; un signal de fréquence ν, émis du bas d'une tour de hauteur h sera ainsi observé au sommet avec une fréquence inférieure donnée par

$$\nu_{haut} \approx \nu \left(1 - \frac{gh}{c^2}\right) \approx \nu \left(1 - \frac{U_{haut}}{c^2} + \frac{U_{bas}}{c^2}\right) \tag{6.1}$$

où l'on a introduit le potentiel de gravitation terrestre $U = -GM_\oplus/(R_\oplus + h)$, $g \equiv GM_\oplus/R_\oplus^2$.

Einstein poursuivit son raisonnement de la façon suivante : la différence des fréquences prédite signifie que l'horloge au sol retarde par rapport à celle en h (le même processus prend moins de temps au sol qu'en h). Ainsi la lumière parcourt les mêmes distances plus vite au sol qu'en h ; sa vitesse au sol est donc plus grande qu'en h, et l'on a : $c(0) \approx c(h)[1 + (U_{em} - U_{rec})/c^2]$. Prenons pour sol la surface du soleil, posons $c(0) = c'$, et faisons tendre h vers l'infini. On a alors $c' \approx c(1 + GM_\odot/c^2R_\odot)$. C'est là l'expression, obtenue en théorie newtonienne, de la vitesse d'un corpuscule lumineux près du soleil (*cf* livre ND-JPU). En reprenant le calcul

[11] "J'espérais *montrer que l'espace-temps n'était pas nécessairement quelque chose à quoi on puisse assigner une existence séparée, indépendamment des objets concrets de la réalité physique. Les objets physiques ne sont pas dans l'espace, ils ont une extension spatiale. En ce sens le concept d'"espace vide" perd son sens (...) Il n'existe pas d'espace vide, c'est-à-dire d'espace sans champ. L'espace-temps ne prétend pas à une existence propre, mais n'est qu'une propriété structurelle du champ. Ainsi Descartes n'était pas si loin de la vérité lorsqu'il pensait qu'il fallait refuser l'existence à l'espace vide*", A. Einstein, in *Relativity*, Methuen 1954.

newtonien Einstein en déduisit (en 1907) que la lumière devait être défléchie par le soleil, d'un angle égal à l'angle newtonien, soit 0.9". Ce résultat malheureusement est faux (et montre que l'intuition peut parfois être mauvaise conseillère...). En effet Einstein ignora dans son raisonnement, qui ne fait intervenir que le temps, la courbure de l'espace, dont l'effet sera, comme nous le verrons, de doubler la valeur de l'angle.

Reprenons l'expérience de pensée ci-dessus en faisant les calculs dans le repère accéléré qu'est la tour. Les coefficients de la métrique g_{ij} sont différents de η_{ij}. Comme nous l'avons vu au chapitre précédent fréquences d'émission (le bas de la tour) et de réception (le haut) sont alors liées par

$$\nu_{haut} = \nu\sqrt{\frac{g_{00}(bas)}{g_{00}(haut)}} \approx \nu\left(1+\frac{U_{bas}}{c^2}-\frac{U_{haut}}{c^2}\right) = \nu\left(1-\frac{GM}{c^2R_{bas}}+\frac{GM}{c^2R_{haut}}\right) \ ,$$

d'où l'on déduit qu'à l'ordre le plus bas

$$g_{00} \approx -\left(1+\frac{2U}{c^2}\right) \tag{6.2}$$

où U est le potentiel gravitationnel newtonien.

L'effet (2) fut mesuré par Pound et Rebka en 1960. Ils placèrent un échantillon de fer radioactif au bas d'une tour de l'université de Harvard de hauteur $h = 22.6$ m et observèrent sa fréquence au sommet de la tour. Le décalage spectral (ou "redshift") prédit est $(\nu - \nu_{haut})/\nu \approx (GM_\oplus/c^2R_\oplus)(h/R_\oplus) = 2.47 \times 10^{-15}$. Ils mesurèrent $(\nu - \nu_{haut})/\nu = (2.57 \pm 0.26) \times 10^{-15}$.

Plus récemment (1976) Vessot et Levine lancèrent une horloge maser à 10 000 kms d'altitude où ils mesurèrent sa fréquence. Ils atteignirent une précision de 2×10^{-4}.

Einstein avait proposé de mesurer le décalage spectral gravitationnel des raies d'émission du soleil, beaucoup plus important en principe, puisque de l'ordre de 2×10^{-6}. Mais les mouvements internes du soleil ajoutent des effets Doppler cinématiques difficilement mesurables. En revanche le redshift dû au champ des naines blanches est mesurable ; on s'en sert pour déterminer leurs rayons.

Mentionnons enfin l'expérience de Caroll-Alley de l'Université de Saint-Louis et de l'US Naval Observatory qui mesura en 1971 les différences entre les temps mesurés par une horloge au sol et des horloges ayant fait le tour du monde, soit vers l'Est, soit vers l'Ouest, en avion. Ici deux effets rivalisent : celui du champ de gravitation terrestre (une horloge au sol bat plus lentement qu'une horloge en altitude—formule (1)), et celui du mouvement (une horloge en mouvement bat plus lentement qu'une horloge au repos—paradoxe des jumeaux). L'avance des horloges ayant voyagé vers l'Ouest fut de 273 nano-secondes (soit l'avance calculée, à 2 nano-secondes près), et le retard de celles s'étant dirigé vers l'Est fut compatible avec les 59 nano-secondes prédites.

La précision des horloges atomiques embarquées sur satellites (en particulier ceux servant à la navigation–GPS) est maintenant telle que ces effets doivent être systématiquement pris en compte.

Exit donc l'espace-temps absolu de la relativité restreinte...

Définition générale d'une variété

7. Variété riemanienne

N.B. : Pour plus de rigueur mathématique on se reportera avec profit à tout traité de géométrie différentielle.

Considérons un *espace topologique* M, c.-à-d. un ensemble de *points* m pour lequel la notion de voisinage est définie.

Une *carte* ϕ de M est un homéomorphisme (i.e. une application bijective bi-continue) d'un ouvert U de M dans R^n (le produit cartésien itéré n fois de l'ensemble des réels R avec lui-même); n est la dimension de la variété et de la carte. ϕ associe ainsi à tout m de U un n-uple de nombres réels x^i, $i = 1, 2, ..., n$—les *coordonnées* de m dans la carte ϕ. On peut donc considérer ϕ comme un ensemble de n applications X^i associant les nombres x^i à m: $X^i(m) = x^i$. Par abus de langage on appelle aussi *coordonnées* les X^i et la carte ϕ un *système* de coordonnées. N.B.: ces coordonnées ne sont rien d'autre qu'un étiquetage différentiant les points de U.

Considérons maintenant deux voisinages U et U' de M s'intersectant. Leurs cartes ϕ et ϕ' sont dites C^k*-reliées* si la transformation entre leurs coordonnées est de classe C^k.

Un $atlas$ est une famille de cartes ϕ_i dont les domaines U_i recouvrent M.

Une $variété$ $différentiable$ de $classe$ C^k est un espace topologique ("de Haussdorf, séparable") muni d'atlas dont les cartes sont C^k-reliées.

Exemples de variétés:
- R^n, avec comme carte l'application identité,
- S^1 (le cercle), les produits cartésiens $R \times R$ (le plan), $R \times S^1$ (cylindre), $S^1 \times S^1$ (tore), etc,
- Les surfaces lisses à deux dimensions, par exemple la sphère S^2 dont un atlas contient au moins deux cartes.

N.B.1 : Dans la suite on fera souvent comme si l'atlas ne contenait qu'une seule carte. Mais il faut garder présent à l'esprit que dans le cas général il faut plusieurs cartes pour couvrir la variété.

N.B.2 : Etant donné que toute variété de dimension n est localement homéomorphe à R^n, deux variétés de même dimension et de même classe de différentiabilité ne peuvent, localement, être distinguées (leurs structures globales, en revanche, peuvent différer—cf R^2 versus S^2). Par la suite nous identifierons donc le plus souvent M à R^n.

8. Espaces tangent[12] et cotangent[13]

Soit $\mathcal{F}_m$ l'ensemble des fonctions f, C^∞, de U (ouvert de M contenant m) dans R. Une $tangente$, ou $vecteur$ $tangent$, ou $dérivation$ en m à M est une application v de $\mathcal{F}_m$ dans R telle que, pour tout $f, g \in \mathcal{F}_m, a, b \in R$:
v est linéaire : $v(af + bg) = av(f) + bv(g)$
v satisfait à la règle de Leibniz : $v(fg) = fv(g) + gv(f)$.

N.B. : une tangente est définie "en m" car elle agit sur des fonctions F (ou f) prenant leurs valeurs en m (ou x^i).

L'ensemble des tangentes en m forment l'$espace$ $tangent$, V_m, en m à M. C'est un espace vectoriel (on peut y définir une addition et la multiplication par un réel) de même dimension, n, que la variété. On notera $h_i, i = 1, 2...n$ une base générique de V_m. N.B : les espaces V_m et V_p associés à deux points m et p différents, sont différents (cf l'exemple des plans tangents à la sphère).

Un $champ$ de $vecteurs$ est une application qui, en chaque point m de M, sélectionne de façon continue un vecteur de l'espace tangent correspondant.

Considérons les fonctions $g_i = \partial f / \partial x^i$. On peut les considérer comme le résultat de l'action sur f (en x^i) des opérateurs $\partial / \partial x^i$, notés aussi ∂_i lorsqu'il n'y a pas de confusion possible sur le système de coordonnées x^i choisi. Ce sont des tangentes (ils satisfont aux axiomes de définition) et forment une base de l'espace tangent, la $base$ $naturelle$ associée aux coordonnées x^i. Toute tangente t se décompose donc selon : $t = t^i \partial_i$ où les nombres réels t^i sont les composantes de t dans la base ∂_i ou, par abus de langage, dans les $coordonnées$ x^i.[14]

Considérons l'espace tangent en $m(x^i)$ à M, V_m. Les applications linéaires, ω, de V_m dans R sont les *1-formes* et leur ensemble constitue l'$espace$ $dual$ ou $cotangent$, V_m^*, de V_m. V_m^* est, tout comme V_m, un espace vectoriel, de même dimension, n. On appelle $base$ $associée$ (ou $conjuguée$) de la base h_i de V_m les 1-formes $\theta^i, i = 1, 2...n$ telles que $\theta^j(h_i) = \delta_i^j$.

Une 1-forme ω associe un nombre a à une tangente v. De manière équivalente on peut dire qu'à la paire (v, ω) on associe a. On peut donc inverser le point de vue et introduire une application, $\tilde{v}$, qui à ω associe a. Cette application appartient au dual V_m^{**} de V_m^* qui est isomorphe à V_m. On peut donc identifier $\tilde{v}$ à la tangente v.

Considérons la fonction $f(x^1, ..., x^i, ...x^n) = x^i$ de R^n dans R. L'ensemble $(i = 1, 2...n)$ des 1-formes $\mathrm{d}x^i$ définies par : $\mathrm{d}x^j(\partial_i) = \delta_i^j$ constitue la base naturelle de l'espace cotangent en m associée aux coordonnées x^i. Toute forme λ se décompose donc selon $\lambda = \lambda_i \mathrm{d}x^i$ où les nombres λ_i sont les composantes de λ dans les coordonnées x^i.[15]
Remarque : par dualité, on a aussi : $\partial_i(\mathrm{d}x^j) = \delta_i^j$.

[12] La notion d'espace tangent a déjà été introduite lors de la description des espaces *plats* (euclidiens ou minkowskiens) $\mathcal{E}$, *cf* livre ND-JPU et chapitre 2. Ils n'étaient alors que des "copies" de l'espace vectoriel E sous-jacent, attachées à chaque point p, isomorphes entre elles *et* à $\mathcal{E}$. On se place maintenant dans le cas où ces identifications ne sont plus possibles *a priori*, *cf* par exemple la sphère et ses plans tangents.

[13] On généralise ici les définitions données en espace plat dans le cadre linéaire des coordonnées cartésiennes, et lorsque l'espace est repéré par des coordonnées curvilignes, *cf* livre ND-JPU et chapitre 2.

[14] La loi de transformation de cette base dans un changement de coordonnées a été donnée au chapitre précédent.
[15] La loi de transformation de cette base dans un changement de coordonnées a été donnée au chapitre précédent.

9. Tenseurs[16]

Si V_m et V_m^* sont les espaces tangent et dual en m à la variété M, un $tenseur$ T de type $\binom{p}{q}$ est une application multilinéaire du produit cartésien de p V_m^* et de q V_m dans R. C'est donc une opération qui associe un nombre réel a à p 1-formes $\omega_{(i)}$ et à q vecteurs $v_{(j)}$: $T(\omega_{(1)}, ..., \omega_{(p)}, v_{(1)}, ..., v_{(q)}) = a$. p est le degré de $contravariance$, q le degré de $covariance$.

Cas particuliers : un tenseur de type $\binom{0}{0}$ est un scalaire (un réel) ; un tenseur de type $\binom{0}{1}$, une fois covariant, est une 1-forme ; un tenseur de type $\binom{1}{0}$, une fois contravariant, est un vecteur tangent.

Le $produit$ $tensoriel$ (ou $direct$) $\otimes$ d'un vecteur de la base naturelle et d'une 1-forme de base de l'espace cotangent, $\partial_i \otimes \mathrm{d}x^j$, agit sur des couples de 1-formes et de tangentes pour donner un réel et est défini par : $(\partial_i \otimes \mathrm{d}x^j)(\mathrm{d}x^k, \partial_l) = \delta_i^k \delta_j^l$. L'opération se généralise aisément à des tenseurs de type quelconque et permet de construire une base sur laquelle décomposer un tenseur de type $\binom{p}{q}$ selon $T = T^{i_1 ... i_p}_{j_1 ... j_q} \partial_{i_1} \otimes ... \otimes \partial_{i_p} \otimes dx^{j_1} \otimes ... \otimes dx^{j_q}$. Les nombres $T^{i_1 ... i_p}_{j_1 ... j_q}$ sont les composantes du tenseur T dans les coordonnées x^i.[17]

Remarque : De même que l'on assimile souvent un point m d'une variété à ses coordonnées x^i, de même on identifie souvent un tenseur avec ses composantes dans la base associée aux x^i.

Comme à chaque point m d'une variété est associé un espace tangent particulier, des tenseurs (de même type) définis en des points différents agissent sur des espaces différents et ne sont donc pas de même nature. Un $champ$ $tensoriel$ est une opération qui en chaque point m sélectionne de façon continue un tenseur de type $\binom{p}{q}$. Comme chaque tenseur en m peut être défini par ses composantes $T^{ij...}_{kl...}$, un champ de tenseur peut donc être défini par les fonctions $T^{ij...}_{kl...}(x^i)$. Il faut cependant garder présent à l'esprit que, dans une carte donnée, ces fonctions prises en x^i et y^i se réfèrent à des objets différents.

Introduction au tenseur de Riemann-Christoffel

10. L'exemple de la sphère

Comment distinguer un espace-temps minkowskien *plat* balisé par des coordonnées non-cartésiennes, d'un espace-temps plus général, *courbe* ? Comment, en d'autres termes, être sûr qu'il n'existe pas de changement de coordonnées qui annule tous les symboles de Christoffel et ramène partout les coefficients de la métrique à ceux de Minkowski ?

Pour se familiariser avec la notion de courbure, considérons les éléments de longueur bi-dimensionnels :

$$\begin{aligned} ds^2 &= R^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \\ &= \left(\delta_{ab} + \frac{R^{-2}\delta_{ac}\delta_{ad}x^c x^d}{1 - R^{-2}\delta_{cd}x^c x^d}\right) dx^a dx^b \end{aligned} \tag{10.1}$$

où $(a, b) = (1, 2)$ et qui se déduisent l'un de l'autre par la transformation : $x^1 = R \sin\theta \cos\phi$ et $x^2 = R \sin\theta \sin\phi$. On peut les considérer comme la restriction, sur la surface $r = R$, de l'élément de longueur euclidien tri-dimensionnel $dS^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$. Ils donnent donc l'élément de longueur sur une sphère de rayon R.

Une sphère (ou une portion de sphère) se distingue d'un plan. Pour le montrer de manière *intrinsèque*, c.-à-d. sans plonger l'espace considéré (ici la sphère) dans un espace euclidien de dimension supérieure, plusieurs méthodes (développées par Gauss) sont possibles. Par exemple, sur une sphère, et contrairement à ce qui se passe dans un plan :

- un vecteur transporté parallèlement à lui-même le long d'un circuit fermé ne retrouve pas son orientation initiale ;

[16] On généralise ici les définitions données en espace plat dans le cadre linéaire des coordonnées cartésiennes, et lorsque l'espace est repéré par des coordonnées curvilignes, *cf* livre ND-JPU et chapitre précédent.

[17] La loi de transformation des tenseurs dans un changement de coordonnées a été donnée au chapitre précédent.

- la somme des angles d'un triangle délimité par des géodésiques est supérieure à 180° ; (on raconte que Gauss essaya, sans succès !, de vérifier cela sur le terrain ;)

- la circonférence $\mathcal{C}$ d'un cercle de rayon r n'y est pas égale à $2\pi r$ mais à $2\pi R\sin(r/R)$; [on en déduit que $\frac{3}{\pi}\left(\frac{2\pi r-\mathcal{C}}{r^3}\right)\to R^{-2}$ quand $r\to 0$;]

- la distance η entre deux grands cercles (des géodésiques) n'est pas proportionnelle à la distance s parcourue depuis le pôle; (on montre qu'elle satisfait à l'équation de "déviation géodésique" : $d^2\eta/ds^2 = -\eta/R^2$.)

Tous ces écarts à la géométrie euclidienne disparaissent lorsque $R\to\infty$. Ainsi R ne mesure pas seulement la courbure "extrinsèque" d'une sphère, c.-à-d. son rayon dans l'espace euclidien à trois dimensions dans lequel on peut la plonger; il mesure aussi sa courbure "intrinsèque", dite aussi de Gauss.

11. Dérivation covariante, transport parallèle et courbure

La *dérivée covariante* d'un champ de tenseurs de type $\binom{p}{q}$ par rapport à x^i, $D_iT^{j_1\dots j_p}_{k_1\dots k_q}$, est définie "en composantes" par (*cf* livre ND-JPU ou chapitre précédent)

$$D_iT^{j_1\dots j_p}_{k_1\dots k_q}=\partial_iT^{j_1\dots j_p}_{k_1\dots k_q}+\Gamma^{j_1}_{il_1}T^{l_1j_2\dots j_p}_{k_1\dots k_q}+\dots+\Gamma^{j_p}_{il_p}T^{i_1\dots l_p}_{k_1\dots k_q}-\Gamma^{m_1}_{ik_1}T^{i_1\dots i_p}_{m_1,k_2\dots k_q}-\dots-\Gamma^{m_q}_{ik_q}T^{i_1\dots i_p}_{k_1\dots m_q}. \tag{11.1}$$

où les *coefficients de connexion* Γ^k_{ij} définissent la dérivation. On peut voir cette opération comme associant au tenseur T un tenseur de type $\binom{p}{q+1}$. De manière équivalente on peut la définir intrinsèquement par (*cf* livre ND-JPU ou chapitre précédent)

$$D_{\partial_i}T\equiv D_iT=\left(D_iT^{j_1\dots j_p}_{k_1\dots k_q}\right)\partial_{j_1}\otimes\dots\otimes\partial_{j_p}\otimes dx^{k_1}\otimes\dots\otimes dx^{k_q} \tag{11.2}$$

auquel cas elle associe au tenseur T un tenseur de même type. Enfin, plus généralement

$$D_vT=v^iD_{\partial_i}T\equiv v^iD_iT \tag{11.3}$$

définit la dérivée covariante de T le long du vecteur $v=v^i\partial_i$.

La dérivation covariante associe à un tenseur un autre tenseur défini *au même point* m. Mais c'est également (tout comme la dérivation ordinaire) une opération qui, par "développement de Taylor", permet de transporter le tenseur T *parallèlement* à lui-même du point m à un point proche p, et ainsi de *connecter* les espaces tangents de p et q (d'où le nom de *connexion* donné à l'opérateur D). On pourra ainsi par exemple comparer T, défini en p, à un autre tenseur défini en q ou voir comment le champ de tenseur $T(x^i)$ varie de point en point.

Le *transport parallèle* d'un vecteur t^i le long d'un courbe $x^j(\lambda)$ de vecteur tangent $u^j=dx^j/d\lambda$ est défini "en composantes" par :

$$\frac{Dt^i}{d\lambda}\equiv u^jD_jt^i=\frac{dt^i}{d\lambda}+\Gamma^i_{jk}u^jt^k=0 \tag{11.4}$$

ou, de manière intrinsèque et équivalente, par

$$D_ut=D_u(t^i\partial_i)=u^j(\partial_jt^i+t^k\Gamma^i_{jk})\partial_i=\left(\frac{dt^i}{d\lambda}+\Gamma^i_{jk}u^jt^k\right)\partial_i=0 \tag{11.5}$$

Si les composantes t^i sont connues en $\lambda=\lambda_0$, l'équation ci-dessus les détermine uniquement pour tout λ ; en effet on a, en notant $t^i_{par}(x^l+dx^l)$ le résultat du transport parallèle de t^i de x^l à x^l+dx^l, (avec $dx^l=u^ld\lambda$) :

$$t^i_{par}(x^l+dx^l)=t^i(x^l)-\Gamma^i_{jk}t^kdx^j-\frac{1}{2}(\partial_l\Gamma^i_{jm}-\Gamma^i_{jk}\Gamma^k_{lm})t^mdx^jdx^l+\mathcal{O}[(dx)^3] \tag{11.6}$$

(En espace plat et coordonnées cartésiennes où tous les coefficients de connexion sont nuls on retrouve le résultat bien connu : $t^i_{par}(x^l+dx^l)=t^i(x^l)$.)[17]

[17] De manière analogue une *auto-parallèle* est une courbe telle que : $D_uu=0 \;\Leftrightarrow\; \frac{du^i}{d\lambda}+\Gamma^i_{jk}u^ju^k=0$. En espace plat et coordonnées cartésiennes les Γ sont nuls et c'est là l'équation d'une droite. En physique newtonienne c'est l'équation du mouvement d'une particule libre en coordonnées curvilignes. En relativité restreinte c'est l'équation du mouvement d'une particule libre dans un repère accéléré. N.B. : Une définition plus large d'une auto-parallèle est $D_t(t)=Cte\ t$. On peut cependant montrer qu'une reparamétrisation de la courbe γ ramène à la définition précédente. Le paramètre τ est alors dit *affine*.

Transportons parallèlement à lui-même le vecteur t^i le long d'un trajet infinitésimal $d_1x^j = u_1^j d\lambda$. Sa variation d_1t^i est donnée par (6). Transportons-le ensuite le long de $d_2x^j = u_2^j d\lambda$. Sa variation totale $\delta_{12}t^i$ s'obtient en itérant (6). Si maintenant nous avions transporté t^i le long de d_2x^j d'abord puis de d_1x^j sa variation aurait été obtenue de même, en intervertissant les rôles de '1' et '2'. La différence entre les deux résultats se trouve facilement : $(\delta_{21} - \delta_{12})t^i = t^j d_2x^l d_1x^k R^i_{jkl}$ où :

$$R^i{}_{jkl} \equiv \partial_k\Gamma^i_{lj} - \partial_l\Gamma^i_{kj} + \Gamma^i_{km}\Gamma^m_{lj} - \Gamma^i_{lm}\Gamma^m_{kj} \tag{11.7}$$

est le *tenseur de courbure* (ou encore de *Riemann-Christoffel*), de type $\binom{1}{3}$. (C'est un tenseur car $(\delta_{21}-\delta_{12})t^i$, différence de deux vecteurs au même point, est un vecteur.) On voit donc que ce n'est que si le tenseur de Riemann est nul que le transport parallèle d'un vecteur (ou de tout autre tenseur) ne dépend pas du chemin.

12. Commutation des dérivées covariantes, torsion et courbure

La dérivée covariante par rapport à la coordonnée x^i d'une fonction f, qui s'identifie à sa dérivée ordinaire ($D_jf = \partial_jf$), peut être vue comme la i-ème composante de la forme : $D_if\mathrm{d}x^i$. Sa dérivée seconde est donc (voir livre ND-JPU et chapitre précédent) : $D_iD_jf = \partial_{ij}f - \Gamma^k_{ij}\partial_kf$, grandeur qui peut être vue comme un tenseur deux fois covariant (*cf ibidem*). Intervertissant les indices i et j, on a donc :

$$\begin{aligned}(D_iD_j - D_jD_i)f &= -(\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji})\partial_kf \\ &= -T^k_{ij}\partial_kf\end{aligned} \tag{12.1}$$

De façon un peu plus intrinsèque et équivalente, on peut regarder l'action de la dérivée covariante par rapport à la coordonnée x^i (c.-à-d. par rapport au vecteur de base ∂_i) sur le vecteur de base ∂_j ; le résultat cette fois-ci est un vecteur :

$$D_j\partial_i = \Gamma^k_{ji}\partial_k \quad\Longrightarrow\quad D_j\partial_i - D_i\partial_j = (\Gamma^k_{ji} - \Gamma^i_{ij})\partial_k \equiv -T^k_{ij}\partial_k\,. \tag{12.2}$$

Les quantités T^k_{ij} mesurent l'antisymétrie de la connexion. Ce sont les composantes d'un tenseur T de type $\binom{1}{2}$, appelé la *torsion*.

Appliquons maintenant l'opérateur D_iD_j au vecteur ∂_k. Le résultat sera un vecteur :

$$D_iD_j\partial_k = D_i(\Gamma^l_{jk}\partial_l) = (\partial_i\Gamma^m_{jk} + \Gamma^l_{jk}\Gamma^m_{il})\partial_m \quad\Longrightarrow\quad (D_iD_j - D_jD_i)\partial_k = R^m{}_{kij}\partial_m \tag{12.3}$$

où les composantes du tenseur de Riemann ont été données plus haut. Ainsi le tenseur de Riemann mesure la non-commutativité des dérivées covariantes. On obtient de manière analogue l'action de l'opérateur $(D_iD_j - D_jD_i)$ sur la 1-forme de base $\mathrm{d}x^k$:

$$(D_iD_j - D_jD_i)\mathrm{d}x^k = -R^k{}_{lij}\mathrm{d}x^l \tag{12.4}$$

et, par la règle de Leibniz, son action sur tout tenseur. Par exemple

$$(D_iD_j - D_jD_i)(\mathrm{d}x^k\otimes\partial_l) = -R^k{}_{mij}\mathrm{d}x^m\otimes\partial_l + R^m{}_{lij}\mathrm{d}x^k\otimes\partial_m\,. \tag{12.5}$$

Concluons par une approche "en composantes", similaire à celle qui a conduit à (1.12) et calculons $D_iD_jv^k$. v^k est vu comme un vecteur, D_jv^k comme une tenseur $\binom{1}{1}$ et $D_iD_jv^k$ est un tenseur $\binom{1}{2}$. On a donc $D_iD_jv^k = \partial_i(D_jv^k) - \Gamma^l_{ij}D_lv^k + \Gamma^k_{il}D_jv^l$, ce qui conduit à

$$(D_iD_j - D_jD_i)v^k = R^k{}_{mij}v^m - T^l_{ij}D_lv^k\,. \tag{12.6}$$

L'approche intrinsèque qui mène à (6) est la suivante : v^k correspond au vecteur $v^k\partial_k$; $D_jv^k = \partial_jv^k + \Gamma^k_{jl}v^l$ correspond au tenseur $\binom{1}{1}$ $D_jv^k\partial_k\otimes\mathrm{d}x^j$; $D_i(D_jv^k\partial_k\otimes\mathrm{d}x^j)$ est aussi un tenseur $\binom{1}{1}$ dont les composantes sont $D_iD_jv^k$. Par multiplication tensorielle par $\mathrm{d}x^i$ on le transforme en tenseur $\binom{1}{2}$ et on obtient

$$D_i(D_jv^k\partial_k\otimes\mathrm{d}x^j)\otimes\mathrm{d}x^i - D_j(D_iv^k\partial_k\otimes\mathrm{d}x^j)\otimes\mathrm{d}x^i = (D_iD_j - D_jD_i)v^k\,\partial_k\otimes\mathrm{d}x^j\otimes\mathrm{d}x^i\,. \tag{12.7}$$

13. "Déviation géodésique" et courbure

N.B. : par simplicité on se place dans ce paragraphe dans le cas où la torsion est nulle.

Considérons une famille d'auto-parallèles $x^i_p(\lambda)$ où λ est le paramètre le long des courbes et p l'indice les étiquetant. Si $u^i = dx^i/d\lambda$ est le vecteur tangent aux courbes, on a : $Du^i/d\lambda(\equiv u^j D_j u^i) = 0$. Si par ailleurs $n^i = \partial x^i/\partial p$ est le vecteur mesurant l'écartement des courbes, on montre facilement que (si la torsion est nulle) : $Du^i/dp(\equiv n^j D_j u^i) = Dn^i/d\lambda(\equiv u^j D_j n^i)$. On peut ainsi calculer l'"accélération" relative de deux géodésiques voisines :

$$\begin{aligned} a^i \equiv \frac{D^2 n^i}{d\lambda^2} &= \frac{D}{d\lambda}\frac{Dn^i}{d\lambda} = \frac{D}{d\lambda}\frac{Du^i}{dp} = u^j D_j(n^k D_k u^i) \\ &= (u^j D_j n^k) D_k u^i + u^j n^k D_{jk} u^i \\ &= (u^j D_j n^k) D_k u^i + u^j n^k (D_{kj} u^i + R^i_{mjk} u^m). \end{aligned} \tag{13.1}$$

En utilisant le fait que :

$$\begin{aligned} 0 = \frac{D}{dp}\frac{Du^i}{d\lambda} &= n^j D_j (u^k D_k u^i) = n^j u^k D_{jk} u^i + (n^j D_j u^k) D_k u^i \\ &= (u^j D_j n^k) D_k u^i + u^j n^k D_{kj} u^i, \end{aligned} \tag{13.2}$$

on obtient l'équation souvent dite de *déviation géodésique* (bien qu'elle ne fasse pas intervenir de métrique) :

$$a^i = R^i_{mjk} u^m u^j n^k. \tag{13.3}$$

Ainsi, si le tenseur de Riemann n'est pas nul, les parallèles ont-elles tendance à ce "couper".

14. Propriétés du tenseur de courbure

Nous donnerons ici sans démonstration les propriétés :

- $R^k{}_{lji} = -R^k{}_{lij}$ (qui suit de la définition),
- si la torsion est nulle : $R^k{}_{lji} + R^k{}_{jil} + R^k{}_{ilj} = 0$ (*première identité de Bianchi*,
- si la torsion est nulle : $D_m R^i_{jnp} + D_n R^i_{jpm} + D_p R^i_{jmn} = 0$ (*seconde identité de Bianchi*)

Torsion et courbure d'une dérivation covariante

15. Crochet de Lie et identité de Jacobi

Rappelons qu'un vecteur est un opérateur de dérivation et que l'on écrit : $v \equiv \partial_v = v^i \partial_i$ (dans les coordonnées x^i). On définit le commutateur, ou *crochet de Lie* des deux vecteurs v et $w = w^j \partial_j$ comme le vecteur :

$$\begin{aligned} [v, w] &\equiv v \circ w - w \circ v \equiv \partial_v \circ \partial_w - \partial_w \circ \partial_v \\ &= v^i \partial_i \circ w^j \partial_j - w^i \partial_i \circ v^j \partial_j = (v^i \partial_i w^j - w^i \partial_i v^j) \partial_j \,. \end{aligned} \tag{15.1}$$

On note que le crochet de Lie de deux vecteurs de base est nul ($[\partial_i, \partial_j] = 0$) et on montre facilement l'*identité de Jacobi*

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0\,. \tag{15.2}$$

(Le crochet de Lie est un vecteur : il définit donc une opération de dérivation, la *dérivee de Lie*, *cf* chapitre suivant.)

16. Torsion et courbure

La *torsion* T^D d'une dérivation covariante D est un tenseur de type $\binom{1}{2}$ qui agit sur des couples de vecteurs (v, w) pour donner un autre vecteur selon

$$T^D(v, w) \equiv D_v w - D_w v - [v, w]\,. \tag{16.1}$$

Il n'est pas évident *a priori* que (1) définit un vecteur. Pour le montrer et faire le lien avec la définition donnée plus haut il suffit de décomposer v et w sur une base (ainsi par exemple $D_v w = v^i D_i(w^j \partial_j)$ et de se rappeler la définition des coefficients de connexion ($D_i \partial_j = \Gamma^k_{ij} \partial_k$) pour obtenir

$$T^D(v, w) = T^k_{ij}\, v^i w^j \partial_k \quad \text{avec} \quad T^k_{ij} \equiv \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji} \tag{16.2}$$

De manière analogue on définit la *courbure de Riemann Christoffel* R^D d'une dérivation covariante D comme le tenseur $\binom{1}{3}$ qui, lorsqu'il agit sur le triplet de vecteurs (u, v, w) donne le vecteur défini par

$$R^D_{u,v} w \equiv [D_u, D_v] w - D_{[u,v]} w \,. \tag{16.3}$$

où $[D_u, D_v]w \equiv D_u(D_v w) - D_v(D_u w)$. On montre comme précédemment que (3) définit effectivement un vecteur en décomposant u, v et w sur une base. Pour faire le lien avec la définition donnée plus haut il suffit de prendre pour u, v et w les vecteurs de base ∂_i, ∂_j et ∂_k et on obtient immédiatement

$$R^D_{\partial_i,\partial_j} \partial_k = R^m{}_{kij} \partial_m \quad \text{avec} \quad R^m{}_{kij} \equiv \partial_i \Gamma^m_{jk} - \partial_j \Gamma^m_{ik} + \Gamma^m_{il} \Gamma^l_{jk} - \Gamma^m_{jl} \Gamma^l_{ik} \tag{16.4}$$

17. Equations de structure de Cartan

Soit ω une 1-forme ($\omega = \omega_i \mathrm{d}x^i$ dans les coordonnées x^i) ; soit $\mathrm{d}\omega$ sa dérivée extérieure (*i.e.* $\mathrm{d}\omega = \partial_j \omega_i \, \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i$ où $\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i \equiv \mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^i - \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$ est le produit extérieur des formes $\mathrm{d}x^j$ et $\mathrm{d}x^i$; rappelons que, par antisymétrie du produit extérieur, $\mathrm{d}^2\omega = 0$—lemme de Poincaré, *cf* chapitre précédent) ; $\mathrm{d}\omega$ étant une 2-forme, elle agit sur les couples de vecteurs (v, w) pour donner une fonction. On a :[19]

$$\mathrm{d}\omega(v, w) = v\, \omega(w) - w\, \omega(v) - \omega([v, w]) \tag{17.1}$$

Si l'on choisit pour les vecteurs v et w des vecteurs d'une base non nécessairement holonome (*i.e.* $v = h_i$ et $w = h_j$, où $h_i = \partial_i$ seulement si la base est naturelle) et si l'on choisit pour ω un vecteur de la base duale associée : $\omega = \theta^k$ (avec $\theta^k(h_i) = \delta^k_i$), alors la formule (1) devient

$$\{\mathrm{d}\theta^k(h_i, h_j)\}\, h_k = -[h_i, h_j] \tag{17.2}$$

(le membre de droite est un vecteur, le coefficient de h_k dans le membre de gauche est un scalaire.)

Soit h_i une base de l'espace tangent et θ_j la base duale associée ($\theta^k(h_i) = \delta^k_i$). On munit la variété d'une connexion affine D définie par

$$D_{h_i} h_j = \gamma^k_{ij}\, h_k \tag{17.3}$$

où les fonctions γ^k_{ij} sont les *coefficients de rotation de Ricci* (si la base h_i est une base naturelle ($h_i = \partial_i$) les coefficients de rotation deviennent les coefficients de connexion Γ^k_{ij}).

Suivant Cartan, on considère les γ^k_{ij} comme le résultat de l'action de 1-formes ω^k_j, appelées *formes de connexion*,[20] sur les vecteurs h_i :

$$\gamma^k_{ij} = \omega^k_j(h_i) \quad \Longleftrightarrow \quad \omega^k_j = \gamma^k_{ij}\, \theta^i \,. \tag{17.4}$$

Armés de ces définitions on peut exprimer la torsion, définie en plus haut, en fonction des formes de connexion. On obtient la *première équation de structure*[21]

$$T^D = \Omega^k \otimes h_k \qquad \text{avec} \qquad \Omega^k \equiv \mathrm{d}\theta^k + \omega^k_j \wedge \theta^j \tag{17.5}$$

[19] En effet, en décomposant $v = v^i \partial_i$ et $w = w^j \partial_j$, on a : (1) $\mathrm{d}\omega(v, w) = (\partial_l \omega_k - \partial_l \omega_k) v^l w^k$; (2) $v\, \omega(w) = v^i w^k \partial_i \omega_k + v^i \omega_k \partial_i w^k$, et une expression analogue pour $w\, \omega(v)$; (3) $\omega([v, w]) = \omega_k(v^i \partial_j w^k - w^j \partial_j v^k)$, en se rappelant la définition du crochet de Lie. Les termes en dérivées des composantes des vecteurs s'éliminent et on arrive à la formule (1)

[20] Il ne faut pas confondre les indices i et k qui numérotent ces 1-formes avec les indices qui distinguent les composantes d'une tenseur de type $\binom{1}{1}$!

[21] En effet, on a, en applicant la définition et en utilisant (4) et (2) :

$$T^D(h_i, h_j) = D_{h_i} h_j - D_{h_j} h_i - [h_i, h_j] = \{\omega^k_j(h_i) - \omega^k_i(h_j) + \mathrm{d}\theta^k(h_i, h_j)\}\, h_k \,.$$

Le scalaire $\omega^k_j(h_i)$ peut être vu comme la 2-forme $(\omega^k_l \otimes \theta^l)$ agissant sur le couple de vecteurs (h_i, h_j) : $\omega^k_j(h_i) = (\omega^k_l \otimes \theta^l)(h_i, h_j)$; de même : $\omega^k_i(h_j) = (\theta^l \otimes \omega^k_l)(h_i, h_j)$; ainsi $T(h_i, h_j)$ se réécrit : $T^D(h_i, h_j) = \{(\omega^k_l \wedge \theta^l + \mathrm{d}\theta^k)(h_i, h_j)\}\, h_k$ d'où (5) suit.

où les Ω^k sont les 2-formes différentielles (*i.e.* des tenseurs covariants anti-symétriques) de *torsion*.

(En base naturelle où $\theta^k = \mathrm{d}x^k$ on a : $\omega^k_j = \Gamma^k_{ij}\mathrm{d}x^i$ et $\Omega^k = \Gamma^k_{ij}\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j = (\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji})\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j = T^k_{ij}\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$. Enfin : $T^D = T^k_{ij}\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j \otimes \partial_k$.)

Si l'on choisit maintenant pour ω dans la relation (1) les 1-formes de connexion ω^i_j, alors, par un calcul analogue à celui qui a conduit à (5), on obtient que la courbure définie pus haut se réécrit

$$R^D_{h_i,h_j} h_k = \{(\mathrm{d}\omega^m_k + \omega^m_l \wedge \omega^l_k)(h_i, h_j)\} h_m \tag{17.6}$$

soit, de façon plus compacte

$$R^D = \Omega^m_k \otimes h_m \otimes \theta^k \qquad \text{avec} \qquad \Omega^m_k \equiv \mathrm{d}\omega^m_k + \omega^m_l \wedge \omega^l_k \tag{17.7}$$

C'est là la *deuxième équation de structure* d'Elie Cartan où les grandeurs Ω^i_j sont les 2-formes de *courbure*.

Variétés métriques

Une connexion permet de définir le transport parallèle de quantités géométriques d'un point à un autre d'une variété, voir plus haut. Afin de pouvoir également définir une *géodésique* ou courbe de longueur extrémale entre deux points, la notion de distance doit maintenant être introduite.[22]

18. Le tenseur métrique

Un *tenseur métrique*, g, est un champ tensoriel sur M, deux fois covariant (*i.e.* de type $\binom{0}{2}$), symétrique et non dégénéré. Dans un système de coordonnées x^i il s'écrit :

$$g = g_{ij}\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j \tag{18.1}$$

Les $n(n+1)/2$ fonctions $g_{ij}(x^k)$ symétriques ($g_{ij} = g_{ji}$) et inversibles ($g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j$) le définissent.[23]

Comme nous l'avons déjà vu dans le contexte des espaces euclidiens en coordonnées cartésiennes ou curvilignes, le tenseur métrique permet de définir une correspondance biunivoque entre vecteurs et 1-formes. En effet, si $v = v^i h_i$ est un vecteur, alors $v_i\theta^i$ où $v_i \equiv g_{ij}v^j$ est une 1-forme isomorphe à v (et souvent notée v également.) Réciproquement, si $\lambda = \lambda_i\theta^i$ est une 1-forme, alors $\lambda^i h_i$ où $\lambda^i \equiv g^{ij}\lambda_j$ est un vecteur. De manière plus générale, à tout tenseur de type $\binom{p}{q}$ on associe ainsi des tenseurs de type $\binom{p-1}{q+1}$ ou $\binom{p+1}{q-1}$.

Etant donné g on peut toujours trouver en un point une base de vecteurs h_i *orthonormés* de l'espace tangent, tels que :

$$g(h_i, h_j) = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j \qquad g(h_i, h_i) = \pm 1. \tag{18.2}$$

Si $n = 4$ les h_i s'appellent *tétrades*, ou *vierbein* et, plus généralement, *champ de repère* (et, parfois, repère mobile). Si tous les signes sont positifs la métrique est *riemannienne*, si un signe est négatif, elle est *lorentzienne*.[24]

Enfin, une métrique définit le *produit scalaire* de deux vecteurs v et v' par : $\langle v, v'\rangle \equiv g(v, v') = g_{ij}v^i v'^j$. Dans le cas d'une métrique lorentzienne, si la *norme* $\langle v, v\rangle$ de v est positive, v est dit du genre espace ; si elle est négative, v est du genre temps ; si elle est nulle, v est isotrope.

---

[22] Dans le livre ND-JPU et au chapitre précédent toutes les propriétés géométriques des espaces-temps, en particulier la notion de transport parallèle, ont été *déduites* de l'existence d'une métrique (euclidienne ou minkowskienne). Nous considérons ici le cas plus général où métrique et connexion sont des structures *a priori* indépendantes.

[23] En effet, connaissant ses composantes dans les coordonnées x^i on les connait dans tout autre système *via* la loi de transformation des tenseurs 2 fois covariants, *cf* plus haut.

[24] N.B. : il suffit que la variété soit "para-compacte" pour qu'on puisse y définir une métrique riemannienne. En revanche une métrique lorentzienne ne peut être définie que si la "caractéristique d'Euler" de la variété est nulle ; ainsi une 2-sphère dont la caractéristique d'Euler vaut deux n'admet pas de métrique lorentzienne. Voir tout traité de géométrie différentielle pour définitions et démonstrations.

19. Equation géodésique

La notion de norme associée au tenseur métrique permet de définir la longueur d'une courbe du genre temps (et similairement du genre espace), $p = p(\lambda)$, soit encore $x^i = x^i(\lambda)$, de vecteur tangent $u = u^i \partial_i$ où $u^i \equiv dx^i/d\lambda$, entre les points p_1 et p_2, par :

$$L[p(\lambda)] = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \sqrt{-g(u,u)} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \sqrt{-g_{ij} u^i u^j} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \Big(- g_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} \Big)^{\frac{1}{2}} . \tag{19.1}$$

On remarque que L est invariant par reparamétrisation, c.-à-d. dans le changement $\lambda \mapsto \lambda(\tau)$.

Considérons maintenant un ensemble de courbes $p_s(\lambda)$ indéxées par s, toutes issues de p_1 et aboutissant en p_2, et calculons la variation δL de la longueur de ces courbes quand on varie s :

$$\delta L = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{1}{2\sqrt{-g_{ij} u_s^i u_s^j}} \left(-2 g_{ij} \frac{d\delta x_s^i}{d\lambda} \frac{dx_s^j}{d\lambda} - \partial_k g_{ij} \delta x_s^k \frac{dx_s^i}{d\lambda} \frac{dx_s^j}{d\lambda} \right) d\lambda \tag{19.2}$$

On peut, à ce stade (pas avant !), choisir la paramétrisation, par exemple $g_{ij} u_s^i u_s^j = -1$. En notant alors τ le paramètre, on a (en omettant l'indice s)

$$\begin{aligned} \delta L &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(-g_{ij} \frac{d\delta x^i}{d\tau} u^j - \frac{1}{2} \partial_k g_{ij} \delta x^k u^i u^j \right) d\tau \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(-\frac{d}{d\tau}(g_{ij} u^j \delta x^i) + \frac{d}{d\tau}(g_{ij} u^j) \delta x^i - \frac{1}{2} \partial_k g_{ij} \delta x_s^k u^i u^j \right) d\tau \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \delta x^k d\tau \left(g_{kj} \frac{du^j}{d\tau} + \partial_i g_{kj} u^i u^j - \frac{1}{2} \partial_k g_{ij} u^i u^j \right) . \end{aligned} \tag{19.3}$$

La courbe est extrémale si $\delta L = 0$, ce que l'on peut écrire sous la forme de l'équation *géodésique* :

$$\frac{du^i}{d\tau} + \left\{ {i \atop jk} \right\} u^j u^k = 0 \quad \text{avec} \quad g(u,u) = -1 \qquad \text{où les} \qquad \left\{ {i \atop jk} \right\} = \frac{1}{2} g^{il} (\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{lj} - \partial_l g_{jk}) \tag{19.4}$$

sont les *symboles de Christoffel.*

20. Connexion de Levi-Civita

On voit ainsi que pour que la notion d'auto-parallèle définie dans l'introduction comme la courbe "la plus droite possible" se confonde avec celle ici définie de géodésique ou courbe "la plus courte (ou longue) possible", il faut identifier les coefficients de connexion de la dérivation covariante et les symboles de Christoffel, la connexion prenant alors le nom de *connexion de Levi-Civita* ou de *connexion riemannienne.* Métrique et connexion sont donc compatibles si

$$\Gamma^i_{jk} = \left\{ {i \atop jk} \right\} = \frac{1}{2} g^{il} (\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{lj} - \partial_l g_{jk}) . \tag{20.1}$$

Les symboles de Christoffel étant symétriques, la connexion de Levi-Civita l'est aussi, c.-à-d. qu'elle est sans torsion.

Il est une autre façon, équivalente, d'imposer la compatibilité d'une métrique et d'une connexion, à savoir qu'elle soit sans torsion et que, pour tout vecteur v :

$$D_v g = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \partial_v (g(u,w)) = g(D_v u, w) + g(v, D_w u) . \tag{20.2}$$

L'équivalence se montre facilement en décomposant g et les vecteurs v, u et w sur une base.[25]

[25] Si on n'impose pas que la torsion soit nulle alors il existe une infinité de connexions compatibles avec la métrique. En revanche si la torsion est nulle, la connexion métrique est unique, et donnée par (1), comme l'a montré Ricci.

21. Propriétés métriques du tenseur de Riemann et ses dérivés

Lorsque la connexion, symétrique, est compatible avec un tenseur métrique, le tenseur de courbure possède la propriété supplémentaire :

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} \qquad \text{où} \qquad R_{ijkl} \equiv g_{ip} R^p_{jkl} \,. \tag{21.1}$$

Le tenseur de Riemann étant de type $\binom{1}{3}$ on peut par contraction en déduire des tenseurs de type $\binom{0}{2}$. A cause de l'antisymétrie métrique ci-dessus, la contraction $R^i{}_{ijk} \equiv 0$ et ne reste que le *tenseur de Ricci* R_{ij} :

$$R_{ij} \equiv R^l_{ilj} = -R^l_{ijl} \tag{21.2}$$

La *courbure scalaire* est, elle, définie par

$$R \equiv g^{ij} R_{ij} \,. \tag{21.3}$$

On montre facilement, à partir des secondes identités de Bianchi et de la nullité de la dérivée covariante de g, l'importante propriété :

$$D_i G^{ij} = 0 \qquad \text{où} \qquad G_{ij} \equiv R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R \tag{21.4}$$

est le *tenseur d'Einstein.*

Enfin on peut isoler dans le tenseur de Riemann les termes qui dépendent du tenseur de Ricci et de la courbure scalaire ; le terme restant, $C^{am}{}_{sq}$ s'appelle *tenseur de Weyl.* Plus précisément, n étant la dimension de la variété :

$$R^{am}{}_{sq} = C^{am}{}_{sq} + \frac{1}{n-2}\left(g^a_s R^m_q + g^m_q R^a_s - g^m_s R^a_q - g^a_q R^m_s\right) - \frac{1}{(n-1)(n-2)}\left(g^a_s g^m_q - g^a_q g^m_s\right) R. \tag{21.5}$$

Le tenseur de Weyl possède toutes les symétries du tenseur de Riemann et est de plus sans trace : $C^{am}{}_{aq} = 0$. Par ailleurs deux espaces de Riemann, de métrique $\bar{g}$ et g *conformément* reliés, c.-à-d. tels que $\bar{g} = F(x^a) g$, ont même tenseur de Weyl.

22. Repères localement inertiels

Soit $g_{ij}(x^k)$ les composantes du tenseur métrique g dans le système de coordonnées x^k. Dans un autre système $X^l = X^l(x^k)$ les composantes de g sont $f_{ij}(X^k) = \frac{\partial x^k}{\partial X^i}\frac{\partial x^l}{\partial X^j} g_{kl}$. Effectuons un développement de Taylor autour d'un point p_0 de coordonnées X^k_0 :

$$f_{ij}(X^k) = \frac{\partial x^k}{\partial X^i}\frac{\partial x^l}{\partial X^j} g_{kl}{}_{|_0} + (X^m - X^m_0)\left(g_{kl}\frac{\partial^2 x^k}{\partial X^m \partial X^i}\frac{\partial x^l}{\partial X^j} + g_{kl}\frac{\partial^2 x^k}{\partial X^m \partial X^j}\frac{\partial x^l}{\partial X^i} + \frac{\partial x^k}{\partial X^i}\frac{\partial x^l}{\partial X^j}\frac{\partial g_{kl}}{\partial X^m}\right)_{|_0} + ...$$

La question est : existe-t-il un changement de coordonnées tel que $f_{ij} = \eta_{ij} + \mathcal{O}(X^m - X^m_0)^2$? La réponse est oui : au point p_0 les données sont les $n(n+1)/2$ composantes $g_{kl}{}_{|_0}$ de la métrique (soit 10 en quatre dimensions), les $n^2(n+1)/2 = 40$ composantes $\partial_m g_{kl}{}_{|_0}$ de sa dérivée, les $[n(n+1)/2]^2 = 100$ composantes de sa dérivée seconde *etc* ; les paramètres libres sont les $n^2 = 16$ nombres $\frac{\partial x^k}{\partial X^i}|_0$, les $n^2(n+1)/2 = 40$ valeurs des dérivées secondes, les $n^2(n+1)(n+2)/3! = 80$ valeurs des dérivées troisièmes *etc* ; par conséquent le système $f_{ij}(X^k_0) \equiv \frac{\partial x^k}{\partial X^i}\frac{\partial x^l}{\partial X^j} g_{kl}{}_{|_0} = \eta_{ij}$, de 10 équations pour 16 inconnues, a une infinité de solutions $\partial_m g_{kl}{}_{|_0}$ à 6 paramètres, les 6 paramètres du groupe de Lorentz ; quant au système $\left(g_{kl}\frac{\partial^2 x^k}{\partial X^m \partial X^i}\frac{\partial x^l}{\partial X^j} + g_{kl}\frac{\partial^2 x^k}{\partial X^m \partial X^j}\frac{\partial x^l}{\partial X^i} + \frac{\partial x^k}{\partial X^i}\frac{\partial x^l}{\partial X^j}\frac{\partial g_{kl}}{\partial X^m}\right)_{|_0} = 0$ de 40 équations pour 40 inconnues il a une solution unique, *cqfd.*

En revanche on ne peut pas en général annuler le terme d'ordre 2 car le système à résoudre comporte 100 équations pour 80 paramètres libres seulement. La différence, 20, est le nombre de composantes du tenseur de Riemann. En développant à l'ordre suivant on trouve en effet (théorème de Riemann-Cartan)

$$f_{ij}(X^k) = \eta_{ij} - \frac{1}{6}(X^m - X^m_0)(X^n - X^n_0)(R_{imjn}|_0 + R_{injm}|_0) + ... \tag{22.1}$$

où $R_{imjn}|_0$ sont les composantes, dans le système de coordonnées X^k, du tenseur de Riemann ; quant aux termes suivants ils s'expriment en fonction des dérivées covariantes du tenseur de Riemann. En effet les composantes du tenseur de Riemann se réduisent à

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2}(\partial^2_{jk}g_{il} + \partial^2_{il}g_{jk} - \partial^2_{ik}g_{jl} - \partial^2_{jl}g_{ik}) \tag{22.2}$$

de sorte que

$$\partial^2_{mn}g_{ij} = \frac{1}{3}(R_{imjn} + R_{injm}) \quad \text{et} \quad \Gamma^i_{jk} = -\frac{1}{3}(X^m - X^m_0)(R^i{}_{jkm} + R^i{}_{kjm})\,. \tag{22.3}$$

Dans ces coordonnées dites "normales" l'équation géodésique s'écrit donc

$$\frac{du^i}{d\tau} = \frac{2}{3}R^i{}_{jkm}u^i u^j (X^m - X^m_0) + ... \tag{22.4}$$

On voit ainsi que, en accord avec les exigences physiques exposées dans la première partie, on peut en tout point bâtir un système de coordonnées quasi-minkowskiennes, c.-à-d. un repère quasi-inertiel (défini aux transformations de Lorentz près). Ce n'est que si le tenseur de Riemann est nul que ce système peut être étendu à tout l'espace-temps, qui n'est alors autre que l'espace-temps plat de Minkowski.

Les équations d'Einstein et leur structure

Matière en présence de gravitation

Les lois du mouvement peuvent s'obtenir à partir d'un principe de moindre action qui stipule qu'il existe, associé à tout système physique, une quantité scalaire (donc invariante), l'*action*, fonctionnelle des états possibles du système, dont le minimum (ou extremum) entre deux états donnés détermine l'évolution effectivement suivie par le système.

23. Action d'un point matériel en présence de gravitation

Plaçons-nous dans un repère inertiel en coordonnées minkowskiennes ; la ligne d'univers d'une particule matérielle (de masse non nulle) est du genre temps et donnée par $X^i = X^i(\tau)$. Si la particule n'est soumise à aucune force, le scalaire le plus simple, fonctionnelle de chemin, que l'on puisse lui associer est :

$$S_l = -mc^2\int_a^b d\tau = -mc\int_a^b \sqrt{-\eta_{ij}dX^i dX^i} = \int_{t_a}^{t_b} dt\, L \quad \text{avec} \quad L = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{23.1}$$

Dans un système de coordonnées curvilignes où les coefficients de la métrique sont g_{ij} cette action devient

$$S_l = -mc^2\int_a^b d\tau = -mc\int_a^b \sqrt{-g_{ij}dx^i dx^j} \equiv \int_a^b d\lambda\, L \quad \text{avec} \quad L = -mc\sqrt{-g_{ij}\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^j}{d\lambda}}, \tag{23.2}$$

où λ est un paramètre quelconque. Son extrémisation donne l'équation géodésique

$$\frac{du^k}{d\tau} + \Gamma^k_{lj}u^l u^j = 0, \quad \text{avec} \quad u^i u_i = -1 \tag{23.3}$$

qui décrit le mouvement d'une particule libre rapporté à un repère accéléré. Ainsi donc l'observateur observe que dans le référentiel où il est au repos les trajectoires des particules libres ne sont pas linéaires dans le temps. Il note aussi que leurs accélérations sont indépendantes de leur masse inertielle. Il fait donc l'hypothèse que les "forces" auxquelles elles sont soumises sont de "fictives forces d'inertie" et que son repère n'est pas inertiel. Il cherche un nouveau repère dans lequel le mouvement des particules libres soit rectiligne uniforme. S'il le trouve, c-à-d s'il existe une transformation de coordonnées qui réduit la métrique à celle de Minkowski, il en déduit que son repère était tout simplement accéléré.

Dans le cas général où la courbure de l'espace-temps n'est pas nulle, il n'existe pas de changement de référentiel qui puisse, globalement, réduire la métrique à sa forme minkowskienne. Par le principe d'équivalence, c'est qu'il existe alors un champ gravitationnel et les coefficients de la métrique g_{ij}, décrivent à la fois le champ d'inertie, c-à-d le référentiel choisi, et le champ de gravitation présents.

En mécanique newtonienne, et dans un repère inertiel, l'action d'une particule dans un champ de gravitation est :

$$S_{l(n)} = \int \left(-mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 - mU\right) dt \tag{23.4}$$

où U est le potentiel newtonien (et où la constante $-mc^2$ est ajoutée afin que S_l et $S_{l(n)}$ coïncident en absence de champ et quand $c \to \infty$). Il faut donc qu'à la limite newtonienne l'élément de longueur $d\tau$ se réduise à :

$$d\tau \sim dt\left(1 - \frac{v^2}{2c^2} + \frac{U}{c^2}\right) \quad \text{soit} \quad ds^2 \sim -c^2dt^2\left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) + d\vec{r}^{\,2}. \tag{23.5}$$

On retrouve ainsi de manière générale l'expression de la composante g_{00} de la métrique en fonction du potentiel newtonien sont reliés par la relation dans la limite des champ et vitesses faibles.

24. Action du champ électromagnétique en présence de gravitation

Soit une particule en interaction avec un champ électromagnétique. Les faits expérimentaux (plus que des considérations générales) déterminent la forme de l'action comme la somme de (23.2) et de :

$$S_i = e\int_a^b A_i dx^i \tag{24.1}$$

où la charge e est le paramètre de couplage au champ et où A_i est un vecteur (de sorte que S_i soit un scalaire), le *vecteur potentiel*, dont on postule qu'il décrit complètement l'interaction. Si l'on introduit une densité de charge ϱ en lieu et place de e, telle que $e = \int \varrho dV$ où la somme est prise sur tout l'espace et $dV \equiv dx^1dx^2dx^3$, on peut réécrire (1) sous la forme :

$$S_i = \frac{1}{c}\int_a^b A_i j^i \sqrt{-g}\, d\Omega \quad \text{avec} \quad j^i = \frac{\varrho}{\sqrt{-g}}\frac{ds}{dt}\, u^i. \tag{24.2}$$

Ici $\sqrt{-g}\, d\Omega$, où $d\Omega \equiv dx^0dx^1dx^2dx^3$ et g est le déterminant de la métrique g_{ij}, est l'élément de volume invariant par transformation de coordonnées. Quant à j^i, où $u^i \equiv dx^i/d\tau$, c'est un vecteur—le vecteur *courant*.

Les équations de Maxwell du champ électromagnétique dérivent aussi d'une action, fonctionnelle du potentiel, décrivant le champ lui-même. Là encore son choix est justifié plus par ses conséquences que par des principes premiers. On prend :

$$S_c = -\frac{1}{4\mu_0 c}\int F_{ij}F^{ij}\sqrt{-g}\, d\Omega \tag{24.3}$$

où μ_0 la "perméabilité du vide", où l'intégrale est prise sur tout l'espace et entre deux instants donnés et où :

$$F_{ij} \equiv \partial_i A_j - \partial_j A_i \tag{24.4}$$

est le tenseur du champ électromagnétique (*cf* chapitre précédent).

Lorsque la particule chargée se trouve dans un champ électromagétique, l'action totale est la somme des expressions (23.2) et (1). La variation de (1) est :

$$\begin{aligned} \delta S_i &= e\int_a^b (A_i d\delta x^i + \delta A_i dx^i) = eA_i\delta x^i|_a^b - e\int_a^b (dA_i\delta x^i - \delta A_j dx^j) \\ &= -e\int_a^b (\partial_j A_i - \partial_i A_j)\frac{dx^j}{d\tau}\delta x^i d\tau = e\int_a^b F_{ij}u^j\delta x^i d\tau. \end{aligned} \tag{24.5}$$

Quant à la variation de (23.2), elle est donnée par (23.3). Par conséquent les équations du mouvement s'écrivent :

$$mc\frac{Du^i}{d\tau} = eF^{ij}u_j. \tag{24.6}$$

C'est-là la forme manifestement invariante dans tout repère de l'équation de Lorentz. C'est aussi son expression en présence d'un champ de gravitation.

Quant aux équations du champ électromagnétique, elles s'obtiennent en variant la somme de (2) et (3) par rapport au potentiel A_i, ce qui donne (exercice : expliciter le calcul) :

$$D_jF^{ij} = \mu_0 j^i \tag{24.7}$$

où on a utilisé le fait que l'antisymétrie de F^{ij} implique que $\sqrt{-g}D_jF^{ij} = \partial_j(\sqrt{-g}F^{ij})$. L'équation (7) est la forme manifestement invariante du "deuxième groupe" des équations de Maxwell.

25. Action d'un champ scalaire en présence de gravitation

L'action d'un champ scalaire $\Phi(x^i)$ est :

$$S_c = \int d\Omega\sqrt{-g}\,\mathcal{L} \quad \text{avec} \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_i\Phi\partial^i\Phi - V(\Phi) \tag{25.1}$$

où $V(\Phi)$ est le potentiel d'auto-interaction [$V(\Phi) = \frac{1}{2}m^2\Phi^2$ pour un champ libre massif].

De manière générale, la variation de l'intégrale fonctionnelle (1) est :

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt\left[\frac{\delta L}{\delta\Phi} - \partial_0\frac{\delta L}{\delta\partial_0\Phi}\right]\delta\Phi + \left[\frac{\delta L}{\delta\partial_0\Phi}\delta\Phi\right]_{t_1}^{t_2}. \tag{25.2}$$

Le dernier terme est nul car la configuration du champ est fixée aux bornes. Par ailleurs :

$$\delta L = c\int d^3x\left[\frac{\partial\mathcal{L}\sqrt{-g}}{\partial\Phi} - \partial_\alpha\frac{\partial\mathcal{L}\sqrt{-g}}{\partial\partial_\alpha\Phi}\right]\delta\Phi + c\int d^3x\,\partial_\alpha\left(\frac{\partial\mathcal{L}\sqrt{-g}}{\partial_\alpha\Phi}\delta\Phi\right). \tag{25.3}$$

Le dernier terme est nul si le champ s'évanouit à l'infini spatial. Par conséquent :

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} c\,dt\int d^3x\left[\frac{\partial\mathcal{L}\sqrt{-g}}{\partial\Phi} - \partial_\alpha\frac{\partial\mathcal{L}\sqrt{-g}}{\partial\partial_\alpha\Phi} - \partial_0\frac{\delta\mathcal{L}\sqrt{-g}}{\delta\partial_0\Phi}\right]\delta\Phi. \tag{25.4}$$

Les équations du mouvement extrémisent l'action : $\delta S = 0$. Elles sont donc :

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi} - \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_i\frac{\partial\mathcal{L}\sqrt{-g}}{\partial\partial_i\Phi} = 0 \tag{25.6}$$

Remarque : La distinction faite entre espace et temps s'impose. En effet un champ $\Phi(x^i)$ est déterminé par sa configuration $\Phi(\vec{x})$ à chaque instant. L'action est donc une fonctionnelle de $\Phi_t(\vec{x})$ et $\partial_0\Phi|_t$ et le principe de moindre action permet de déterminer l'évolution de cette configuration entre deux instants donnés.

On obtient ainsi l'équation de Klein-Gordon du mouvement du champ Φ :

$$\Box\Phi - \frac{dV}{d\Phi} = 0 \quad \text{avec} \quad \Box\Phi \equiv D^iD_i\Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_i\left(\sqrt{-g}\partial^i\Phi\right). \tag{25.7}$$

(Exercice: montrer la dernière égalité en montrant d'abord que $dg = -gg_{ik}dg^{ik} = gg^{ik}dg_{ik}$.)

Il faut remarquer que la "covariantisation" d'une équation n'est pas toujours unique. Prenons l'exemple de l'équation de Klein-Gordon d'évolution d'un champ scalaire. En l'absence de guide expérimental, on peut très bien la généraliser par :

$$g^{ij}D_iD_j\Phi - \frac{dV}{d\Phi} - \xi R\Phi = 0 \tag{25.8}$$

où R est la courbure scalaire et ξ une constante arbitraire, ce qui revient à rajouter le terme $-\frac{1}{2}\xi\Phi^2 R$ à l'action S_c.

26. Tenseurs énergie-impulsion

Considérons un champ décrit par l'action (25.1) dans un repère inertiel en coordonnées minkowskiennes ($g_{ij} = \eta_{ij}, \sqrt{-g} = 1$). Alors la densité lagrangienne $\mathcal{L}(\Phi, \partial_i\Phi)$ ne dépend pas explicitement des x^i. Ceci traduit le fait que dans un repère minkowskien une configuration de champ ne doit pas dépendre de son lieu et moment d'ancrage, ni de son orientation dans l'espace. On a alors, en utilisant les équations du mouvement (25.7) (théorème de Noether) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^i} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi}\partial_i\Phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_j\Phi}\partial_i\partial_j\Phi = \partial_j\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_j\Phi}\Big)\partial_i\Phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_j\Phi}\partial_i\partial_j\Phi \\ &= \partial_j\Big(\partial_i\Phi\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_j\Phi}\Big).\end{aligned} \tag{26.1}$$

On peut ainsi définir un tenseur *énergie-impulsion* T_{ij}, conservé :

$$\frac{1}{c}T_i{}^j \equiv -\partial_i\Phi\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_j\Phi} + \delta_i^j\mathcal{L} \quad \text{avec} \quad \partial_j T_i{}^j = 0. \tag{26.2}$$

On trouve ainsi que les tenseurs énergie-impulsion d'un champ scalaire et électromagnétique sont respectivement (après symétrisation éventuelle par addition d'un terme de divergence nulle) :

$$\frac{1}{c}T_{ij} = \partial_i\Phi\partial_j\Phi - \eta_{ij}\left(\tfrac{1}{2}\partial_k\Phi\partial^k\Phi + V(\Phi)\right) \quad \text{et} \quad T_{ij} = \epsilon_0 c^2\left(-F_{ik}F^k{}_j - \tfrac{1}{4}\eta_{ij}F^{kl}F_{kl}\right), \tag{26.3}$$

où ϵ_0 est la “permittivité du vide” ($\epsilon_0\mu_0 c^2 = 1$). (Exercice : retrouver ces formules.) On vérifie par ailleurs facilement que ces tenseurs sont comme il se doit conservés si les équations d'évolution de Klein-Gordon ou de Maxwell (en dehors des charges) sont satisfaites. On peut ainsi interpréter T^{0i} comme la densité d'impulsion-énergie et $T^{\alpha\beta}$ comme le tenseur des contraintes du champ.

Dans le cas général où le repère est non-inertiel des forces d'inertie sont présentes et la densité lagrangienne $\sqrt{-g}\mathcal{L}$ dépend explicitement des x^i. Ceci étant, l'action étant un scalaire, elle doit être invariante dans un changement de coordonnées. Or, dans un changement de coordonnées infinitésimal, la configuration du champ change de $\delta\Phi$ et la métrique change de δg_{ij}. Cependant la variation de configuration du champ peut être ignorée car la variation de l'action qu'elle implique est nulle en vertu des équations de champ. Reste la contribution de δg_{ij}, et la variation de l'action dans un changement de coordonnées se réduit à :

$$\delta S_c = -\frac{1}{2c}\int T_{ij}\delta g^{ij}\sqrt{-g}\,d\Omega \quad \text{où} \quad -\frac{1}{2c}\sqrt{-g}\,T_{ij} \equiv \frac{\partial\sqrt{-g}\mathcal{L}}{\partial g^{ij}} - \partial_l\frac{\partial\sqrt{-g}\mathcal{L}}{\partial\partial_l g^{ij}}. \tag{26.4}$$

Nota : l'invariance de S_c dans un changement des quatre coordonnées, $\delta S_c = 0$, n'implique *pas* que $T_{ij} = 0$ car les dix δg_{ij} ne sont pas indépendants. En fait le changement infinitésimal $x^i \to x^i + \xi^i$ induit la variation $\delta g^{ij} = D^i\xi^j + D^j\xi^i$ (voir chapitre suivant) ; on a donc :

$$\delta S_c = -\frac{1}{c}\int T_{ij}D^i\xi^j\sqrt{-g}\,d\Omega = \frac{1}{c}\int D_i\left(T^i{}_j\xi^j\right)\sqrt{-g}\,d\Omega - \frac{1}{c}\int\left(D_iT^i{}_j\right)\xi^j\sqrt{-g}\,d\Omega = 0. \tag{26.5}$$

Le premier terme est l'intégrale de $\partial_i\left(T^i{}_j\xi^j\sqrt{-g}\right)$ et s'annule en vertu du théorème de Gauss. Le second doit être nul $\forall\xi^i$ et par conséquent :

$$D_iT^i{}_j = 0, \tag{26.7}$$

ce qui est la généralisation à tout repère de la loi de conservation (26.2). Ainsi donc le tenseur T_{ij} défini par (4) est-il bien le tenseur énergie-impulsion. D'ailleurs lorsque l'action est celle d'un champ scalaire ou électromagnétique on trouve :

$$\frac{1}{c}T_{ij} = \partial_i\Phi\partial_j\Phi - g_{ij}\Big(\frac{1}{2}g^{kl}\partial_k\Phi\partial_l\Phi + V(\Phi)\Big) \quad \text{et} \quad T_{ij} = \frac{1}{\mu_0}\left(-F_{il}F^l{}_j - \frac{1}{4}F_{lm}F^{lm}g_{ij}\right), \tag{26.6}$$

qui sont les versions manifestement covariantes des expressions trouvées plus haut.

Lorsque la matière maintenant est décrite comme un essaim de particules sans interaction plutôt que comme un champ, son action est la somme des actions individuelles :

$$\begin{aligned} S &= -\sum_a m_a c^2 \int d\tau_a = \int L\,dt \quad \text{avec} \quad L = -\sum_a m_a c^2 \left(-g_{00} - 2g_{0\alpha}v_a^\alpha/c - g_{\alpha\beta}v_a^\alpha v_a^\beta/c^2\right)^{1/2} \\ &= -\int \mu \frac{d\tau}{dt}\,d\Omega = -c\int \mu_0\sqrt{-g}\,d\Omega \quad \text{avec} \quad \mu = \sum_a m_a \delta(x^\alpha - x_a^\alpha) \quad \text{et} \quad \mu_0 = \frac{\mu}{\sqrt{-g}}\frac{d\tau}{c\,dt} \end{aligned} \tag{26.7}$$

où l'on a introduit la densité de masse μ, la distribution de Dirac δ étant telle que $\int \delta(x^\alpha)dV = 1$. Quant à μ_0, c'est la densité *propre* de masse, c-à-d la masse des particules, plus précisément des baryons, par unité de volume dans le repère inertiel où l'essaim est (momentanément) au repos. On peut de même définir le courant de masse $j^i = c\mu_0 u^i$. La conservation de la masse totale se traduit par $D_i j^i = 0$.

La densité lagrangienne du système est : $\sqrt{-g}\,\mathcal{L} = -\mu d\tau/dt = -\mu\left(-g_{ij}dx^i dx^j/dt^2\right)^{1/2}$. On peut donc lui associer, par la formule un tenseur énergie-impulsion T^{ij} covariantement conservé lorsque les équations du mouvement sont satisfaites :

$$T^{ij} = c\frac{\mu}{\sqrt{-g}}u^i u^j \frac{d\tau}{dt} = c^2\mu_0 u^i u^j \quad \text{tel que} \quad D_i T^{ij} = 0. \tag{26.8}$$

Dans un repère inertiel en coordonnées minkowskiennes la loi de conservation du tenseur énergie-impulsion se réduit à $\partial_i T^{ij} = 0$ et permet, par intégration sur tout l'espace, de définir des quantités conservées qui ne sont autres que l'impulsion totale et le tenseur moment cinétique du système. (Exercice : explicitez cette assertion.)

Si la matière enfin est décrite phénoménologiquement comme un fluide, il n'est guère pertinent d'obtenir son tenseur énergie-impulsion à partir d'un lagrangien (les descriptions lagrangiennes s'appliquant plutôt aux champs ou particules fondamentaux). (Cela est cependant possible, mais délicat.) Nous nous contenterons ici de noter que le tenseur énergie-impulsion peut toujours être décomposé selon :

$$T^{ij} = \epsilon_0 u^i u^j + (u^i q^j + u^j q^i) + \Pi^{ij} \tag{26.9}$$

où u^i est la quadri-vitesse de l'élément considéré et ϵ_0 la densité *d'énergie propre* totale (incluant la masse au repos et l'énergie thermodynamique interne) ; q^i, perpendiculaire à u^i ($q_i u^i = 0$), est la *densité d'impulsion* (appelée aussi *courant de chaleur*) ; Π^{ij} est le *tenseur des contraintes* que l'on peut décomposer plus avant selon :

$$\Pi^{ij} = \pi^{ij} + p_0 h^{ij} \tag{26.10}$$

où h^{ij} est le tenseur de projection : $h^{ij} = \eta^{ij} + u^i u^j$ ($\Rightarrow h^{ij}u_j = 0$) ; p_0 est la *pression isotropique* ; enfin π^{ij}, tel que $\pi^i{}_i = 0$ et $\pi^{ij}u_j = 0$ est la partie sans trace et anisotropique du tenseur des contraintes.

Un fluide est parfait si $q^i = 0$ et $\pi^{ij} = 0$. Son tenseur énergie-impulsion se réduit alors à :

$$T^{ij} = (\epsilon_0 + p_0)u^i u^j + p_0 g^{ij}. \tag{26.11}$$

Dans le repère où l'élément considéré est au repos ($u^i = 1, \vec{0}$) ses composantes non nulles sont $T^{00} = \epsilon_0$ et $T^{\alpha\alpha} = p_0$. Ainsi p_0 est la pression (isotrope) du fluide dans le repère où il est au repos. Lorqu'enfin pression et énergie interne peuvent être négligées, le tenseur énergie impulsion d'un fluide parfait se réduit à celui d'un essaim de particules.

Le tenseur énergie-impulsion doit être conservé : $D_i T^{ij} = 0$. En formant le produit scalaire de cette équation avec $u_k u_j + g_{kj}$ on obtient l'équation d'Euler relativiste en présence d'un champ de gravitation (encodé dans la dérivée covariante) :

$$(\epsilon_0 + p_0)\frac{Du_k}{d\tau} + \frac{dp}{d\tau}u_k + \partial_k p = 0. \tag{26.12}$$

27. Récapitulation

La relativité restreinte géométrise les forces d'inertie en les incorporant dans la dérivée covariante associée à l'espace-temps plat de Minkowski décrit dans un repère accéléré.

Le principe d'équivalence stipule qu'inertie=gravitation.

La gravitation est par ce principe incorporée dans une dérivation covariante associée à un espace plus général que celui de Minkowski, courbe. Einstein, aidé par le mathématicien Marcel Grossmann, choisit de représenter l'espace-temps "relatif, apparent et vulgaire" par une variété riemannienne munie d'une connexion de Levi-Civita, c.-à-d. dont les propriétés géométriques, dont sa courbure, se déduisent toutes de la donnée d'une métrique.

En l'absence de matière il n'y a pas de champ de gravitation et l'espace-temps qui représente cet univers vide est l'espace-temps plat de Minkowski. C'est la matière qui courbe l'espace-temps. Les équations de la gravitation doivent par conséquent relier géométrie et matière, i.e. le tenseur de Riemann (ou ses dérivés) à un objet géométrique décrivant la "gravité" de la matière.

L'objet tensoriel qui, en relativité restreinte, décrit complètement la matière est son tenseur énergie-impulsion, T_{ij}, deux fois covarian. Ses composantes dans un repère accéléré se déduisent de leurs expressions dans un repère inertiel par la transformation $\eta_{ij} \to \ell_{ij}$ et $\partial_i \to \tilde{D}_i$ où ℓ_{ij} sont les composantes de la métrique de Minkowski dans les coordonnées x^i et $\tilde{D}_i$ la dérivée covariante associée. En relativité générale, la métrique g_{ij} et la dérivée covariante de Levi-Civita associée D_i caractérisent à la fois le repère choisi et le champ de gravitation, *i.e.* la courbure de l'espace-temps. On est donc amené à décrire la matière par un tenseur énergie-impulsion T_{ij} déduit de son expression en relativité restreinte par le remplacement $\ell_{ij} \to g_{ij}$ et $\tilde{D}_i \to D_i$, qui respecte l'exigence du principe de relativité locale, remplacement parfois appelé "principe de correspondance" (par analogie au passage des crochets de Poisson au commutateurs en Mécanique Quantique).[27]

28. Les équations d'Einstein (1914-1916)

Un tenseur géométrique de même type que le tenseur énergie-impulsion est le tenseur de Ricci, $R_{ij} = R^a_{iaj}$. En 1914 Einstein propose donc comme équations de la gravitation : $R_{ij} \propto T_{ij}$. Ce sont bien là dix équations pour les dix composantes de la métrique g_{ij}. Mais on sait d'une part que les composantes de la métrique décrivent à la fois le champ de gravitation et le repère utilisé ; or le principe d'équivalence stipule que le choix du repère doit rester libre ; les équations doivent donc laisser indéterminées quatre des dix composantes g_{ij}. D'autre part les équations du mouvement de la matière découlent de la conservation du tenseur énergie-impulsion, *i.e.* de : $D_i T^i_j = 0$; les équations proposées restreignent donc la métrique, qui doit être telle que $D_i R^i_j = 0$. Bref,... elles sont fausses.

L'identité de Bianchi, $D_i G^i_j = 0$ où $G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R$ est le tenseur d'Einstein et $R = g^{ij} R_{ij}$ la courbure scalaire, résout tous les problèmes. Les équations finales proposées par Einstein en 1916 sont donc

$$G_{ij} + \Lambda g_{ij} = \kappa T_{ij} \,, \tag{28.1}$$

où la *constante d'Einstein* κ doit être reliée à la constante de Newton. Le terme proportionnel à la métrique peut être ajouté puisque $D_i g_{jk} = 0$. Λ est la *constante cosmologique*, au statut fluctuant ("la plus grande erreur de ma vie" disait Einstein, mais à la base de scénarios cosmologiques récents).

A la limite newtonienne[28] et en repère quasi-inertiel : $-g_{00} \sim 1 + 2U/c^2$, où U est le potentiel newtonien. Quant aux autres composantes de la métrique, elles sont du même ordre au moins. Les Γ sont donc d'ordre

[27] Il faut cependant noter que rien n'interdit, sauf le "principe de simplicité", d'ajouter à la définition de T_{ij} des termes proportionnels à la courbure, comme Rg_{ij}, R_{ij}, voire $D_{ij}R$..., voir plus haut.

[28] Il ne s'agit pas ici de retrouver toute la physique newtonienne, dans une limite de "champs faibles" et de "petites vitesses" à définir : les deux théories étant bâties sur des bases différentes, l'une ne saurait inclure l'autre. Il s'agit seulement de trouver, de la façon aussi intuitive et heuristique que l'on veut, la valeur numérique du coefficient de couplage κ.

$1/c^2$, et leurs dérivées temporelles d'ordre $1/c^3$. Par conséquent on a au plus bas ordre :

$$R_{00} \sim \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{00} \sim -\frac{1}{2}\partial_\alpha\left(g^{\alpha\beta}\partial_\beta g_{00}\right) \sim \frac{1}{c^2}\partial^\alpha\left(\frac{\partial U}{\partial x^\alpha}\right) \sim \frac{1}{c^2}\Delta U. \tag{28.2}$$

Le tenseur énergie-impulsion d'un fluide se réduit quant à lui à : $T^{00} \sim \varrho c^2$ où ϱ est la densité propre de masse. Ce sont là les seuls termes des tenseurs de Ricci et d'énergie-impulsion que nous ayons à calculer si l'on réécrit les équations d'Einstein, *sans* constante cosmologique, sous la forme : $R_{ij} = \kappa(T_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}T)$. Elles redonnent alors, à la limite des champs et vitesses faibles, l'équation de Poisson : $\Delta U = 4\pi G\varrho$ si

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}\,. \tag{28.3}$$

29. L'action du champ gravitationnel

Les équations qui déterminent le champ de gravitation en fonction de la matière présente peuvent aussi être déduites, à la Hilbert, d'un principe de moindre action. Comme le principe d'équivalence place sur un même pied forces de gravitation et d'inertie, c-à-d gravitation et géométrie, le champ de gravitation est identifié à la métrique de l'espace-temps. Le système, à savoir le champ tensoriel g_{ij}, est donc supposé être décrit par une intégrale d'action, S_g, quantité scalaire et invariante dans tout changement de coordonnées, fonctionnelle des états possibles du système, soit donc des g_{ij}. Comme la métrique doit être non plate pour décrire un champ de gravitation et non un simple champ d'inertie, cette action doit être fonction du tenseur de courbure. Mais si l'on impose que, comme d'habitude en théorie des champs, les équations obtenues par variation de S_g soient du second ordre en g_{ij}, il faut a priori que S_g ne contienne que des dérivées des g_{ij} premières au plus. Or un tel scalaire ne peut être qu'une constante, Λ. Tout autre scalaire peut en effet être annulé en tout point par un choix de système de coordonnées dans lequel les Γ^i_{jk}, soit donc les $\partial_i g_{jk}$, sont nuls, et un scalaire nul dans un système de coordonnées est nul dans tout autre.

Il existe cependant des scalaires ou *invariants de courbure*, dépendant donc nécessairement de dérivées au moins secondes des g_{ij}, qui néanmoins conduisent à des équations de champ du second ordre. Ainsi que le montra Elie Cartan le seul choix possible (en dimension 4 tout au moins) est :

$$S_g = \frac{c^3}{16\pi G}\int_{\mathcal{V}}(R - 2\Lambda)\sqrt{-g}\,d\Omega. \tag{19.1}$$

L'intégrale est prise sur une portion $\mathcal{V}$ de l'espace-temps, délimitée par une 3-surface $\partial\mathcal{V}$. G est une constante de couplage que l'on identifiera à la constante de Newton et Λ est la constante cosmologique. R est la courbure scalaire :

$$R = g^{ij}R_{ij} \quad , \quad R_{ij} = R^l_{ilj} = \partial_l\Gamma^l_{ij} - \partial_j\Gamma^l_{il} + \Gamma^l_{kl}\Gamma^k_{ij} - \Gamma^l_{kj}\Gamma^k_{il}. \tag{29.2}$$

Bien que R contienne des dérivées secondes des g_{ij}, elles n'apparaissent que linéairement et se regroupent en une divergence. On montre en effet (en utilisant les relations : $dg = -gg_{ik}dg^{ik}$ et $\partial_l g^{ik} = -\Gamma^i_{ml}g^{mk} - \Gamma^k_{ml}g^{im}$) que :

$$R\sqrt{-g} = \hat{G} + \partial_i\left(\sqrt{-g}w^i\right), \tag{29.3}$$

avec (*cf e.g.* Landau et Lifchitz pour le détail de la démonstration) :

$$\hat{G} = \sqrt{-g}g^{ik}\left(\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}\right). \tag{29.4}$$

Enfin :

$$w^i = g^{jk}\Gamma^i_{jk} - g^{ij}\Gamma^l_{jl}. \tag{29.5}$$

L'intégrale de la divergence se transforme en vertu du théorème de Gauss en une intégrale de surface. Si les variations des g_{ij} et de leurs dérivées sont prises nulles aux frontières $\partial\mathcal{V}$ du domaine d'intégration, on aura que $\delta\int R\sqrt{-g}\,d\Omega = \delta\int \hat{G}\,d\Omega$ et les équations de champ seront du second ordre comme voulu. (On remarquera que la relativité générale se démarque ici des théories de champ ordinaires où seules les variations des champs et non de leurs dérivées sont prises nulles aux bornes.)

30. Les équations d'Einstein bis

Donnons les grandes lignes du calcul de la variation de S_g en fonction de la métrique. On a d'abord :

$$\delta \int R\sqrt{-g}\, d\Omega = \delta \int \sqrt{-g} R_{ij} g^{ij}\, d\Omega = \int \sqrt{-g} \left(R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} \right) \delta g^{ij}\, d\Omega + \int \sqrt{-g} g^{ij} \delta R_{ij}\, d\Omega. \tag{30.1}$$

Pour calculer ensuite $g^{ij}\delta R_{ij}$ on se place dans un repère où les Γ^i_{jk} sont nuls et, vu (29.3), on l'écrit sous forme d'une divergence : $g^{ij}\delta R_{ij} = \partial_l k^l$. Cette égalité vectorielle se généralise à tout repère en : $g^{ij}\delta R_{ij} = D_l k^l$, soit encore :

$$\sqrt{-g} g^{ij} \delta R_{ij} = \partial_l \hat{k}^l \quad \text{avec} \quad \hat{k}^l = \sqrt{-g} \left(g^{jk} \delta \Gamma^l_{jk} - g^{il} \delta \Gamma^j_{ij} \right). \tag{30.2}$$

Ainsi donc le dernier terme de (1) s'évanouit en vertu du théorème de Gauss si les variations des $\partial_l g_{ij}$ sont prises nulles aux frontières $\partial \mathcal{V}$ du domaine d'intégration, et l'on obtient en fin de compte :

$$\delta S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int \sqrt{-g} \left(R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} \right) \delta g^{ij}\, d\Omega. \tag{30.3}$$

Comme $\delta \int R\sqrt{-g}\, d\Omega = \delta \int \hat{G}\, d\Omega$, on déduit de (3) les utiles égalités :

$$\int \sqrt{-g} G_{ij} \delta g^{ij} d\Omega = \int \left(\frac{\partial \hat{G}}{\partial g^{ij}} - \partial_k \frac{\partial \hat{G}}{\partial \partial_k g^{ij}} \right) \delta g^{ij} d\Omega \tag{30.4}$$

$$\int \sqrt{-g} G^{ij} \delta g_{ij} d\Omega = - \int \left(\frac{\partial \hat{G}}{\partial g_{ij}} - \partial_k \frac{\partial \hat{G}}{\partial \partial_k g_{ij}} \right) \delta g_{ij} d\Omega, \tag{30.5}$$

où on a introduit le tenseur d'Einstein : $G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R$.

Considérons maintenant la source du champ gravitationnel, un champ de matière (électromagnétique par exemple), décrit par l'action S_m. Ce champ possèdant une énergie, soit encore une masse, détermine la métrique de l'espace-temps, métrique qui agit en retour sur son évolution. L'action totale décrivant le système (gravitation plus matière) est donc : $S = S_m + S_g$. L'extrémisation de S par rapport au champ de matière donne ses équations du mouvement (les équations de Maxwell—en dehors des charges—par exemple). Son extrémisation par rapport au champ gravitationnel g_{ij} conduira aux équations d'Einstein. Nous avons donné l'expression de $\delta S_g / \delta g_{ij}$. Reste à calculer $\delta S_m / \delta g_{ij}$: voir plus haut ; on obtient :

$$\delta S_m = -\frac{1}{2c} \int T_{ij} \delta g^{ij} \sqrt{-g}\, d\Omega = \frac{1}{2c} \int T^{ij} \delta g_{ij} \sqrt{-g}\, d\Omega \tag{30.6}$$

avec :

$$-\frac{1}{2c} \sqrt{-g}\, T_{ij} \equiv \frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial g^{ij}} - \partial_l \frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial \partial_l g^{ij}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2c} \sqrt{-g}\, T^{ij} \equiv \frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial g_{ij}} - \partial_l \frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial \partial_l g_{ij}}. \tag{30.7}$$

$T_{ij} (= g_{ik} g_{jl} T^{kl})$ est le tenseur d'énergie-impulsion du champ. Ce tenseur possède, nous l'avons vu, la propriété d'être conservé, c-à-d $D_i T^{ij} = 0$, si les équations d'évolution, e.g. de Klein-Gordon, de Maxwell (en dehors des charges) ou d'Euler sont satisfaites.

L'extrémisation de l'intégrale d'action $S_g + S_m$ conduit donc ainsi aussi aux équations d'Einstein pour le champ de gravitation :

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} (R - 2\Lambda) = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij} \tag{30.7}$$

qui égalent le tenseur d'Einstein, décrivant la courbure de l'espace-temps, au tenseur d'énergie-impulsion de la matière (qui lui-même dépend du champ gravitationnel g_{ij}.

Problème de Cauchy*

31. Introduction[29]

Les équations d'Einstein forment un ensemble de 10 équations du second ordre aux dérivées partielles, non linéaires. Le système de coordonnées peut être choisi arbitrairement. En transformant les quatre x^i on peut ainsi assigner n'importe quelle valeur à quatre des g_{ij}. Le tenseur métrique a donc six composantes indépendantes. Quant à la matière (cf e.g. un fluide parfait) elle est déterminée par sa quadri-vitesse u^i sujette à $u_i u^i = -1$ et par sa densité d'énergie (ou pression). Ainsi donc nous avons 10 équations pour 10 inconnues. Dans le vide il n'y a que 6 g_{ij} à déterminer ; mais il n'y a alors que 6 équations d'Einstein indépendantes, en vertu des identités de Bianchi ($D_i G^{ij} = 0$). Il y a donc autant d'équations que d'inconnues.

En vertu des identités de Bianchi et comme $D_i g_{jk} = 0$, le tenseur T^{ij} doit donc aussi être conservé. Les équations du mouvement de la matière (e.g. les équations de Maxwell dans le vide, de Klein-Gordon ou d'Euler) sont par conséquent incluses dans les équations d'Einstein. En cela la relativité générale se démarque de l'électromagnétisme par exemple où l'équation de Lorentz qui détermine le mouvement des charges n'est pas incluse dans les équations de Maxwell.

La structure mathématique des équations d'Einstein est donc complexe, même dans le vide. Quelques solutions exactes sont connues—Schwarzschild, Kerr, Robertson-Walker,...—mais elles sont très particulières. La solution exacte du problème à deux corps par exemple, version relativiste du problème de Kepler, n'est pas connue. On ne sait pas même si elle existe, car on ignore si les algorithmes d'approximation proposés donnent des séries asymptotiques à la solution.

Résoudre le *problème de Cauchy*, un point crucial pour la relativité numérique, est de décider si la donnée du champ g_{ij} et de ses dérivées sur une hypersurface du genre espace suffit à déterminer uniquement son évolution ultérieure. (Lorsque la surface est du genre lumière le problème s'appelle *caractéristique* : nous ne l'aborderons pas ici et renvoyons à e.g. J. Stewart *Advanced General Relativity*.)

32. Un théorème de Leray

Soit un champ $\phi(x^i)$ satisfaisant à une équation d'évolution. Prenons l'exemple d'un champ scalaire dans l'espace-temps de Minkowski, satisfaisant à l'équation de Klein-Gordon $\eta^{ij}\partial_i\partial_j\phi - m^2\phi = 0$. Considérons l'hypersurface Σ définie par $t = 0$ et donnons-nous sur Σ les *données de Cauchy* C^∞ $\phi(0,\vec{x})$ et $\partial_t\phi(0,\vec{x})$. L'équation de KLein-Gordon nous donne alors la valeur de la dérivée seconde de ϕ sur Σ :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(0,\vec{x}) = \triangle\phi(0,\vec{x}) - m^2\phi(0,\vec{x}). \tag{32.1}$$

Par itération nous obtiendrons toutes les dérivées de ϕ en $t = 0$ et pourrons ainsi construire $\phi(t,\vec{x})$ par sommation de la série de Taylor, à condition que cette série converge. Cauchy et Kowaleskaya montrèrent que c'était le cas, et que la solution était unique, quand, de manière plus générale, l'équation d'évolution était analytique dans ses variables *et si* $f(\vec{x}) = \phi(0,\vec{x})$ et $g(\vec{x}) = \partial_t\phi(0\vec{x})$ étaient des *fonctions analytiques*. (On trouvera la démonstration de ce théorème dans e.g. Courant et Hilbert, 1962, *Methods of Mathematical Physics, II* Chap.1,7.)

La restriction à des données de Cauchy analytiques est trop forte. Par ailleurs ce théorème ne dit rien sur la stabilité des solutions à savoir : les solutions issues de conditions initiales "proches" sont-elles proches ? Enfin il ne permet pas de déterminer si le champ se propage causalement, une question que l'on peut formuler ainsi : soient deux ensembles de données de Cauchy ne différant que dans un volume fini S de Σ ; les deux solutions qui en sont issues sont-elles les mêmes en dehors du cône futur issu de S ?

Pour se libérer des conditions d'analyticité, et assurer la stabilité et la propagation causale des solutions, il faut introduire les notions de norme et d'espaces de Sobolev (cf e.g. le Wald) et surtout utiliser la linéarité ainsi que le caractère hyperbolique de l'équation de Klein-Gordon. (Une équation du second ordre est hyperbolique si les dérivées secondes se regroupent en un terme de la forme : $g^{ij}D_iD_j\phi$ où g^{ij} est une métrique *lorentzienne* et D_i la dérivée covariante associée.) On peut montrer alors que le problème de

[29] Les parties ou sections marquées d'une étoile ne sont que des introductions aux sujets évoqués, ni rigoureuses ni complètes.

Cauchy pour tout système d'équations aux dérivées partielles du second ordre, *linéaire* et hyperbolique du type :

$$g^{ij}D_iD_j\phi + A^iD_i\phi + B\phi + C = 0, \tag{32.2}$$

où A^i, B et C sont un vecteur et deux fonctions arbitraires, est *bien posé*, c-à-d que, étant données des données de Cauchy lisses, la solution est unique, dépend de façon continue des données de Cauchy et est causale au sens indiqué ci-dessus. (On trouvera la démonstration de ce théorème dans e.g. le Hawking and Ellis.)

La condition de linéarité est trop forte. Les systèmes d'équations aux dérivées partielles complètement non-linéaires sont mal connus, mais si le système est du second ordre, hyperbolique et quasi-linéaire, c-à-d de la forme :

$$g^{ij}(x^k, \phi, \partial_k\phi)D_iD_j\phi = F(x, \phi, \partial_k\phi), \tag{32.3}$$

il existe un théorème dû à Leray (1952) qui dit que si $\tilde{\phi}$ est une solution de (3) pour certaines données de Cauchy alors le problème de Cauchy est bien posé pour toutes données de Cauchy *"suffisamment" proches* des précédentes. (On trouvera la démonstration de ce théorème ainsi que la signification précise de "suffisamment proche" dans e.g. le Hawking and Ellis.)

Remarque : nous verrons que l'on peut réduire les équations d'Einstein à un système du type (3). Il sera donc possible d'affirmer l'existence de solutions "suffisamment proches" de l'espace-temps plat, mais le problème de Cauchy, dans le cas général, n'est pas résolu : on ignore si des données de Cauchy lisses arbitraires (satisfaisant éventuellement à des contraintes—*cf* plus bas) déterminent une solution des équations d'Einstein *globale*, unique, dépendant de façon continue des données initiale et causale (voir cependant les travaux récents de Christodoulou, Klainerman et al.).

33. Invariance de jauge et contraintes

Considérons, dans M_4, les équations de Maxwell du vide pour le potentiel électromagnétique A^i : $\partial_i\partial_j(\eta^{ij}A^k - \eta^{ik}A^j) = 0$. Elles ne sont *pas* du type (32.3) et donc le problème de Cauchy est a priori mal posé en électromagnétisme. La raison en est qu'on peut les réécrire sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \triangle A_0 \tag{33.1}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = \triangle\vec{A} + \vec{\nabla}\left(\partial_0 A_0 - \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right). \tag{33.2}$$

On voit ainsi que les équations de Maxwell ne déterminent pas la composante A^0 du potentiel qui peut être choisie arbitrairement. Mais une fois A^0 choisi, $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ est alors contraint par (1). En électromagnétisme, le problème de Cauchy se scinde donc en deux : celui des conditions initiales, i.e. trouver des données de Cauchy qui satisfassent à la contrainte, équation (1) ; et celui de l'évolution, i.e. intégrer (2) avec comme conditions initiales la solution du problème précédent. Ayant ainsi obtenu la solution sur l'hypersurface t, on a que la contrainte y est automatiquement satisfaites (en effet la dérivée temporelle de (1) est (2)) ; ceci permet par exemple de vérifier la convergence des algorithmes d'intégration numérique. Réciproquement si la contrainte est satisfaite pour tout t alors l'équation d'évolution est automatiquement satisfaite.

Pour s'assurer maintenant que le problème de Cauchy est bien posé on décompose les équations de Maxwell en une *condition de jauge* (qui ne la fixe pas nécessairement complètement) et une équation d'évolution. Par exemple, on a, dans la jauge de Lorentz :

$$\partial_i A^i = 0 \qquad \text{et} \qquad \eta^{ij}\partial_i\partial_j A^k = 0. \tag{33.3}$$

où l'équation dévolution est du type (32.3) pour lesquelles le problème de Cauchy est bien posé.

Le lien entre invariance de jauge et contrainte est transparent lorsqu'on décompose le 3-vecteur A_α en une partie "scalaire" A et une partie sans divergence $\bar{A}_\alpha$: $A_\alpha = \partial_\alpha A + \bar{A}_\alpha$ (avec $\partial_\alpha\bar{A}^\alpha = 0$). Les équations de Maxwell du vide se réécrivent alors sous la forme :

$$\triangle\Phi = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{A}_\alpha = \triangle\bar{A}_\alpha \tag{33.4}$$

où $\Phi \equiv A_0 - \partial_t A$ et $\bar{A}_\alpha$ sont des grandeurs invariantes dans les transformations de jauge : $A^i \to A^i - \partial_i f$, f étant une fonction quelconque des coordonnées, qui laissent les équations de Maxwell inchangées. On voit donc ainsi que si les équations de Maxwell forment a priori un système de 4 équations pour les 4 composantes A^i, leur invariance de jauge implique d'une part qu'elles peuvent se réécrire comme un jeu de 3 équations pour 3 grandeurs invariantes, et d'autre part qu'une de ces trois équations est une contrainte, de sorte que le problème de Cauchy ne se pose que pour les deux degrés de liberté dynamique restant (il se pose alors "bien").

Dans le cas de la relativité générale le problème se pose de façon analogue (cf e.g. le Lichnérowicz). Considérons dans la variété à bâtir une hypersurface "$t = 0$". On notera $C_{ij}(0)$ toute combinaison des données de Cauchy $g_{ij}(0)$ et $\partial_k g_{ij}(0)$. Les équations d'Einstein du vide en $t = 0$ s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2} g^{00} \partial_{00} g_{\alpha\beta} + C_{\alpha\beta} = 0 \\ R_{\alpha 0} &= +\frac{1}{2} g^{\beta 0} \partial_{00} g_{\alpha\beta} + C_{\alpha 0} = 0 \\ R_{00} &= -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_{00} g_{\alpha\beta} + C_{00} = 0. \end{aligned} \tag{33.5}$$

On voit que ni $\partial_{00} g_{00}$ ni $\partial_{00} g_{0\alpha}$ n'apparaissent, et que les composantes du tenseur d'Einstein : $G^0_\alpha = g^{0\beta} R_{\alpha\beta} + g^{00} R_{\alpha 0}$ et $G^0_0 = \frac{1}{2}\left(g^{00} R_{00} - g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}\right)$ ne dépendent que des données de Cauchy—tout comme l'équation (1). On peut donc se donner arbitrairement g_{00} et $g_{0\alpha}$ mais il existe 4 équations de contraintes sur les données de Cauchy. Comme en électromagnétisme donc le problème se scinde en deux : trouver des données de Cauchy qui satisfassent aux contraintes puis résoudre les équations d'évolution. On peut montrer de même, à l'aide des identités de Bianchi, que si les contraintes sont satisfaites initialement, elles le sont toujours.

Pour voir maintenant si le problème de Cauchy est bien posé, on procède comme en électromagnétisme, en décomposant les équations d'Einstein en des conditions de jauge et des équations d'évolution (Y. Choquet-Bruhat, 1962). Dans la jauge *harmonique* : $D_i D^i x^j = 0$, qui implique $\partial_i\left(\sqrt{-g} g^{ij}\right) = 0$, les équations d'Einstein se réduisent à un système d'équations du type (4). Ainsi donc le problème de Cauchy est-il bien posé, du moins localement.

En électromagnétisme, nous avions franchi une ultime étape en écrivant les équations de Maxwell comme 1 équation de contrainte plus 2 équations d'évolution pour 3 grandeurs invariantes de jauge. Une opération analogue en relativité générale devrait nous permettre d'identifier 6 grandeurs indépendantes du sytème de coordonnées et d'écrire les équations d'Einstein sous la forme de 4 équations de contraintes plus 2 équations d'évolution. Mais une différence essentielle entre les deux théories est que les équations de contraintes sont non-linéaires en relativité. On ne sait pas les résoudre dans le cas général ce qui interdit d'isoler les vrais degrés de liberté (cf cependant l'approche d'Ashtekar). C'est là un des obstacles à la quantification du champ gravitationnel.

Théorèmes sur les singularités*

34. Qu'est-ce qu'une singularité ?

Dans une théorie où l'espace-temps (M_4 par exemple) est donné a priori, cela a un sens de dire que le potentiel de Coulomb (par exemple) diverge "en $r = 0$", car le point $r = 0 \in M_4$. En relativité générale aussi ce n'est qu'après s'être donné la variété riemannienne représentant l'espace-temps que l'on peut définir la notion d'événement, i.e. de point, de lieu et de temps. Or en relativité générale une singularité est une singularité de la variété elle-même et non pas seulement des grandeurs qui y sont définies. Par conséquent si la variété a un comportement pathologique dans une région, e.g. la courbure y diverge, l'"endroit" "où" la pathologie se "situe" n'est *pas* un événement de la variété : c'en est plutôt un "trou".

On peut essayer de contourner la difficulté en étendant la notion de variété de sorte à y inclure ces "trous". Cela est facile dans certains cas (e.g. les espaces-temps de Schwarzschild ou de Friedmann), mais la question devient alors de les caractériser. Imposer que les invariants de courbure, indépendants des systèmes de coordonnées, comme la courbure scalaire R ou les carrés des tenseurs de Ricci, $R_{ij}R^{ij}$, ou Riemann,

$R_{ijkl}R^{ijkl}$, y divergent est peut-être suffisant mais pas nécessaire. Ainsi les solutions du vide des équations d'Einstein ont-elles toutes une courbure scalaire et un tenseur de Ricci identiquement nuls : elles peuvent cependant être singulières, si, par exemple $R_{ijkl}R^{ijkl}$ diverge (cas de l'espace-temps de Schwarzschild). Mais la divergence de $R_{ijkl}R^{ijkl}$ n'est pas nécessaire ; il existe en effet des solutions (du type onde gravitationnelle) pour lesquelles $R_{ijkl}R^{ijkl} \equiv 0$ alors que le tenseur de Riemann lui-même diverge. Une telle approche s'avère donc infructueuse.

La ligne d'attaque adoptée par Roger Penrose et Stephen Hawking (1965-1970) a consisté à définir une variété singulière par le fait qu'il y existe au moins une géodésique du genre temps ou nulle qui soit incomplète, c-à-d dont la longueur propre est finie, et ne peut être prolongée.

Nota : cette définition n'est cependant pas entièrement satisfaisante. En effet on peut construire des espaces-temps où toutes les géodésiques du genre temps ou nul sont complètes mais où il existe des géodésiques du genre espace incomplètes ou des trajectoires accélérées du genre temps de longueur propre finie.

35. Congruences géodésiques

La détermination de la (non)-singularité d'un espace-temps au sens de Penrose et Hawking passe par l'étude du comportement des géodésiques.

Une *congruence* est un ensemble de courbes tel qu'en chaque point de la variété il passe une et une seule courbe de l'ensemble. Considérons une congruence de géodésiques de genre temps, de vecteurs tangents $\xi^i, (\xi_i\xi^i = -1)$. Définissons le tenseur :

$$B_{ij} = D_j\xi_i. \tag{35.1}$$

Comme la congruence est géodésique et ξ^i est unitaire, il satisfait à : $\xi^i B_{ij} = \xi^i B_{ji} = 0$. On peut alors le décomposer selon :

$$B_{ij} = \tfrac{1}{3}\theta h_{ij} + \sigma_{ij} + \omega_{ij} \tag{35.2}$$

où $h_{ij} \equiv g_{ij} + \xi_i\xi_j$ (ainsi $h^i{}_j = g^{ik}h_{kj}$ est l'opérateur qui projette tout tenseur sur le sous-espace de l'espace tangent perpendiculaire à ξ^i ; $\theta \equiv B^{ij}h_{ij}$ est l'*expansion* de la congruence, $\sigma_{ij} \equiv B_{(ij)} - \frac{1}{3}\theta h_{ij}$ en est le *cisaillement* et $\omega_{ij} \equiv B_{[ij]}$ la *rotation*.

Remarque : se donner une congruence n'implique pas nécessairement qu'il existe une famille d'hypersurfaces qui lui soit orthogonale. On peut montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une congruence géodésique soit perpendiculaire à une famille de surfaces est qu'elle soit sans rotation : $\omega_{ij} = 0$, ce que nous supposerons par la suite. (C'est là une version restreinte du théorème de Frobenius qui donne la CNS pour qu'un champ de vecteur soit orthogonal à une hypersurface : $\xi_{[i}D_j\xi_{k]} = 0$.) Le tenseur B_{ij} s'appelle alors la *courbure extrinsèque* de la surface. On note souvent $B_{ij} = K_{ij}$ et $K = g^{ij}K_{ij} \equiv \theta$. (Exemple : la courbure extrinsèque des surfaces $t = const$ d'un univers de Friedmann est $K_{00} = K_{0\alpha} = 0; K_{\alpha\beta} = -a\dot{a}\delta_{\alpha\beta}$.)

La variation de B_{ij} le long d'une géodésique est donnée par :

$$\begin{aligned}
\xi^k D_k B_{ij} &= \xi^k D_k D_j \xi_i = \xi^k D_j D_k \xi_i - R^l{}_{ikj}\xi_l\xi^k \\
&= D_j\left(\xi^k D_k \xi^i\right) - \left(D_j\xi^k\right) D_k\xi_i - R^l{}_{ikj}\xi_l\xi^k \\
&= -B^k{}_j B_{ik} - R^l{}_{ikj}\xi_l\xi^k.
\end{aligned} \tag{35.3}$$

Prenons-en la trace :

$$\xi^k D_k\theta \equiv \frac{d\theta}{d\tau} = -\tfrac{1}{3}\theta^2 - \sigma_{ij}\sigma^{ij} + \omega_{ij}\omega^{ij} - R_{ij}\xi^i\xi^j. \tag{35.4}$$

C'est l'équation de Raychaudhuri. Les deux premiers termes du membre de droite sont manifestement non positifs : le troisième est nul si la congruence est orthogonale à des surfaces. Quant au dernier il se réécrit, en utilisant les équations d'Einstein :

$$R_{ij}\xi^i\xi^j = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{ij}\xi^i\xi^j + \tfrac{1}{2}T\right), \tag{35.5}$$

où T_{ij} est le tenseur énergie-impulsion de la matière présente.

Supposons que la matière soit un fluide parfait (les cas plus généraux se traitent de manière analogue) : $T_{ij} = (\varrho + p)u_i u_j + p g_{ij}$. Alors la condition : $T_{ij}\xi^i\xi^j \geq 0$, dite *condition faible sur l'énergie*, est équivalente à : $\varrho \geq 0$ et $\varrho + p \geq 0$: quant à la condition : $R_{ij}\xi^i\xi^j \geq 0$, dite *condition forte sur l'énergie*, elle équivaut à :

$$\varrho + 3p \geq 0 \quad , \quad \varrho + p \geq 0. \tag{35.6}$$

Toute matière "standard" de laboratoire satisfait à la condition forte sur l'énergie. On déduit donc de l'équation de Raychauduri que :

$$\frac{d\theta}{d\tau} + \tfrac{1}{3}\theta^2 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\theta(\tau)} \geq \frac{1}{\theta_0} + \tfrac{1}{3}\tau. \tag{35.7}$$

Supposons maintenant que $\theta_0 < 0$, c-à-d que la congruence soit initialement convergente. Alors nécessairement, en un temps propre $\tau \leq 3/|\theta_0|$, $1/\theta$ doit passer par zéro, i.e. θ doit diverger. (Nota : on démontre un résultat analogue pour les congruences de géodésiques nulles.)

Une divergence de θ n'indique cependant qu'une pathologie de la congruence, qui peut être l'apparition d'une simple caustique, et non nécessairement une singularité dans la structure de l'espace-temps. Afin de démontrer les théorèmes sur les singularités des notions supplémentaires doivent donc être introduites.

36. Théorèmes intermédiaires

Soit γ une géodésique de vecteur tangent v^i ; une solution η^i de l'équation de déviation géodésique : $v^i D_i\left(v^j D_j \eta^k\right) = -R^k{}_{lij}\eta^j v^l v^i$ est appelée un *champ de Jacobi* ; et deux points p et q de γ sont dits *conjugués* s'il existe un champ de Jacobi qui s'annulle en p et q (un exemple de tels points sont les pôles nord et sud de la sphère). On peut alors démontrer le théorème suivant :

(1) Si (M, g_{ij}) est un espace-temps satisfaisant à la condition $R_{ij}\xi^i\xi^j \geq 0$ pour tout vecteur ξ^i du genre temps, si Σ est une hypersurface du genre espace telle que $K = \theta < 0$ en $q \in \Sigma$; alors à une distance $\tau \leq 3/|K|$ il existe un point p conjugué de Σ le long de la géodésique orthogonale à Σ passant par q—à condition cependant que γ puisse être prolongée jusque là.

Il faut à ce stade introduire la notion d'espace globalement hyperbolique. Par définition c'est un espace-temps qui possède une surface de Cauchy—dont une définition restreinte est d'être une hypersurface du genre espace telle que tous les cônes de lumière futurs et passés qui en sont issus couvrent l'ensemble de la variété. Remarque : la définition donnée ici d'un espace-temps globalement hyperbolique est celle donnée par R. Wald ; elle diffère de la définition originelle de Leray (1952) et de celle de Hawking & Ellis (1973) mais on peut montrer qu'elle leur est équivalente.

Enfin on appelle $\mathcal{C}(\Sigma, p)$ l'ensemble des courbes λ causales (du genre temps ou nul) issues de Σ et aboutissant en p. Si λ est continue (C^1), on définit sa longueur par $\tau = \int \left(-T_i T^i\right)^{1/2} dt$ où $T = \partial/\partial t$ est le vecteur tangent à λ.

On peut alors démontrer les théorèmes (2) et (3) suivants :

(2) Soit (M, g_{ij}) un espace-temps globalement hyperbolique, soit $p \in M$ et Σ une surface de Cauchy ; pour que $\gamma \in \mathcal{C}(\Sigma, p)$ soit de longueur τ maximale il est nécessaire qu'elle soit une géodésique orthogonale à Σ sans point conjugué entre Σ et p. Remarque : ce théorème ne dit pas que τ doit atteindre cette valeur maximale.

(3) Soit (M, g_{ij}) un espace-temps globalement hyperbolique. Soit $p \in M$ et Σ une surface de Cauchy. Alors il existe une courbe γ de $\mathcal{C}(\Sigma, p)$ pour laquelle τ atteint sa valeur maximale sur $\mathcal{C}(\Sigma, p)$.

37. Exemples de théorèmes sur les singularités

En admettant les théorèmes (1), (2) et (3) énoncés ci-dessus on peut démontrer le théorème suivant :

Soit (M, g_{ij}) un espace-temps globalement hyperbolique tel que $R_{ij}\xi^i\xi^j \geq 0$ pour tout ξ^i du genre temps. Supposons qu'il contienne une hypersurface de Cauchy Σ dont la trace K de la courbure extrinsèque, pour la congruence des géodésiques normales dirigées vers le passé, est telle que $K \leq C < O$ partout, où C est une constante. Alors il n'existe pas de courbe du genre temps orientée vers le passé issue de Σ qui ait une longueur supérieure à $3/|C|$. En particulier toutes les géodésiques du genre temps orientées vers le passé sont incomplètes.

Preuve : supposons en effet qu'il existe une courbe λ du genre temps orientée vers le passé dont la longueur soit supérieure à $3/|C|$. Soit alors p un point au-delà de $3/|C|$ sur λ. Par le théorème (3) il existe une courbe de longueur maximale γ de Σ à p dont la longueur doit être supérieure à $3/|C|$. Par le théorème (2) ce doit être une géodésique sans point conjugué entre Σ et p. Mais cela contredit le théorème (1) qui dit que γ doit avoir un point conjugué entre Σ et p. Par conséquernt la courbe γ n'existe pas.

Ce théorème, le plus facile à démontrer, est assez faible. Non seulement la condition forte sur l'énergie doit être satisfaite partout mais l'espace-temps doit être globalement hyperbolique. Ce fut l'œuvre de Penrose et Hawking de démontrer l'apparition de singularités sous des hypothèses moins fortes. Nous ne citerons ici que le théorème final (Hawking-Penrose 1970), qui élimine quasiment toutes les hypothèse mal-venues :

Supposons qu'un espace-temps (M, g_{ij}) satisfasse aux quatre conditions suivantes :

(1) $R_{ij}v^iv^j \geq 0$ pour tout vecteur du genre espace ou nul ;

(2) la condition dite générique est satisfaite, i.e., toute géodésique du genre temps ou nul possède au moins un point où $R_{ijkl}\xi^k\xi^l \neq 0$;

(3) il n'y pas de courbe du genre temps fermée. (Remarque : c'est là une condition beaucoup moins forte que celle d'hyperbolicité globale.)

(4) enfin l'une des trois propriétés suivantes est vraie :

– (M, g_{ij}) est une variété fermée,

– (M, g_{ij}) possède une surface “piégée”, c-à-d une surface bi-dimensionnelle dont l'expansion θ est négative pour les géodésiques du genre temps et nul dirigées *à la fois* vers le passé et le futur. (Un exemple de telle surface est l'horizon d'un trou noir.)

– il existe un point $p \in M$ tel que l'expansion θ de la congruence de géodésiques nulles dirigées vers le futur (ou le passé) issues de p devienne négative ;

Alors (M, g_{ij}) doit contenir au moins une géodésique du genre temps ou nulle incomplète.

Tables des matières

LA THEORIE D'EINSTEIN DE LA GRAVITATION

Relativité générale, gravitation et courbure