Nathalie Deruelle

ONDES GRAVITATIONNELLES

et

MECANIQUE CELESTE RELATIVISTE

Notes provisoires

`Les Ondes Gravitationnelles`

1. Les ondes électromagnétiques

1. Invariance de jauge et ondes électromagnétiques

• *L'action de charges et de leur champ*

Nous tiendrons pour connu le fait que l'action de charges $e = \int \varrho dV$, de masse m, et du champ électromagnétique créé par ces charges, est la somme $S = S_{(p)} + S_{(i)} + S_{(c)}$ où l'action $S_{(p)}$ des charges est $S_{(p)} = -mc^2 \int d\tau$, τ étant le temps propre le long des trajectoires des charges ; l'action d'interaction $S_{(i)}$ et celle du champ $S_{(c)}$ sont données, dans un référentiel inertiel, par :

$$S_{(i)} = \sum \frac{e}{c} \int A_i dx^i = \frac{1}{c^2} \int A_i j^i d\Omega \qquad , \qquad S_{(c)} = -\frac{1}{4\mu_0 c} \int F_{ij} F^{ij} d\Omega, \tag{4.1.1}$$

où A_i est le potentiel du champ électromagnétique, $F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$ son tenseur, où $j^i = \varrho \frac{dx^i}{dt}$ est le courant de charge, μ_0 une constante de couplage, et $d\Omega \equiv dx^0 dV$.

• *Les équations de Lorentz et de Maxwell*

L'extrémisation de S par rapport aux variations de chemin δx^i et de configuration δA_i conduit aux équations de Lorentz et de Maxwell :

$$mc\frac{du^i}{d\tau} = eF^{ij} u_j \qquad , \qquad \partial_j F^{ij} = \frac{\mu_0}{c} j^i. \tag{4.1.2}$$

• *Invariance de jauge et conservation de la charge*

L'action du champ électromagnétique $S_{(c)}$ est invariante dans la transformation de *jauge* : $A_i \to A_i - \partial_i f$ (f quelconque), qui laisse inchangé le tenseur, antisymétrique, du champ électromagnétique F_{ij}. On peut donc choisir arbitrairement une composante du potentiel, A_0 par exemple. Pour que l'action totale soit invariante de jauge, il faut que $S_{(i)}$ le soit aussi. Cette condition s'écrit :

$$0 = c^2 [S_{(i)}(A_i - \partial_i f) - S_{(i)}(A_i)] = -\int j^i \partial_i f \, d\Omega = -\int \partial_i \left(f j^i\right) \, d\Omega + \int f \partial_i j^i \, d\Omega. \tag{4.1.3}$$

Le premier terme s'évanouit en vertu du théorème de Gauss ; le second doit être nul $\forall f$ et donc :

$$\partial_i j^i = 0, \tag{4.1.4}$$

qui exprime la conservation du courant (et est aussi une conséquence de l'équation de Lorentz (4.1.2), toujours en raison de l'antisymétrie de F_{ij}). Une intégration sur tout l'espace donne : $\int dV \, \partial_0 j^0 + \int dV \, \partial_\alpha j^\alpha = 0$. Le second terme est nul en vertu du théorème de Gauss et de la condition d'absence de charges à l'infini. Par conséquent, en utilisant la définition du courant, on obtient que la charge totale du système est constante :

$$\frac{1}{c}\int dV\, j^0 = \int dV\, \varrho = e. \tag{4.1.5}$$

C'est là une version du *théorème de Noether* : à toute invariance de l'action (ici de jauge) est associée une grandeur conservée (ici la charge).

• *Action invariante de jauge*

L'électromagnétisme étant une théorie linéaire, il est possible de la formuler sous forme manifestement invariante de jauge. En effet les composantes spatiales du vecteur potentiel A_i peuvent toujours s'écrire sous la forme : $A_\alpha = \partial_\alpha A + \bar{A}_\alpha$, où A est une fonction et $\bar{A}_\alpha$ un 3-vecteur sans divergence ($\partial_\alpha \bar{A}^\alpha = 0$) ; on décompose de même le vecteur courant : $j_i = (j_0, j_\alpha)$ où $j_\alpha = \partial_\alpha j + \daleth_\alpha$ avec $\partial_\alpha \daleth^\alpha = 0$. Dans la terminologie de Bardeen (1980) on décompose ainsi A_i (et j_i) en 2 "scalaires" (A_0 et A) et deux "vecteurs" ($\bar{A}_\alpha$).

Dans une transformation de jauge : $A_i \to A_i - \partial_i f$, A_0 se transforme en $A_0 - \dot{f}$ ($\dot{f} \equiv \partial_0 f$), A en $A - f$; quant aux $\bar{A}_\alpha$ ils restent inchangés. On peut ainsi construire 3 quantités invariantes de jauge indépendantes, un "scalaire" : $\Phi \equiv A_0 - \dot{A}$, et deux "vecteurs" : les $\bar{A}_\alpha$. Les actions d'interaction et du champ électromagnétique (4.1.1) se réécrivent alors, à une divergence totale près, sous la forme :

$$\begin{aligned} S_{(c)} &= -\frac{1}{2\mu_0 c}\int \left(-\partial_\alpha \Phi \partial^\alpha \Phi + \partial_i \bar{A}_\alpha \partial^i \bar{A}^\alpha\right) d\Omega, \\ S_{(i)} &= \frac{1}{c}\int \left(\Phi j^0 + \bar{A}_\alpha \daleth^\alpha\right) d\Omega - \frac{1}{c}\int A \partial_i j^i \, d\Omega, \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

où les indices α sont montés et descendus à l'aide de la métrique $\delta_{\alpha\beta}$ et on retrouve que l'action totale est invariante de jauge si le courant est conservé ($\partial_i j^i = 0$).

• *Equations de contrainte et d'évolution*

En variant l'action par rapport à Φ et $\bar{A}_i$ on obtient le second groupe des équations de Maxwell (4.1.2), écrit sous forme manifestement invariante de jauge :

$$\triangle \Phi = \mu_0 j^0 \qquad \text{et} \qquad \Box \bar{A}_\alpha = -\mu_0 \daleth_\alpha. \tag{4.1.7}$$

La première équation est une équation de contrainte. La seconde détermine l'évolution des deux seuls degrés de liberté dynamiques restant.

• *Deux degrés de liberté dynamique*

Dans le vide les équations de Maxwell (4.1.7) s'écrivent comme une contrainte ($\Phi = 0 \Leftrightarrow A_0 = \dot{A}$), plus deux équations d'évolution : $\Box \bar{A}_\alpha = 0$ (où $\partial_\alpha \bar{A}^\alpha = 0$), dont la solution générale peut s'écrire comme une superposition d'ondes planes monochromatiques :

$$\bar{A}^\alpha = \bar{e}^\alpha_{(k)} \cos(k_i x^i + \phi_{(k)}) \qquad \text{avec} \qquad k_i k^i = 0 \quad \text{et} \quad k_\alpha \bar{e}^\alpha_{(k)} = 0, \tag{4.1.8}$$

où k^i est le vecteur d'ondes, $e^\alpha_{(k)}$ et $\phi_{(k)}$ l'amplitude et la phase de l'onde. En particulier toute fonction

$$\bar{A}_\alpha(ct - z) = (A_1(ct - z), A_2(ct - z), 0) \tag{4.1.9}$$

est solution, et décrit une *onde plane*, se propageant le long de l'axe z à la vitesse de la lumière.

• *Choix d'une jauge*

L'équation (4.1.8) ne détermine qu'une classe d'équivalence de potentiels. Fixer la jauge consiste à choisir un élément de cette classe. La condition $\partial_i A^i = 0$, improprement appelée *jauge de Lorentz*, ne détermine pas uniquement A_i. Pour ce faire il faut choisir e.g. $A = 0$ ($\Rightarrow A_0 = 0, \nabla \vec{A} = 0$). Dans cette *jauge de Coulomb*, ou *radiative*, le 4-vecteur $A^i_{(k)}$ d'une onde monochromatique plane se propageant selon l'axe des z s'écrit alors :

$$A^i = e^i \cos[k(z-ct)+\phi] \qquad \text{avec} \qquad e^i = (0, \bar{e}^1, \bar{e}^2, 0). \tag{4.1.10}$$

Le mouvement d'une charge dans le champ d'une onde est régi par l'équation de Lorentz (4.1.2). Si par exemple l'onde est plane, monochromatique et polarisée rectilignement (équation (4.1.10) avec $\bar{e}^1 = 0$), la charge se meut dans le plan (z, y) en décrivant une courbe en 8 ; si elle est polarisée circulairement ($e^1 = -e^2$ dans (4.1.10)), elle décrit un cercle dans le plan (x, y).

2. Rayonnement d'ondes électromagnétiques

En présence de charges ponctuelles les équations de Maxwell sont données par (4.1.7) avec : $j^i = \sum e \int d\tau \delta_4[x - z(\tau)]u^i$ où la somme est prise sur les charges e, où les intégrales sont prises le long des lignes d'univers (L) , où x est le point courant, z un point sur (L) et $u^i \equiv dz^i/d\tau$ le vecteur vitesse, tangent en z à (L). La première équation est une équation de Coulomb dont la solution s'obtient en utilisant le fait que $\triangle(1/|\vec{x}|) = -4\pi\delta_3(\vec{x})$ et décrit la partie statique du champ ; la solution (retardée) de la seconde s'obtient en utilisant $\Box \frac{\delta(x_0 - |\vec{x}|)}{|\vec{x}|} = -4\pi\delta_4(x^i)$ et est le potentiel de Liénard-Wiechert :

$$\Phi = -\frac{\mu_0}{4\pi}\sum e\left(\frac{u^0}{|\vec{x}-\vec{z}|}\right) \qquad ; \qquad \bar{A}_\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum e\left(\frac{\bar{u}_\alpha}{r}\right)_R \tag{4.1.11}$$

où, si z_R est l'intersection de (L) avec le cône retardé issu de x, alors $r_R = -(x^i - z^i_R)u_{iR}$, u^i_R étant le vecteur tangent unitaire à (L) en z_R.

En introduisant les notations tridimensionnelles : $d\tau^2 = c^2dt^2(1 - \vec{v}^2/c^2)$ où $v^\alpha = dz^\alpha/dt$ ainsi que $x^\alpha - z^\alpha \equiv X^\alpha$, $X = (X_\alpha X^\alpha)^{1/2}$, les potentiels (4.1.11) se réécrivent :

$$\Phi = -\frac{\mu_0}{4\pi}\sum\left(\frac{e}{X\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) \qquad ; \qquad \bar{A}_\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum\left(\frac{e\bar{v}_\alpha/c}{X - \vec{X}\cdot\vec{v}/c}\right)_R \tag{4.1.12}$$

où $f_R = f\,(ct_R = ct - X(t_R))$ (ainsi X et X_R sont les distances spatiales entre le point courant et la charge aux instants t et t_R, où $t - t_R$ est le temps mis par la lumière pour aller de la charge au point courant).

Si maintenant le point courant est loin du système : $\vec{X} = X_0\vec{n} - \vec{z}, |\vec{z}| \ll X_0$, et si les vitesses des charges restent petites devant celles de la lumière : $|\vec{v}|/c \ll 1$, alors :

$$\Phi \simeq -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Q}{X_0} \qquad \text{et} \qquad \bar{A}_\alpha \simeq \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(\bar{d}'_\alpha)_{R0}}{X_0} \simeq \frac{\mu_0}{4\pi c}\frac{\left(\dot{d}_\alpha - (n\cdot\dot{d})n_\alpha\right)_{R0}}{X_0} \tag{4.1.13}$$

où $Q \equiv \sum e$ est la charge totale du système, où $d_\alpha \equiv \sum e z_\alpha$ est son moment dipolaire, où le prime indique la dérivation par rapport à $(ct - X)$ et où l'indice $R0$ signifie que les quantités sont évaluées à l'instant retardé t_{R0} tel que $t - t_{R0} = X_0/c$. La deuxième expression pour $\bar{A}_\alpha$ s'obtient comme suit : comme d_α (où l'indice $R0$ est sous-entendu) ne dépend du point courant qu'à travers $(ct - X_0)$, on a $\partial_\alpha d^\beta = -d'^\beta n_\alpha$, de sorte qu'au premier ordre en $1/X_0$, $\bar{d}_\alpha = d_\alpha - (\vec{n}.\vec{d})n_\alpha$ (en effet on a bien $0 = \partial_\alpha d^\alpha - \partial_\alpha[n^\alpha(\vec{n}.\vec{d})]$ puisque $\partial_\alpha[n^\alpha(\vec{n}.\vec{d})] \simeq n^\alpha n_\beta \partial_\alpha d^\beta = \partial_\alpha d^\alpha$).

3. Formule du dipôle et force de contre-réaction

Nous avons calculé le champ créé par des charges (émettrices) et indiqué comment d'autres charges (réceptrices) se meuvent dans ce champ, ce qui donne le principe de la détection de ce champ. Il reste à déterminer l'energie rayonnée par les charges émettrices ainsi que la *contre-réaction* sur leur mouvement de cette perte d'énergie.

Le calcul de la perte d'énergie se fait à partir des lois de conservation déduites des invariances du lagrangien de l'électromagnétisme sous le groupe de Poincaré. Un tenseur énergie-impulsion T_{ij}, symétrique, peut en effet être associé au champ électromagnétique:

$$\mu_0 T_{ij} = -F_{il}F^l{}_j - \frac{1}{4}\eta_{ij}F_{lm}F^{lm}. \tag{4.1.14}$$

Ce tenseur est conservé ($\partial_j T^{ij} = 0$), à l'extérieur des charges, si les équations de Maxwell sont satisfaites. Ceci conduit au bilan d'énergie suivant pour la *quadri-impulsion* P^i du champ :

$$\frac{d}{dt}P^i = -\int T^{i\alpha}n_\alpha X_0^2 do \qquad \text{avec} \qquad P^i = \frac{1}{c}\int T^{0i}dV \tag{4.1.15}$$

où $do = \sin\theta d\theta d\phi$ est l'élément d'angle solide, n_α le vecteur unitaire sortant, et X_0 le rayon d'une sphère centrée à l'origine des coordonnées. Le tenseur énergie-impulsion (4.1.14), invariant de jauge, s'exprime en fonction de Φ et $\bar{A}^\alpha$. Dans le cas de l'onde plane (4.1.9) il vaut

$$T_{00} = -T_{0z} = T_{zz} = \frac{1}{\mu_0}\bar{A}'_\alpha \bar{A}'^\alpha, \tag{4.1.16}$$

où un prime dénote la dérivée par rapport à l'argument ($ct - z$) de l'onde (le résultat étant invariant de jauge, le calcul peut s'effectuer dans n'importe quelle jauge, par exemple celle de Coulomb).

Les potentiels (4.1.13) décrivent asymptotiquement une onde plane, surimposée à une partie de Coulomb, statique. Cette dernière ne contribue pas au flux d'énergie à l'infini ; en effet le tenseur énergie-impulsion étant quadratique dans les dérivées des potentiels, la contribution de Φ est d'ordre $1/X_0^4$ dont l'intégrale sur la sphère de rayon X_0 s'évanouit quand $X_0 \to \infty$. Quant à la contribution de $\bar{A}_\alpha$ elle s'obtient en reportant sa valeur dans l'expression (4.1.16), qui donne donc, au plus bas ordre en $(1/c)$, la perte d'énergie par rayonnement du système en fonction du mouvement des charges (*formule du dipôle*) :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E &= -c\int T^{0\alpha}n_\alpha X_0^2 do = -\frac{c}{\mu_0}\int \bar{A}'^\alpha \bar{A}'_\alpha X_0^2 do \\ &= -\frac{\mu_0 c}{(4\pi)^2}\int (\bar{d}''^\alpha d''_\alpha)_{R0} do = -\frac{\mu_0 c}{(4\pi)^2}\int (\vec{d}''_{R0})^2 \sin^2\theta do \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2}{3c}(\ddot{d}_{R0})^2.\end{aligned} \tag{4.1.17}$$

Conformément au principe de relativité restreinte, seules des charges accélérées rayonnent : en effet la dérivée seconde du dipôle n'est nulle que si les rapports des charges aux masses sont égaux, auquel cas le centre de masse des charges est en mouvement rectiligne uniforme.

Cette formule du dipôle, à elle seule, permet aussi de calculer la contre-réaction de cette perte d'énergie sur le mouvement des charges émettrices si celui-ci ne dépend que d'un paramètre. C'est le cas par exemple d'un système de deux charges en mouvement circulaire. A l'ordre le plus bas leur mouvement est coulombien et leur énergie E_{mec} (définie par $\frac{1}{c^2}\int T^{00}_{(p)+(i)}dV$ où $T^{ij}_{(p)+(i)}$ est le tenseur énergie-impulsion mécanique des charges) est proportionnelle à l'inverse de leur distance $1/X$. On a donc, parce que l'énergie totale des charges et du champ est constante, $\dot{E} = -\dot{E}_{mec} \propto \dot{X}$ avec $\dot{E}$ donné par (4.1.17), ce qui donne $\dot{X}$ c'est-à-dire le taux de rétrécissement de l'orbite. Si le mouvement dépend d'un plus grand nombre de paramètres d'autres lois de conservation, comme celle du moment cinétique doivent être également invoquées.

Dans les cas plus complexes les lois de conservations (dix, liées aux dix paramètres du groupe de Poincaré) ne suffisent pas à déterminer totalement la contre-réaction. Il faut alors trouver les équations du mouvement directement à partir de la force de Lorentz (4.1.2). La résolution de ce problème se heurte à une difficulté lorsque les charges sont traitées comme ponctuelles ; en effet la force de Lorentz , où le tenseur du champ est évalué sur la ligne d'univers de la charge émettrice e, diverge, au vu de (4.1.11). Il faut donc la régulariser. Plusieurs méthodes sont envisageables. Elles conduisent à scinder la force de Lorentz en la somme des forces dues aux autres charges du système (convergentes, proportionnelles à ee') et une *self-force d'Abraham* en e^2. On obtient (cf e.g. le *Théorie des champs* de Landau et Lifchitz) :

$$mc\frac{du^i}{d\tau} = \Sigma_{e'}e'F^{ij}u_j + \frac{2e^2}{3c^2}\left(\frac{d^2u^i}{d\tau^2} - u^i u^j \frac{d^2u_j}{d\tau^2}\right) \tag{4.1.18}$$

où F_{ij} se déduit de (4.1.11). Le développement en puissance de $1/c$, fastidieux mais sans difficulté, mène en fin de compte à l'expression suivante pour l'accélération $d\vec{v}/dt$ de la charge e de masse m située à la distance X de la charge e' de masse m' :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{ee'}{X^2}\vec{N} + \frac{ee'}{c^2X^2}\left[\vec{N}V^2 + \frac{ee'}{m'}\frac{\vec{N}}{X}\right] + e\frac{ee'}{c^3X^3}\left(\frac{e'}{m'} - \frac{e}{m}\right)\left[2\vec{N}(N\cdot V) - \frac{2}{3}\vec{V}\right] + ..., \tag{4.1.19}$$

où $\vec{N}$ est le vecteur unitaire de $\vec{X}$ pointant vers e' et $\vec{V}$ la vitesse relative de e par rapport à e'.

A l'ordre zéro en $1/c^2$ l'eq (4.1.19) est l'équation de Coulomb dont les solutions, si les charges sont liées, sont les ellipses de Kepler ; les corrections d'ordre $(1/c^2)$ font précesser l'ellipse, mais le mouvement se déduit toujours d'un lagrangien (celui de Darwin, cf e.g. le Landau-Lifchitz) et par conséquent il existe toujours une énergie conservée. En revanche le terme en $(1/c^3)$, qui brise la symétrie $t \to -t$, décrit la contre-réaction sur le mouvement de e du fait qu'elle rayonne un champ électromagnétique. Il conduit à un rétrécissement de l'orbite de e autour de e'. (Dans le cas d'une orbite circulaire on vérifie que le rétrécissement de l'orbite obtenu est le même que celui que donne la formule du dipôle.) L'effet est nul si $e/m = e'/m'$ auquel cas la dérivée seconde du dipôle du système, qui devient proportionnelle à l'accélération de son centre de masse, est nulle.

2. L'approximation linéaire de la relativité générale

1. Qu'est-ce qu'une onde gravitationnelle ?

Un champ gravitationnel dans le vide est décrit par les dix composantes d'un tenseur métrique satisfaisant aux équations d'Einstein. Le principe d'équivalence, c.-à-d. l'exigence d'invariance des équations d'Einstein dans des changements des quatre coordonnées, implique a priori que seules six combinaisons de ces dix composantes sont invariantes de jauge, c.-à-d. restent inchangées dans un changement de coordonnées. Supposons que nous connaissions leurs expressions explicites. Les équations d'Einstein pour ces six grandeurs s'écriraient alors comme quatre équations de contrainte (une pour chaque invariance de jauge) plus deux équations d'évolution. Le “problème de Cauchy” étant bien posé en relativité générale, ces deux équations devraient être des équations d'onde (hyperboliques) dont les solutions seraient les ondes gravitationnelles. Malheureusement, dans le cas général, un tel programme bute sur la non-linéarité des équations d'Einstein. Il n'est dans l'état actuel de l'art réalisable que si l'on *linéarise* les équations d'Einstein autour d'une solution du vide particulière (et nous choisirons ici la plus simple : la métrique de Minkowski). Ainsi les ondes gravitationnelles seront les deux degrés de liberté dynamiques des *perturbations* de la métrique.

2. Six perturbations invariantes de jauge

Considérons un espace-temps plat en coordonnées minkowskiennes (nous sommes donc dans un repère inertiel). Perturbons-le, c.-à-d. considérons la métrique : $g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij}$ où η_{ij} est la métrique de Minkowski et h_{ij} sont dix perturbations telles que $|h_{ij}| \ll 1$. Il s'agit ici de démêler ce qui dans ces perturbations est dû à la présence d'un champ gravitationnel faible et ce qui provient d'un changement infinitésimal du système de coordonnées.

On écrira l'élément de longueur sous la forme :

$$ds^2 = -(1+2A)(dx^0)^2 + 2B_\alpha dx^\alpha dx^0 + [(1+2C)\delta_{\alpha\beta} + 2E_{\alpha\beta}]\, dx^\alpha dx^\beta \tag{4.2.1}$$

où $\delta_{\alpha\beta}$ est l'indice de Kronecker et E_{α_β} est sans trace : $E^\alpha_\alpha = 0$. (On convient que les indices sont montés et descendus à l'aide de $\delta_{\alpha\beta}$ et donc que B_α et $E_{\alpha\beta}$ sont respectivement un vecteur et un tenseur euclidien.) Ainsi : $h_{00} = -2A$, $h_{0\alpha} = B_\alpha$ et $h_{\alpha\beta} = 2(C\delta_{\alpha\beta} + E_{\alpha\beta})$. Plutôt que comme une perturbation de la métrique, on peut donc aussi considérer h_{ij} comme un champ tensoriel cartésien défini en espace-temps plat dans un repère inertiel. (Nous avons effectué une décomposition similaire lorsque nous avons étudié les perturbations de l'espace-temps de Robertson-Walker, cf chapitre 4)

Décomposons ensuite le vecteur B_α en : $B_\alpha = \partial_\alpha B + \bar{B}_\alpha$ où B est un scalaire et $\bar{B}_\alpha$ un vecteur sans divergence ($\partial_\alpha \bar{B}^\alpha = 0$). Décomposons de même le tenseur sans trace $E_{\alpha\beta}$ en : $E_{\alpha\beta} = \partial^2_{\alpha\beta}E - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\triangle E +$

$\partial_\alpha \bar{E}_\beta + \partial_\beta \bar{E}_\alpha + \bar{E}_{\alpha\beta}$ où $\bar{E}_\alpha$ est sans divergence et où le tenseur $\bar{E}_{\alpha\beta}$ est transverse et sans trace ($\bar{E}^\alpha_\alpha = 0$ et $\partial_\alpha \bar{E}^{\alpha\beta} = 0$). Dans la terminologie de Bardeen, nous avons ainsi décomposé les dix composantes de la perturbation h_{ij} en quatre *scalaires* (A, C, B, E), quatre *vecteurs* (les deux composantes indépendantes des deux vecteurs sans divergence $\bar{B}\alpha$ et $\bar{E}_\alpha$), et deux *tenseurs* (les deux composantes indépendantes du tenseur transverse et sans trace $\bar{E}_{\alpha\beta}$).

Notre système de quatre coordonnées étant déterminé à un changement infinitésimal près, il nous faut construire six grandeurs invariantes dans les transformations : $x^i \to \tilde{x}^i = x^i + \xi^i$ où ξ^i est infiniment petit. Dans une telle transformation la variation du tenseur métrique est : $\delta g_{ij} \equiv g_{ij}(x^k) - \tilde{g}_{ij}(x^k) = \partial_i \xi_j + \partial_j \xi_i$. Décomposons maintenant le vecteur ξ^i en deux scalaires ξ^0, ξ et deux vecteurs $\bar{\xi}_\alpha$ selon : $\xi_i = (\xi_0, \partial_\alpha \xi + \bar{\xi}_\alpha)$, où $\bar{\xi}_\alpha$ est sans divergence. Alors les quatre perturbations scalaires se transforment selon :

$$A \to A + \xi'^0 \quad ; \quad B \to B + \xi' - \xi^0 \quad ; \quad C \to C + \tfrac{1}{3}\triangle\xi \quad ; \quad E \to E + \xi, \tag{4.2.2}$$

où un prime dénote la dérivée par rapport à la coordonnée temporelle x^0. On voit ainsi que l'on peut construire deux combinaisons scalaires invariantes de jauge, par exemple :

$$\Phi_A \equiv A + B' - E'' \qquad \text{et} \qquad \Phi_C \equiv C - \tfrac{1}{3}\triangle E. \tag{4.2.3}$$

De même les quatre perturbations vectorielles se transforment selon :

$$\bar{B}_\alpha \to \bar{B}_\alpha + \bar{\xi}'_\alpha \quad ; \quad \bar{E}_\alpha \to \bar{E}_\alpha + \bar{\xi}_\alpha \tag{4.2.4}$$

de sorte que deux combinaisons invariantes de jauge peuvent être construites, e.g. :

$$\Phi_{B\alpha} \equiv \bar{B}_\alpha - \bar{E}'_\alpha. \tag{4.2.5}$$

Enfin les deux perturbations tensorielles restent inchangées :

$$\bar{E}_{\alpha\beta} \to \bar{E}_{\alpha\beta}. \tag{4.2.6}$$

Ainsi donc nous avons obtenu les six grandeurs invariantes de jauge cherchées qui se répartissent en deux "scalaires" (Φ_A et Φ_C), deux "vecteurs" ($\Phi_{B\alpha}$) et deux "tenseurs" ($\bar{E}_{\alpha\beta}$).

3. Deux degrés de liberté dynamiques

Les équations d'Einstein étant invariantes dans les changements de coordonnées, leur linéarisation autour de la métrique de Minkowski doit pouvoir s'écrire en fonction seulement des six grandeurs invariantes de jauge ci-dessus.

Remarquons d'abord que les trois groupes de perturbations, de type scalaire, vectoriel et tensoriel (au sens de Bardeen), peuvent être considérés séparément, c.-à-d. que les équations d'Einstein linéarisées pour l'un des trois groupes peut s'obtenir en égalant à zéro les deux autres. La raison en est qu'écrire les équations d'Einstein consiste à prendre des dérivées par rapport aux x^i, opérations qui ne changent pas le type de la perturbation (ainsi par exemple la dérivée d'un "vecteur" $\bar{B}_\alpha$ est : $\partial_i \bar{B}_\alpha = (\bar{B}'_\alpha, \partial_\beta \bar{B}_\alpha)$ dont les composantes sont toutes de type vectoriel).

Considérons donc dans un premier temps les perturbations scalaires seulement et remarquons que si, partant d'un repère où elles sont (A, C, B, E), on fait un changement de coordonnées : $x^i \to x^i + \xi^i$ tel que : $\xi^0 = B - E'$ et $\xi = -E$, alors : $E \to 0$ et $B \to 0$, de sorte que dans cette nouvelle jauge (dite *longitudinale*), $\Phi_A = A$ et $\Phi_C = C$. Par conséquent une façon économique d'obtenir les équations du mouvement pour Φ_A et Φ_C est de se placer dans la jauge longitudinale, où l'élément de longueur se réduit à :

$$ds^2 = -(1 + 2A)(dx^0)^2 + (1 + 2C)\delta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \tag{4.2.6}$$

de calculer alors le tenseur d'Einstein G_{ij} au premier ordre en A et C. On obtient : $G_{00} = -2\triangle C$; $G_{0\alpha} = -2\partial_\alpha C'$ et $G_{\alpha\beta} = \left[-2C'' + \frac{2}{3}\triangle(A + C)\right]\delta_{\alpha\beta} - \partial^2_{\alpha\beta}(A + C)$; puis on remplace A et C par Φ_A et Φ_C respectivement puisque dans la jauge choisie ces grandeurs sont les mêmes, pour arguer enfin que les expressions obtenues, étant exprimées en fonction de grandeurs invariantes de jauge seulement (Φ_A et Φ_C), sont valables dans n'importe quelle jauge. Ainsi donc les équations d'Einstein linéarisées pour Φ_A et Φ_C ($G_{ij} = 0$) sont-elles : $\triangle\Phi_C = 0$ et $\partial_\alpha \Phi'_C = 0$, dont la seule solution régulière partout est $\Phi_C = 0$, ce qui, combiné à la troisième équation, implique que $\Phi_A = 0$ également. Ce sont là deux équations de contrainte sur les quatre perturbations scalaires :

$$\Phi_A \equiv A + B' - E'' = 0 \qquad \text{et} \qquad \Phi_C \equiv C - \frac{1}{3}\triangle E = 0. \tag{4.2.7}$$

Pour obtenir les équations du mouvement pour les deux perturbations vectorielles invariantes de jauge, $\Phi_{B\alpha}$, on procède de façon similaire. On se place dans une jauge *vectorielle* où $\bar{E}_\alpha = 0$, de sorte que l'élément de longueur se réduit à :

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + 2\bar{B}_\alpha dx^\alpha dx^0 + \delta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \tag{4.2.8}$$

Le tenseur d'Einstein vaut alors : $G_{00} = 0$, $G_{0\alpha} = -\frac{1}{2}\triangle\bar{B}_\alpha$ et $G_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}(\partial_\alpha \bar{B}_\beta + \partial_\beta \bar{B}_\alpha)$. Comme dans la jauge choisie $\Phi_{B\alpha} = \bar{B}_\alpha$, on peut remplacer dans les équations d'Einstein ($G_{ij} = 0$) $\bar{B}_\alpha$ par $\Phi_{B\alpha}$, et l'on voit ainsi que la seule solution bornée des équations est $\Phi_{B\alpha} = 0$. Ainsi donc les équations d'Einstein pour les deux perturbations vectorielles invariantes de jauge sont également deux équations de contrainte :

$$\Phi_{B\alpha} \equiv \bar{B}_\alpha - \bar{E}'_\alpha = 0. \tag{4.2.9}$$

Pour obtenir enfin les équations du mouvement pour les perturbations tensorielles $\bar{E}_{\alpha\beta}$ point n'est besoin de choisir une jauge puisqu'elles s'identifient aux perturbations spatiales transverses et sans trace de la métrique :

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + \left(\delta_{\alpha\beta} + \bar{E}_{\alpha\beta}\right) dx^\alpha dx^\beta. \tag{4.2.10}$$

C'est alors un autre exercice de montrer que : $G_{00} = G_{0\alpha} = 0$ et $G_{\alpha\beta} = \bar{E}''_{\alpha\beta} - \triangle\bar{E}_{\alpha\beta}$. Ainsi donc les équations d'Einstein linéarisées pour les deux perturbations tensorielles sont les deux équations d'évolution :

$$\Box \bar{E}_{\alpha\beta} = 0. \tag{4.2.11}$$

Toute fonction $\bar{E}_{\alpha\beta}(ct - z)$, telle que $\bar{E}^\alpha_\alpha = \partial_z \bar{E}^{z\beta} = 0$, est solution de cette équation et décrit une onde gravitationnelle plane se propageant selon l'axe z à la vitesse de la lumière. Quant à la solution générale c'est une superposition d'ondes planes :

$$\bar{E}^{(k)}_{\alpha\beta} = \bar{e}^{(k)}_{\alpha\beta} \cos(k_i x^i + \phi_{(k)}) \qquad \text{où} \qquad \eta_{ij} k^i k^j = 0 \quad \text{et} \quad \delta^{\alpha\beta} \bar{e}^{(k)}_{\alpha\beta} = k^\alpha \bar{e}^{(k)}_{\alpha\beta} = 0, \tag{4.2.12}$$

et où k_i, $e^{(k)}_{\alpha\beta}$ et $\phi_{(k)}$ sont respectivement les vecteur d'onde, amplitude et phase de l'onde. La classe d'équivalence ainsi définie ($\Phi_A \equiv A + B' - E'' = 0, \Phi_C \equiv C - \frac{1}{3}\triangle E = 0, \Phi_{B\alpha} \equiv \bar{B}_\alpha - \bar{E}'_\alpha = 0$ et $\bar{E}_{\alpha\beta}$ donné par (4.2.12)) définit une onde gravitationnelle plane monochromatique. Fixer la jauge, en choisissant e.g. $B = E = \bar{E}_\alpha = 0$ (ce qui définit la jauge "TT" *transverse, sans-trace*), revient à choisir un élément de cette classe. Alors les coefficients de la métrique $h_{ij} (= h^{TT}_{ij}$ dans l'exemple considéré) sont complètement déterminés. Ainsi, si $\vec{k} = (0, 0, k)$, alors :

$$h^{TT}_{ij} = e^{TT}_{ij} \cos[k(z - ct) + \phi_{(+,\times)}] \quad \text{avec} \quad \begin{cases} e^{TT}_{xx} = -e^{TT}_{yy} \equiv e_+ \\ e^{TT}_{xy} = e^{TT}_{yx} \equiv e_\times, \end{cases} \tag{4.2.13}$$

toutes les autres composantes de e^{TT}_{ij} étant nulles, de sorte que l'élément de longueur s'écrit :

$$\begin{gathered} ds^2 = -c^2 dt^2 + (1 + f_+) dx^2 + (1 - f_+) dy^2 + 2 f_\times dx dy + dz^2 \\ \text{avec} \quad f_{(+,\times)} = e_{(+,\times)} \cos[k(ct - z) + \phi_{(+,\times)}]. \end{gathered} \tag{4.2.14}$$

3. Comment détecter des ondes gravitationnelles

1. Mouvement de particules dans le champ d'une onde

Considérons, dans la jauge TT, une onde gravitationnelle plane monochromatique se propageant selon l'axe des z. Elle est décrite par (4.2.13) et (4.2.14). Une particule test suit une géodésique de cet espace-temps, d'équation : $d^2x^i/d\tau^2 + \Gamma^i_{jk}(dx^j/d\tau)(dx^k/d\tau) = 0$. Comme, au premier ordre en h, $2\Gamma^i_{00} = \eta^{ij}(2\partial_0 h^{TT}_{0j} - \partial_j h^{TT}_{00}) = 0$, on voit qu'une particule test initialement au repos demeure au repos. Cela cependant ne signifie pas qu'une onde est sans effet mais seulement que le système de coordonnées choisi est en co-mouvement.

Le principe d'équivalence stipule qu'un observateur en chute libre, dont la trajectoire dans la jauge TT est $x^\alpha = const$ (constante que l'on prendra égale à zéro), est localement inertiel et donc peut construire dans son voisinage un sytème de référence quasi-minkowskien. Faisons pour l'obtenir, dans le voisinage de la géodésique de l'observateur, le changement de coordonnées $x^\alpha \to \tilde{x}^\alpha = x^\alpha + \frac{1}{2} h^{TT\alpha}{}_\beta(x^0, \vec{0})x^\beta + \mathcal{O}(x^\alpha x_\alpha)$. Alors, au premier ordre en x^α la métrique prend bien une forme minkowskienne [le calcul de la transformation du tenseur métrique est particulièrement simple dans le cas particulier de l'onde plane monochromatique (4.2.14)]: $ds^2 \simeq -(dx^0)^2 + \delta_{\alpha\beta} d\tilde{x}^\alpha d\tilde{x}^\beta$. Le système de coordonnées $(t, \tilde{x}^\alpha)$, appelé *système de coordonnées de Fermi*, localement inertiel au voisinage de la géodésique $x^\alpha = \tilde{x}^\alpha = 0$, est celui qu'utiliserait naturellement un observateur, libre, à l'origine. Dans ce système l'équation géodésique d'une particule initialement au repos devient :

$$\frac{d^2\tilde{x}^\alpha}{d\tau^2} = \frac{d^2\tilde{x}^\alpha}{(dx^0)^2} = -\tilde{\Gamma}^\alpha_{00}(\tilde{x}^\alpha) \simeq -\tilde{\Gamma}^\alpha_{00}(0) - \partial_\beta \tilde{\Gamma}^\alpha_{00}(x^0, \vec{0})\tilde{x}^\beta = -\partial_\beta \tilde{\Gamma}^\alpha_{00}(x^0, \vec{0})\tilde{x}^\beta. \tag{4.3.1}$$

$\tilde{\Gamma}^\alpha_{00}(0)$ est nul car le sytème de Fermi est localement inertiel. Le tenseur de Riemann en revanche n'est pas nul et vaut, au premier ordre : $\tilde{R}^\alpha_{0\beta 0} = \partial_\beta \tilde{\Gamma}^\alpha_{00}$; par ailleurs, toujours au premier ordre $\tilde{R}^\alpha_{0\beta 0} = \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^l}\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^0}\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^\beta}\frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^0} R^l_{ijk} \simeq R^\alpha_{0\beta 0}$; et enfin, dans la jauge transverse sans trace : $2R^\alpha_{0\beta 0} \simeq -\frac{\partial^2 h^{TT\alpha}{}_\beta(x^0,\vec{0})}{(dx^0)^2}$. de sorte que l'équation géodésique (4.3.1) s'écrit aussi :

$$\frac{d^2\tilde{x}^\alpha}{(dx^0)^2} \simeq -\tilde{R}^\alpha_{0\beta 0}(x^0, \vec{0})\tilde{x}^\beta \simeq \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h^{TT\alpha}{}_\beta(x^0, \vec{0})}{(dx^0)^2}\tilde{x}^\beta. \tag{4.3.2}$$

Dans ce système de coordonnées une particule test initialement au repos en $\tilde{x}^\alpha = 0$ est donc accélérée par rapport à une particule, test elle-aussi, située à l'origine des coordonnées. On reconnaît dans (4.3.2) l'équation de déviation géodésique. En effet cette équation : $D^2 n^i/d\tau^2 = -R^i{}_{jkl} u^j n^k u^l$ où n^i mesure l'écartement, à τ constant, des géodésiques, se réduit à (4.3.2), avec $\tilde{x}^\alpha \equiv n^\alpha$, à l'ordre le plus bas, et pour des particules au repos ($u^i = (1, 0)$).

L'intégration de (4.3.2) est immédiate : $\tilde{x}^\alpha = \frac{1}{2} h^{TT\alpha}{}_\beta \tilde{x}^\beta$ et permet de décrire l'évolution d'un cercle de particules test dans le champ de l'onde (4.2.13).

2. Deux principes de détection d'une onde gravitationnelle

N.B. : Cf la bibliographie pour plus ample précision.

Le comportement de particules test dans le champ d'une onde gravitationnelle fournit le principe de leur détection interférométrique. Soit en effet un interféromètre de Michelson en chute libre (il suffit dans la pratique que les miroirs soient pendulairement suspendus). Les temps mis par les signaux lumineux pour parcourir l'appareil seront modulés par le passage de l'onde gravitationnelle, ce qui modifiera la figure d'interférence, permettant ainsi de détecter l'onde.

Plus précisément les trajectoires de deux miroirs sont, dans la jauge TT, $x = 0$ et $x = l_0$. Supposons qu'une onde tombe sur le système. Le temps coordonnée mis par la lumière pour faire un aller-retour entre les miroirs annule ds^2 et l'on a $\delta t \simeq (2l_0/g_{00})\sqrt{(g_{0x})^2 - g_{00}g_{xx}}$, si l_0 est très inférieur à l'échelle de variation de la métrique. Le temps propre mis est $\delta\tau = \sqrt{g_{00}}\delta t$ et est donc modulé par le passage de l'onde. Si elle est représentée par (4.2.13) avec $f_\times = 0$, on obtient par exemple :

$$\delta\tau \simeq 2l_0\,(1 + \tfrac{1}{2} f_+)\,. \tag{4.3.3}$$

Quant à la différence de chemin optique entre les deux bras, elle vaut alors :

$$c^2\Delta\tau = \frac{\lambda h}{2\pi}\sin\left(\frac{\pi l}{\lambda}\right)\cos ckt \tag{4.3.4}$$

où h est l'amplitude et λ la longueur de l'onde et l la longueur effective des bras de l'interféromètre, à savoir $l = nl_0$, n étant le nombre des réflexions sur les miroirs et l_0 la longueur physique de l'appareil (la technique actuelle permet d'avoir $n \approx 150$). On voit ainsi que l'effet sera maximal si $l = \lambda/2$; pour un signal à 1 kHz (ce qui est l'ordre de grandeur de la fréquence des ondes émises lors de l'explosion d'une supernova) ceci implique $l \simeq 150$ km, soit $l_0 \approx 1$ km...

La sensibilité de tels détecteurs est surtout limitée par le bruit de photons. Un calcul que l'on trouvera dans Kenyon, *General Relativity* p. 140, donne l'amplitude minimale détectable sous la forme :

$$h \approx 2\left(\frac{\hbar\lambda_{em}\nu^3}{c\pi\epsilon P}\right)^{1/2}, \tag{4.3.5}$$

où λ_{em} et P sont la longueur d'onde (e.g. 5×10^{-7}m) et la puissance (e.g. 100 W) du laser, ν la fréquence de l'onde gravitationnelle (e.g.1 kHz), et ϵ l'efficacité du détecteur (e.g. 0.3). Avec les valeurs numériques choisies (qui correspondent aux caractéristiques des détecteurs interférométriques effectivement en cours de construction), on trouve : $h \approx 10^{-21}$. C'est là l'amplitude à attendre sur terre d'explosions de supernovae dans l'amas de la Vierge.

Le mouvement forcé d'un ressort soumis à l'action d'une onde gravitationnelle fournit le principe d'un second type de détecteur. Une généralisation simple de l'équation de déviation géodésique (4.3.2), dont on trouvera une justification détaillée dans Schutz *A First Course in General Relativity* p. 222, donne en effet :

$$\partial^2_{00}l + \frac{\omega_0}{Q}\partial_0 l + \omega_0^2(l - l_0) = \frac{1}{2}l_0\frac{\partial^2 h^{TT}_{xx}}{\partial t^2} \tag{4.3.6}$$

où l est la longueur du ressort, l_0 sa longueur au repos, Q son facteur de qualité et ω_0 sa pulsation. Un calcul facile (cf Schutz) donne alors l'énergie emmagasinée dans le ressort lorsque la fréquence de l'onde et celle du ressort sont en résonance :

$$E_{res} \approx \frac{1}{16}ml_0^2\Omega^2h^2Q^2 \tag{4.3.7}$$

où m est la masse du ressort.

Dans la pratique le ressort est une lourde barre (d'aluminium) ($m = 1.5$ tonne par exemple) de longueur e.g. 1.5 m, de fréquence propre de l'ordre de 1kHz et de haut facteur de qualité (e.g. 10^5). Ceci implique qu'une onde d'amplitude $h \approx 10^{-20}$ déposera dans la barre une énergie de l'ordre de 10^{-20} Joule, correspondant à un extension de la barre d'environ 10^{-15}m, le diamètre d'un noyau atomique...

La sensibilité de tels détecteurs est limitée par le bruit thermique : $E = kT$ où T est la température absolue de la barre et où $k \approx 1.4\times 10^{-23}$J/Kelvin. La réduction de ce bruit passe par de meilleurs facteurs de qualité Q et un refroidissement à basses températures (Hélium liquide). Une autre limite à la sensibilité est d'origine quantique. Il faut en effet que l'énergie à mesurer soit supérieure à $\hbar\omega_0$, ce qui implique (pour $Q \approx 1$) que h soit supérieur à 10^{-21} (Kenyon).

4. Energie rayonnée par des ondes gravitationnelles

N.B. : ce paragraphe ne fait que résumer les grandes lignes du problème.

1. L'énergie d'une onde gravitationnelle

Les équations d'Einstein, à cause de l'identité de Bianchi $D_jG^{ij} \equiv 0$, impliquent que le tenseur énergie-impulsion de la matière est covariantement conservé : $D_jT^{ij} = 0$. Pour transformer cette loi en une loi de conservation ordinaire il faut transformer la dérivée covariante en une dérivée ordinaire s'appliquant à un *pseudo-tenseur*. Il en existe plusieurs, par exemple ceux d'Einstein ou de Landau-Lifchitz. Ce dernier, t^{ij}, est tel que $\partial_j[(-g)(T^{ij}+t^{ij})]=0$ (voir dans le Landau et Lifchitz son expression explicite). Comme t^{ij} n'est pas un tenseur dans les transformations générales de coordonnées, il ne peut pas s'exprimer en fonction des perturbations invariantes de jauge seulement. Lorsqu'on le calcule pour une onde plane se propageant selon l'axe des z dans la jauge transverse et sans trace eq (4.2.14) (cf e.g. le Landau et Lifchitz) on obtient alors, à l'ordre linéaire, le bilan suivant :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E &= -c\int t^{0\alpha}n_\alpha X_0^2 do \quad \text{avec} \\ E &= \int (T^{00}+t^{00})d^3x \quad \text{et} \quad t_{03}=\frac{1}{16\pi G}\left(h'^2_{12}+\frac{1}{4}\left(h'_{11}-h'_{22}\right)^2\right)_{TT}, \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

où l'indice "TT" précise que t_{ij} est calculé dans cette jauge. Le statut de l'équation (4.4.1) n'est pas le même que celui de son homologue électromagnétique, l'équation (4.1.15), car si T^{00} et $T^{0\alpha}$ dans (4.1.15) peuvent être interprétés respectivement comme une densité d'énergie et un *vecteur* (de Poynting), seules dans (4.4.1) les intégrales dE/dt et E ont un sens géométrique : E/c est la composante temporelle d'un objet P^i, vecteur dans les transformations de Lorentz, c.-à-d. dans la région à l'infini, loin des sources du rayonnement, asymptotiquement plate.

2. Energie rayonnée par un système non auto-gravitant

Ecrivons les équations d'Einstein linéarisées en présence de masses ponctuelles : le tenseur d'Einstein a été obtenu plus haut, en termes de six potentiels invariants de jauge ; le tenseur énergie-impulsion, quant à lui, est : $T^{ij}=\sum mc^3\int d\tau\delta_4(x-z)(u^iu^j/\sqrt{-g})$, que l'on linéarise et décompose en parties scalaire, vectorielle et tensorielle. Les équations d'Einstein se scindent alors en trois groupes, scalaire, vectoriel et tensoriel, et l'on admettra, par analogie avec l'électromagnétisme, que les deux premiers décrivent la partie statique du champ gravitationnel créé par les masses et ne contribuent pas au rayonnement d'énergie à l'infini. Le troisième groupe, qui, rappelons-le, concerne l'évolution de $\bar{E}_{\alpha\beta}$, la partie invariante de jauge, transverse et sans trace des perturbations spatiales de la métrique, s'écrit : $\Box\bar{E}_{\alpha\beta}=-(8\pi G/c^4)\bar{T}_{\alpha\beta}$ dont la solution retardée est un potentiel de Liénard-Wiechert, analogue à (4.1.11) :

$$\bar{E}_{\alpha\beta}=-2\frac{G}{c^2}\sum m\left(\frac{\overline{u_\alpha u_\beta}}{r}\right)_R. \tag{4.4.2}$$

Loin du système, et lorsque les vitesses des masses sont faibles par rapport à celle de la lumière cette expression devient l'analogue de (4.1.13) :

$$\bar{E}_{\alpha\beta}\simeq -2\frac{G}{c^4}\sum m\left(\frac{\overline{v_\alpha v_\beta}}{X_0}\right)_R. \tag{4.4.3}$$

Ces potentiels décrivent une onde plane se propageant hors du système. Dans la jauge transverse sans trace les composantes utiles de la métrique (i.e. celles qui contribuent au rayonnement) se réduisent à (4.4.3). De même que dans l'expression (4.1.13) du potentiel électromagnétique, on peut exprimer $\sum e\bar{v}_\alpha$ en fonction de la partie sans divergence du moment dipolaire du système, qui se réduit à sa composante perpendiculaire à $\vec{n}$, de même on montre que (4.4.3) peut se réécrire sous la forme :

$$\bar{E}_{\alpha\beta}=\frac{2G}{c^4X_0}P_{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{d^2Q^{\gamma\delta}}{dt^2}(t-X_0/c), \tag{4.4.4}$$

où

$$P_{\alpha\beta\gamma\delta}=(\delta_{\alpha\gamma}-n_\alpha n_\gamma)(\delta_{\beta\delta}-n_\beta n_\delta)-\frac{1}{2}(\delta_{\alpha\beta}-n_\alpha n_\beta)(\delta_{\gamma\delta}-n_\gamma n_\delta), \tag{4.4.5}$$

et où $Q^{\alpha\beta}\equiv\sum m(z^\alpha z^\beta-\frac{1}{3}\delta^{\alpha\beta}\vec{z}^2)$ est le moment quadrupolaire du sytsème.

Le pseudo-tenseur énergie-impulsion correspondant, ainsi que le bilan d'énergie qui découle de sa conservation sont donnés par (4.4.1). Un calcul analogue à celui qui fait passer de (4.1.13) à (4.1.17) conduit à la "formule du quadrupôle" (Cf e.g. le Landau-Lifchitz) :

$$\frac{d}{dt}E=\frac{G}{5c^5}\left[\frac{d^3}{dt^3}Q_{\alpha\beta}(t-X_0/c)\right]^2. \tag{4.4.6}$$

L'énergie (4.4.6) perdue par un système massif sous forme d'ondes gravitationnelles est faible. Prenons l'exemple d'une barre de masse m, longueur l, tournant autour de son centre avec une pulsation ω (de sorte que t_{ij}, quadratique en h oscille avec une pulsation 2ω). On a alors : $dE/dt = -(2G/45c^5)m^2l^4\omega^6$; pour $m = 1$ kg, $l = 1$ m, $\omega = 1$ rd/sec : $dE/dt \approx 10^{-54}$ watt, à comparer par exemple au bruit thermique à 1 degré K : 10^{-23} watt...

Mécanique Céleste Relativiste

2. Effets relativistes dans le système solaire

1. Système solaire et champ de Schwarzschild

La masse du soleil est 10^6 fois celle de la Terre, et mille fois celle de Jupiter, la planète la plus massive du système solaire. On peut donc, en toute première approximation, négliger dans le système solaire le champ gravitationnel de tous les astres autres que le soleil. Dans le cadre de la théorie newtonienne, les trajectoires des planètes sont alors les ellipses képlériennes. Une telle approximation, on le sait, est très grossière. Ceci étant le champ dans le système solaire est faible, au sens relativiste, puisque le rapport sans dimension qui le caractérise, GM/c^2R, est partout inférieur à $GM_\odot/c^2R_\odot \simeq 2\times 10^{-6}$. Les corrections relativistes pourront donc simplement être ajoutées aux perturbations newtoniennes dues aux autres planètes.

Ainsi on peut, en première approximation, traiter les effets relativistes dans le système solaire en faisant comme si le champ gravitationnel était dû au seul soleil, qu'on peut de surcroît supposer à symétrie sphérique. La géométrie de l'espace-temps correspondant à ce modèle est alors celle de Schwarzschild dont la métrique, en coordonnées de Schwarzschild (r), isotropes $(r = \bar{r}(1+m/2\bar{r})^2)$ et harmoniques $(\tilde{r} = r - m)$ est :

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1-\frac{2m}{r}\right)c^2dt^2 + \frac{dr^2}{1-2m/r} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \\ &= -\left(\frac{1-m/2\bar{r}}{1+m/2\bar{r}}\right)^2 c^2dt^2 + \left(1+\frac{m}{2\bar{r}}\right)^4 (d\bar{r}^2 + \bar{r}^2d\theta^2 + \bar{r}^2\sin^2\theta d\phi^2) \\ &= -\left(\frac{\tilde{r}-m}{\tilde{r}+m}\right)c^2dt^2 + \left[\left(1+\frac{m}{\tilde{r}}\right)^2\delta_{\alpha\beta} + \left(\frac{\tilde{r}+m}{\tilde{r}-m}\right)\frac{m^2}{\tilde{r}^4}x_\alpha x_\beta\right]dx^\alpha dx^\beta, \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

où $m = GM_\odot/c^2 \simeq 1.5$ km. La petitesse de m par rapport aux distances typiques dans le système solaire implique que seul un développement limité de (5.2.1) aux plus bas ordres sera nécessaire.

Dans ce modèle schwarzschildien, les planètes sont assimilées à des particules d'épreuve et suivent donc les géodésiques du champ, d'équation :

$$\frac{Du^i}{d\lambda} \equiv u^jD_ju^i \equiv \frac{d^2x^i}{d\lambda^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{d\lambda}\frac{dx^k}{d\lambda} = 0 \tag{5.2.2}$$

où $u^i = dx^i/d\lambda$ et où λ paramétrise la courbe (λ tel que $d\lambda = \sqrt{-ds^2/c^2} \equiv d\tau$ est le paramètre habituellement choisi pour les trajectoires du genre temps des particules massives).

Lorsque l'espace-temps est décrit par la métrique de Schwarzschild (5.2.1) les solutions de (5.2.2) peuvent s'obtenir par une intégration directe (cf e.g. le Weinberg). Il est cependant plus rapide de noter que la métrique de Schwarzschild étant statique et à symétrie sphérique dans les systèmes de coordonnées (5.2.1), on peut associer aux particules des quantités conservées, intégrales premières de leur mouvement : une énergie et un moment cinétique, qui reflètent les symétries de l'espace-temps. En écrivant l'équation géodésique (5.2.2) sous la forme : $u^iD_iu_j = 0$, soit encore : $u^i\partial_iu_j \equiv du_j/d\lambda = u^i\Gamma^k_{ij}u_k = \frac{1}{2}u^iu^l\partial_jg_{li}$, on a que

$$u_j = Const \quad \text{le long de la trajectoire si} \quad \partial_jg_{kl} = 0, \forall k,l. \tag{5.2.3}$$

Par conséquent, puisque la métrique de Schwarzschild (5.2.1) ne dépend ni du temps $ct = x^0$ ni de l'angle azimuthal $\phi = x^3$, $u_0 = g_{00}u^0$ et u_3 sont conservés. On écrira donc, dans les coordonnées de Schwarzschild :

$$u_0 \equiv g_{00}\frac{cdt}{d\lambda} = -\left(1-\frac{2m}{r}\right)\frac{cdt}{d\lambda} = -\frac{E}{c^2} \quad , \quad u_3 \equiv g_{33}\frac{d\phi}{d\lambda} = r^2\sin^2\theta\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{L}{c} \tag{5.2.4}$$

où E et L s'identifieront à l'énergie et au moment cinétique par unité de masse de la particule. Par ailleurs la symétrie sphérique implique que toutes les sections $\theta = Cte$ sont équivalentes (on montre d'ailleurs facilement à partir de l'équation géodésique (5.2.2) qu'une particule initialement telle que $\theta = \pi/2, d\theta/d\lambda = 0$ demeure en $\theta = \pi/2$; on se placera donc en $\theta = \pi/2$). On déduit alors de l'expression de l'élément de longueur (5.2.1), en coordonnées de Schwarzschild :

$$-\epsilon = -\frac{E^2/c^4}{1-2m/r} + \frac{1}{1-2m/r}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{L^2}{c^2r^2} \tag{5.2.5}$$

où $\epsilon = +1$ pour les géodésiques du genre temps (auquel cas on prendra $\lambda = \tau$), et $\epsilon = 0$ pour les photons. Cette équation se réécrit :

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = \frac{E^2}{c^4} - U_e \qquad \text{avec} \qquad U_e = \left(1-\frac{2m}{r}\right)\left(\epsilon + \frac{L^2}{c^2r^2}\right). \tag{5.2.6}$$

En gravitation newtonienne toute particule de moment angulaire non nul peut avoir une orbite stable autour de l'objet central ; en relativité générale en revanche il faut que $L^2 > 12m^2c^2$. Par ailleurs, en théorie de Newton, les photons, de masse nulle, se propagent en ligne droite ; ce n'est pas le cas en relativité générale où ils peuvent même orbiter en $r = 3m$ autour du corps central.

2. Trajectoires post-newtoniennes et avance du périhélie

La manière standard d'obtenir les équations des trajectoires, à partir de (5.2.4) et (5.2.5) consiste à former le rapport de $(dr/d\lambda)^2$ et de $(d\phi/d\lambda)^2$, à poser $u = 1/r$, et à dériver, ce qui conduit à :

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \epsilon\frac{mc^2}{L^2} + 3mu^2 \tag{5.2.7}$$

que l'on peut intégrer en termes de fonctions elliptiques.

Lorsque $r \gg 2GM/c^2$ l'équation (5.2.7) se résout itérativement. Pour $\epsilon = 1$, $L \neq 0$, $|E| < c^2$, la solution de l'équation d'ordre zéro, newtonien : $d^2u/d\phi^2 + u = GM/L^2$, est l'ellipse képlérienne : $u = u_N = (1 + e\cos\phi)/a(1-e^2)$ avec

$$a(1-e^2) = \frac{L^2}{GM} \quad , \quad e^2 = 1 + \left(\frac{L^2}{c^2m^2}\right)\left(\frac{E^2}{c^4} - 1\right) \simeq 1 + \left(\frac{L^2}{G^2M_\odot^2}\right)\left(-2\epsilon + \frac{\epsilon^2}{c^2}\right), \tag{5.2.8}$$

au premier ordre en c^{-2} avec $E = c^2(1 - 2\epsilon/c^2)$, $\epsilon > 0$. Au premier ordre l'équation est donc :

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u \simeq \frac{GM}{L^2} + \frac{3G^3M^3}{c^2L^4}(1 + e\cos\phi)^2 \tag{5.2.9}$$

dont il faut trouver une solution particulière. On vérifie qu'il en est une de la forme $u = u_N + \alpha\cos 2\phi + \beta\sin 2\phi + A\phi\sin\phi$. En reportant en effet cet anzatz dans (5.2.9), on trouve :

$$\begin{aligned} u &\simeq \frac{GM}{L^2}\left[1 + e\,\cos\phi + \frac{G^2M^2}{c^2L^2}\left(3 + \frac{3}{2}e^2 - \frac{1}{2}e^2\cos 2\phi + 3\phi\sin\phi\right)\right] \\ &\simeq \frac{GM}{L^2}\left[1 + e\,\cos\left(1 - 3G^2M^2/c^2L^2\right)\phi + \frac{G^2M^2}{c^2L^2}\left(3 + \frac{3}{2}e^2 - \frac{1}{2}e^2\cos 2\phi\right)\right]. \end{aligned} \tag{5.2.10}$$

Ceci est l'équation d'une ellipse déformée qui précesse. Il faut cependant remarquer que la forme exacte de la trajectoire dépend du système de coordonnées choisi. Si au lieu de la coordonnée de Schwarzschild r on utilisait la coordonnée harmonique $\tilde{r}$ ou isotropique $\bar{r}$ (égales au premier ordre : $\tilde{r} \simeq \bar{r} \simeq r - m$), on aurait :

$$\tilde{u} \equiv \frac{1}{\tilde{r}} \simeq \frac{1 + e_\phi \cos\left(1 - 3G^2M^2/c^2L^2\right)\phi}{a_r(1-e_\phi^2)}, \tag{5.2.11}$$

avec, à l'ordre c^{-2},

$$e_\phi = e\left[1 - (1+e^2)\frac{2G^2M_\odot^2}{c^2L^2}\right] \quad , \quad a_r(1-e_\phi^2) = \frac{L^2}{GM_\odot}\left[1 - \frac{2G^2M_\odot^2}{c^2L^2}(2+e^2)\right], \tag{5.2.12}$$

ce qui est l'équation d'une ellipse qui précesse sans déformation.

Pour obtenir la dépendance temporelle, le plus simple est de procéder comme suit : en développant toutes les expressions jusqu'à l'ordre $1/c^2$, on obtient, à partir de (5.2.4-6) :

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \simeq A + \frac{2B}{r} + \frac{C}{r^2} + \frac{D}{c^2r^3} \qquad , \qquad \frac{d\phi}{dt} \simeq \frac{H}{r^2} + \frac{I}{c^2r^3} \tag{5.2.13}$$

où les coefficients A, B, C... sont donnés par :

$$\begin{cases} A = -\epsilon(2 + 3\dfrac{\epsilon}{c^2}) \quad , \quad B = GM_\odot(1 + 6\dfrac{\epsilon}{c^2}) \quad , \quad C = -L^2(1 + 2\dfrac{\epsilon}{c^2}) - 8\dfrac{G^2M_\odot^2}{c^2} \\ D = 6GM_\odot L^2 \quad , \quad H = L(1 + \dfrac{\epsilon}{c^2}) \qquad , \qquad I = -2GM_\odot L. \end{cases} \tag{5.2.14}$$

En effectuant alors les transformations "conchoïdales" $r = r_1 + D/2C$ et $r = r_2 + I/2H$, on ramène (5.2.13) aux équations quasi-newtoniennes :

$$\left(\frac{dr_1}{dt}\right)^2 \simeq A + \frac{2B}{r_1} + \frac{\bar{C}}{r_1^2} \qquad , \qquad \frac{d\phi}{dt} \simeq \frac{H}{r_2^2} \tag{5.2.15}$$

où $\bar{C} = C - BD/C$, dont les intégrations, standard, donnent, à l'ordre $1/c^2$:

$$\begin{cases} n(t-T) = \eta - e_t \sin\eta \quad , \quad r = a_r(1 - e_r\cos\eta) \\ \tan\left(1 - 3G^2M^2/c^2L^2\right)\phi = \sqrt{\dfrac{1+e_\phi}{1-e_\phi}}\tan\dfrac{\eta}{2} \end{cases} \tag{5.2.16}$$

avec :

$$\begin{cases} n = (-A)^{3/2}/B \quad , \quad e_t = \left[1 - \dfrac{A}{B^2}\left(C - \dfrac{BD}{C}\right)\right]^{1/2} \\ a_r = -\dfrac{B}{A} + \dfrac{D}{2C} \quad , \quad e_r = \left(1 + \dfrac{AD}{2BC}\right)e_t, \end{cases} \tag{5.2.17}$$

et e_ϕ donné par (5.2.12), ou bien $e_\phi = e_t(1 + AD/BC - AI/BH) = e_r(1 + AD/2BC - AI/BH)$. Il est en fait remarquable que la trajectoire post-newtonienne puisse se mettre sous une forme si similaire à sa limite newtonienne où les trois excentricités e_t, e_ϕ et e_r deviennent égales.

La correction dominante dans (5.2.11), (5.2.16) est le terme séculaire, qui rend l'orbite non périodique : la trajectoire est une ellipse, déformée ou non suivant le système de coordonnées choisi, dont le grand axe tourne lentement dans le plan $\theta = \pi/2$, d'un angle :

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{1 - 3G^2M^2/c^2L^2} - 2\pi \simeq \frac{6\pi G^2M^2}{c^2L^2} \simeq \frac{6\pi GM}{c^2a(1-e^2)} \tag{5.2.18}$$

par période.

L'angle $\Delta\omega$ est un angle-coordonnée. Ce serait effectivement un angle mesuré sur la terre (qui est loin du soleil), si la lumière en provenance de la planète se propageait en ligne droite. Ce n'est pas le cas. Ceci étant, comme la précession est un effet cumulatif, $N\Delta\omega$, au bout de N tours—$N \gg 1$—, est suffisamment grand pour que la distortion dans la propagation des rayons lumineux (cf plus bas) puisse être négligée, et peut être comparé directement aux observations. Pour Mercure, $T = 88$ jours, $a = 5.8 \times 10^{12}$ cm, $e = 0.2$; par ailleurs $m_\odot = 1.5 \times 10^5$ cm et donc :

$$\Delta\omega = 43\text{"}/\text{siècle}. \tag{5.2.19}$$

Ce résultat, obtenu par Einstein en 1915, coïncide avec la précession, inexplicable en théorie newtonienne, découverte 70 ans plus tôt par le Verrier*. Les observations astronomiques des trois derniers siècles donnent le résidu (5.2.19) avec une précision de 10^{-2} (rappelons que la précession totale observée est plus de cent fois supérieure : la précession totale est donc connue à 10^{-6} près). Les mesures radar des positions des planètes effectuées depuis 1975 ont permis d'augmenter la précision d'un facteur 2. Malgré cette remarquable coïncidence entre observation et prédiction on a pu objecter qu'une partie du résidu pouvait en principe être attribuée au moment quadrupolaire du soleil (Dicke 1974). Mais grâce à l'étude des modes de vibration du soleil on connaît maintenant bien ses mouvements internes et cette explication est devenue peu plausible.

3. Déflection des rayons lumineux et effet Shapiro

Considérons maintenant le cas des photons ($\epsilon = 0$). A l'ordre newtonien leurs trajectoires sont des droites $u = \sin\phi/R$ où R est le rayon d'approche minimale. Au premier ordre l'équation (5.2.7) devient donc : $d^2u/d\phi^2 + u \simeq (3m/R^2)\sin^2\phi$ dont une solution particulière est approximativement :

$$u \simeq \frac{\sin\phi}{R} + \frac{3m}{2R^2}\left(1 + \frac{1}{3}\cos 2\phi\right). \tag{5.2.20}$$

Pour $r \to \infty$, i.e. $u \to 0$, ϕ ou $\pi - \phi$ sont petits et tendent vers $-2m/R$. Un photon arrivant de l'infini, passant à la distance R du centre, est donc dévié d'un angle :

$$\Delta\phi \simeq \frac{4GM}{c^2R}. \tag{5.2.21}$$

Comme la lumière vient de l'infini et est observée loin du soleil, l'angle $\Delta\phi$ est un angle effectivement mesuré.

C'est un exercice instructif de calculer $\Delta\phi$ en utilisant le système de coordonnées isotropiques. La trajectoire d'un rayon lumineux y est déterminée par la nullité de l'intervalle et l'équation géodésique. Supposons-le émis dans le plan $\theta = \pi/2$ le long de l'axe $\bar{x}(= \bar{r}\cos\phi)$, avec le paramètre d'impact R. Au premier ordre en $m/\bar{r}$ on a alors :

$$\begin{aligned} 0 &\simeq -\left(1 - \frac{2m}{\bar{r}}\right)c^2dt^2 + \left(1 + \frac{2\gamma m}{\bar{r}}\right)(d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2) \\ 0 &\simeq \frac{d^2\bar{y}}{d\lambda^2} + \Gamma^y_{00}\left(c\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \Gamma^y_{xx}\left(\frac{d\bar{x}}{d\lambda}\right)^2 \end{aligned} \tag{5.2.22}$$

où $\gamma = 1$ (si γ était nul les sections spatiales seraient euclidiennes). De la première équation on tire, à l'ordre le plus bas : $cdt/d\lambda \simeq d\bar{x}/d\lambda$; par ailleurs, au même ordre : $d^2\bar{y}/d\lambda^2 \simeq (d^2\bar{y}/d\bar{x}^2)(d\bar{x}/d\lambda)^2$; l'équation géodésique se réduit donc à : $d^2\bar{y}/d\bar{x}^2 + \Gamma^y_{00} + \Gamma^y_{xx} = 0$. Le calcul des symboles de Christoffel est immédiat : $\Gamma^y_{00} \simeq m\bar{y}/\bar{r}^3$ et $\Gamma^y_{xx} \simeq m\gamma\bar{y}/\bar{r}^3$. On obtient donc :

$$\begin{aligned} \Delta\phi &\simeq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2\bar{y}}{d\bar{x}^2}d\bar{x} \simeq 2m(1+\gamma)\int_0^{+\infty} \frac{Rd\bar{x}}{(\bar{x}^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &\simeq \frac{2GM(1+\gamma)}{c^2R}. \end{aligned} \tag{5.2.23}$$

* Cette découverte fut semble-t-il pour Einstein la plus grande émotion de sa vie scientifique (A.Pais).

Comme $\gamma = 1$ on retrouve (5.2.21) (à l'ordre considéré, paramètre d'impact et distance d'approche minimale sont égaux), mais on voit que si l'on avait ignoré la courbure de l'espace, ainsi que le fit Einstein en 1907, on aurait obtenu une valeur moitié, égale (par accident) à sa valeur newtonienne.

Pour un rayon frôlant la surface du soleil, $GM_\odot/c^2R_\odot = 2 \times 10^{-6}$, et (21) donne (Einstein 1915) :

$$\Delta\phi = 1.75''. \tag{5.2.24}$$

La mesure (assez grossière) de cet effet par Arthur Eddington lors d'une expédition à Sobral au Brésil en 1919, et son annonce à la Royal Society de Londres scella le triomphe de la théorie*. L'effet reste difficile à mesurer mais l'observation radio de la variation de l'angle entre une certaine paire de quasars dont un membre est annuellement occulté par le soleil permet maintenant d'atteindre une précision de quelques pour cent.

La déviation des rayons lumineux peut même conduire à des effets de "mirages gravitationnels". Le phénomène, prédit par Zwicky dès les années 30, étudié par Einstein lui-même, fut observé en 1979 par Weymann et al. sur des quasars. On en connait maintenant des dizaines d'exemples. Les images peuvent être multiples, voire former des arcs (Toulouse), en fonction de la géométrie et de la structure de la matière dans la galaxie déflectrice. On a même pu mesurer (Meudon, M.I.T.) la différence des trajets des deux rayons, de plus d'une centaine de jours-lumière. On peut aussi interpréter la déviation comme un effet de "lentille" dû à l'objet déflecteur et l'on peut montrer que la luminosité de l'objet défléchi est considérablement accrue s'il est près de l'axe de visée de l'object déflecteur. C'est là un moyen de détecter des objets, invisibles autrement, qui a permis (Saclay, 1994) la mise en évidence directe de matière sombre (naines brunes ?).

Calculons maintenant le temps que met un signal électromagnétique pour aller d'un point 1 à un point 2 du système solaire : En utilisant la relation (5.2.4) entre temps propre et coordonnée, on réécrit l'équation (5.2.5) de la trajectoire d'un photon ($\epsilon = 0$) sous la forme :

$$\frac{dr}{cdt} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\left[1 - \frac{1-2m/r}{1-2m/R}\left(\frac{R}{r}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{5.2.25}$$

où l'on a introduit la distance R d'approche minimale au soleil (telle que $dr/dt|_R = 0$). Au premier ordre en m/r et m/R, (25) s'intègre pour donner le temps coordonnée pour aller de r en R :

$$ct(r,R) \simeq \sqrt{r^2 - R^2} + 2m \ln\left(\frac{r + \sqrt{r^2 - R^2}}{R}\right) + m\sqrt{\frac{r-R}{r+R}}. \tag{5.2.26}$$

Le premier terme est ce qu'on obtiendrait si la lumière se propageait en ligne droite à c. Le temps total pour aller de 1 à 2 est donc $t_{12} = t(r_1, R) + t(R, r_2)$ (pour $|\phi_1 - \phi_2| > \pi/2$). Si le signal en arrivant en 2 est réfléchi vers 1 et si l'on néglige le mouvement de 1, la durée de l'aller retour est $2t_{12}$. Cet effet fut calculé en 1964 par Shapiro et mesuré par lui en 1968 puis en 1972 à l'aide de signaux radar émis par les stations de Haystack (Massachusetts) et Arecibo (Porto Rico) en direction de Mercure et Vénus. La précision atteinte fut de l'ordre de 10 %. Le retard étant d'environ 200μsec sa mesure précise nécessite une bonne connaissance de la topographie de la planète (Vénus par exemple présente des dénivelés de l'ordre de 1500 m soit 5μsec) ; de plus la couronne solaire, en réfractant les signaux, introduit des délais supplémentaires qu'il faut éliminer ; enfin comme le trajet dure une vingtaine de minutes, une précision de 10μsec implique que la position des planètes soit connue à mieux de 1.5 km près. L'effet fut ensuite mieux mesuré en prenant pour cible des sondes spatiales, telles Mariner 6 et 7, mais à cause du vent solaire en particulier leur mouvement est assez

---

* Whitehead décrit ainsi la séance du 6 Novembre : "L'atmosphère d'intense émotion fut exactement celle du drame grec. Nous formions le Chœur qui commente les décrets du destin, tels qu'ils sont révélés par le cours de l'événement suprême. Il y avait une valeur de drame dans le très scénique, très traditionnel cérémonial avec, en arrière plan, le portrait de Newton pour nous rappeler que la plus grande généralisation de la Science, venait, après plus de deux siècles, de recevoir sa première atteinte. Nul intérêt personnel ne se trouvait en jeu : c'est une grande aventure de la pensée qui venait d'aborder heureusement au rivage".

erratique, avec des “sauts de carpe” pouvant atteindre 30 m soit 0.1μsec ; c’est en fin de compte grâce au réflecteur installé sur Mars par la sonde Viking que les meilleures mesures furent obtenues : l’effet (5.2.26) est maintenant connu à 10^{-3} près.

Il est important de noter que la précision des mesures est maintenant telle qu’on ne peut dans (5.2.26) confondre coordonnées schwarzschildiennes, isotropiques ou harmoniques. C’est donc à des tests globaux de la relativité générale que l’on est conduit, où les temps d’arrivée des signaux sont ajustés à des formules les prédisant en fonction de centaines de paramètres incluant effets relativistes et perturbations newtoniennes. (Pour une analyse exhaustive des tests de la relativité générale dans le système solaire voir le Will.)

3. Efftes dûs aux rotations des corps

1. Les limitations de la solution de Schwarzschild

Nous avons étudié dans le paragraphe précédent les corrections relativistes aux trajectoires des planètes et des photons du système solaire en décrivant le champ gravitationnel y régnant comme un champ de Schwarzschild. Or la solution de Schwarzschild est exacte, statique et à symétrie sphérique, propriétés soit superflue soit mal-venues.

D’une part en effet nous n’avons utilisé que des développements limités de la métrique en puissances de m/r, développement qui, en coordonnées isotropiques, s’écrit [cf (5.2.1)] :

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{\bar{r}} + \frac{2\beta m^2}{\bar{r}^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 + \frac{2\gamma m}{\bar{r}}\right)(d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\theta^2 + \bar{r}^2 \sin^2\theta d\phi^2). \tag{5.3.1}$$

En fonction des paramètres β et γ (qui valent 1 en relativité générale) l’effet Shapiro est donné par (5.2.26) où le coefficient du logarithme est $(1+\gamma)$ au lieu de 2 ; la déflection des rayons lumineux est donnée par (5.2.23); quant à l’avance du périhélie (5.2.18) elle vaut :

$$\Delta\omega = \left(\frac{2 - \beta + 2\gamma}{3}\right) \frac{6\pi GM}{c^2 p}. \tag{5.3.2}$$

On voit ainsi que s’il nous a fallu, pour obtenir l’avance du périhélie, connaître la composante g_{00} de la métrique à l’ordre $(m/r)^2$, l’approximation linéaire suffit pour calculer les autres effets.

La solution de Schwarzschild décrit en revanche médiocrement, étant statique et à symétrie sphérique, le champ gravitationnel dans le système solaire, qui n’est ni statique ni à symétrie sphérique, du fait du mouvement des grosses planètes et de la rotation du soleil sur lui-même.

Le problème est donc : quelle est la géométrie de l’espace-temps loin de corps dont les mouvements sont lents, à l’approximation post-newtonienne de la relativité générale.

2. Stratégie de l’approximation post-newtonienne

N.B. : On ne résumera ici que les grandes lignes de l’exposé de S. Weinberg p. 211 et seq., pour indiquer comment on arrive à la métrique (5.3.11) ci-dessous.

Le but étant de décrire le mouvement des planètes, on cherche l’expression de la métrique dans la région de l’espace-temps où elles se meuvent (appellée *zone proche*). Les vitesses et le champ gravitationnel y étant faibles, l’idée est de développer la métrique autour de celle de Minkowski en puissances d’un petit paramètre : v^2 où v est la vitesse orbitale de l’objet considéré ($c = 1$). Par la loi de Newton, GM/r, où M est la masse du soleil et r sa distance à la planète, est du même ordre : $GM/r \approx v^2$.

On écrit donc, formellement (dans un système de coordonnées pour l’instant arbitraire) :

$$g_{00} = -1 + g_{00}^{(2)} + g_{00}^{(4)} + \dots \quad , \quad g_{0\alpha} = g_{0\alpha}^{(3)} + \dots \quad , \quad g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}^{(2)} + \dots. \tag{5.3.3}$$

(La parité est fixée par la condition que la métrique reste invariante par renversement du temps ; les ordres sont justifiés a posteriori.) On déduit de (5.3.3) les expressions des symboles de Christoffel :

$$\Gamma_{00}^{(2)\alpha} = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial g_{00}^{(2)}}{\partial x^\alpha} \quad , \quad \Gamma_{00}^{(3)0} = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial g_{00}^{(2)}}{\partial t} \quad \dots \tag{5.3.4}$$

(La dérivation par rapport au temps augmente l'ordre car $\partial/\partial x^\alpha \approx 1/r \gg \partial/\partial t \approx v/r$.) On obtient enfin les composantes du tenseur de Ricci :

$$R_{00} = R_{00}^{(2)} + R_{00}^{(4)} \quad \text{avec} \quad R_{00}^{(2)} = \tfrac{1}{2}\triangle g_{00}^{(2)} \quad \text{etc} \tag{5.3.5}$$

où $\triangle$ est le laplacien plat ordinaire : $\triangle = \delta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta$. On s'aperçoit alors que si le système de coordonnées est restreint à être *harmonique*, i.e. tel que :

$$\partial_i(\sqrt{-g}g^{ik}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g^{ij}\Gamma^k_{ij} = 0, \tag{5.3.6}$$

l'expression du tenseur de Ricci de simplifie beaucoup : $R_{00}^{(2)}$ est toujours donné par (5.3.5) et les autres composantes sont :

$$\begin{aligned} R_{00}^{(4)} &= \tfrac{1}{2}\triangle g_{00}^{(4)} - \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{00}^{(2)}}{\partial t^2} - \tfrac{1}{2}g_{\alpha\beta}^{(2)}\frac{\partial^2 g_{00}^{(2)}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + \tfrac{1}{2}(\triangle g_{00}^{(2)})^2 \\ R_{0\alpha}^{(3)} &= \tfrac{1}{2}\triangle g_{0\alpha}^{(3)} \quad , \quad R_{\alpha\beta}^{(2)} = \tfrac{1}{2}\triangle g_{\alpha\beta}^{(2)}. \end{aligned} \tag{5.3.7}$$

Il reste à développer de même le tenseur énergie-impulsion décrivant la source du champ, c.-à.-d le soleil et les autres planètes :

$$T^{00} = T^{(0)00} + T^{(2)00} + ... \quad , \quad T^{0\alpha} = T^{(1)0\alpha} + ... \quad , \quad T^{\alpha\beta} = T^{(2)\alpha\beta} + ... \tag{5.3.8}$$

où $T^{(0)00}$ n'est autre que la densité de masse au repos. On arrive ainsi aux équations d'Einstein, que l'on écrit sous la forme : $R_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4}(T_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}T^k_k)$, c-à-d :

$$\triangle g_{00}^{(2)} = -8\pi G T^{(0)00} \quad , \quad \triangle g_{0\alpha}^{(3)} = 16\pi G T^{(1)0\alpha} \quad , \quad \triangle g_{\alpha\beta}^{(2)} = -8\pi G \delta_{\alpha\beta} T^{(0)00} \tag{5.3.9}$$

plus une équation similaire mais plus compliquée pour $\triangle g_{00}^{(4)}$. L'intégration est immédiate et donne :

$$\begin{aligned} g_{00}^{(2)} &= -2\phi \qquad \text{avec} \qquad \phi = -G\int d^3x' \frac{T^{(0)00}(\vec{x}',t)}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \\ g_{0\alpha}^{(3)} &= \zeta_\alpha \qquad \text{avec} \qquad \zeta_\alpha = -4G\int d^3x' \frac{T^{(1)0\alpha}(\vec{x}',t)}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \\ g_{\alpha\beta}^{(2)} &= -2\delta_{\alpha\beta}\phi \qquad \text{et} \qquad g_{00}^{(4)} = -2\phi^2 + \psi. \end{aligned} \tag{5.3.10}$$

Les intégrales sont prises sur toute l'étendue des sources (soleil et planètes) ; $\vec{x} - \vec{x}'$ est la distance spatiale (harmonique) entre la planète et un point courant de la source ; ϕ n'est autre que le potentiel newtonien ; quant à l'expression explicite du second potentiel ψ elle importe peu. Enfin la condition d'harmonicité (5.3.6) s'exprime par $4\partial\phi/\partial t + \vec{\nabla}.\vec{\zeta} = 0$ et est équivalente à la condition de conservation du tenseur d'énergie-impulsion : $\partial_i T^{ij} = 0$.

Si la planète considérée est loin des sources du champ, une dernière étape consiste à développer dans les expressions de ϕ, ζ (et ψ) $|\vec{x} - \vec{x}'|$ selon : $|\vec{x} - \vec{x}'|^{-1} = 1/r + (\vec{x}.\vec{x}')/r^3 + ...$ Si $\vec{x}$ est la distance de la planète au centre de masse des sources on montre (cf le Weinberg pour plus de détails) que le rôle de ψ est seulement de remplacer dans l'expression de ϕ (5.3.10) $M^{(0)}$ par $M = M^{(0)} + M^{(2)}$ (où $M^{(i)} \equiv \int d^3x T^{(i)00}$) où seul importe le fait que M est la masse totale créant le champ. Par ailleurs si le tenseur énergie-impulsion ne dépend pas explicitement du temps on peut aussi montrer (en utilisant la conservation de T^{ij}) que les ζ_α sont les composantes d'un 3-vecteur $\vec{\zeta} = \frac{2G}{r^3}(\vec{x} \wedge \vec{J})$ où $J_\gamma = \int d^3x' \epsilon_{\alpha\beta\gamma} x'^\alpha T^{(1)\beta 0}$ est le moment cinétique de la source. Si l'on choisit l'axe des z parallèle à $\vec{J}$ la métrique cherchée s'écrit en fin de compte :

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{2G^2M^2}{c^4r^2}\right)c^2dt^2 + \left(1 + \frac{2GM}{c^2r}\right)d\vec{x}^2 - \frac{4GJ}{c^3r^3}(xdy - ydx)dt. \tag{5.3.11}$$

On remarque que si $J = 0$, (5.3.11) n'est autre que le développement de la métrique de Schwarzschild (5.2.1) en coordonnées harmoniques. Mais alors que cette dernière avait été obtenue en supposant le champ statique et à symétrie sphérique, la métrique (5.3.11), elle, décrit le champ loin d'un système de masses quelconques, si l'échelle de temps de leurs mouvements est supérieure à r/v. C'est en fait ainsi que l'on justifie l'emploi de la métrique de Schwarzschild pour calculer les effets relativistes dans le système solaire.

3. Principe de mesure des effets de rotation

N.B. : cf les ouvrages de Weinberg et de Misner-Thorne-Wheeler pour plus ample précision.

Quand on écrit (au premier ordre) l'équation géodésique dans le champ (5.3.11) d'un corps en rotation on trouve que le terme croisé proportionnel à $\vec{J}$ agit sur une particule de vitesse $\vec{v}$ comme une force de Coriolis :

$$\vec{a} = 2\vec{v} \wedge \Omega \quad \text{avec} \quad \vec{\Omega} = \frac{1}{2}\vec{\nabla} \wedge \vec{\zeta} = \frac{G}{r^3}\left(\vec{J} - 3\frac{\vec{x}(\vec{J}.\vec{x})}{r^2}\right), \tag{5.3.12}$$

comme si le mouvement était rapporté à un repère tournant à la vitesse $\vec{\Omega}$. Comme un champ magnétique produit un effet analogue on peut parler au sujet de (5.3.12) de *gravito-magnétisme*.

Les effets de cette force, inexistante en théorie newtonienne, sont multiples mais n'ont pu encore être mesurés car trop faibles. Ainsi le moment orbital $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{v}$ d'une planète gravitant autour du soleil se couple au moment cinétique de celui-ci (Lense et Thirring 1918) ; il en résulte une précession de l'orbite dans son plan, à retrancher à (5.2.18) si $\vec{J}$ est parallèle à $\vec{L}$ et valant alors (cf S. Weinberg) :

$$\Delta\omega = -8\pi\frac{JL}{Mp^2} \tag{5.3.13}$$

où p est le paramètre de l'ellipse. Pour Mercure, et en prenant $J_\odot/M_\odot = 0.3$ km, on trouve : $\Delta\omega \approx -2 \times 10^{-3}$"/ siècle. Si les vecteurs $\vec{J}$ et $\vec{L}$ ne sont pas parallèles il s'ajoute à cet effet une précession de $\vec{L}$ autour de $\vec{J}$ donnée par :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{2G}{r^3}\vec{J} \wedge \vec{L} \tag{5.3.14}$$

se traduisant par un mouvement séculaire du plan de l'orbite autour de l'axe de rotation du corps central. Pour un satellite sur une orbite polaire près de la terre la vitesse angulaire de précession est de l'ordre de 0.3"/ an (cf e.g. le Misner Thorne Wheeler.).

Si maintenant la particule test considérée est un gyroscope de moment cinétique intrinsèque $\vec{S}$ il existe tout d'abord, que le corps central soit ou non en rotation, un couplage, dit de précession *géodétique* avec la composante statique du champ, donné par (cf e.g. le Misner Thorne Wheeler) :

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{v} \wedge \left(-\tfrac{1}{2}\vec{a} + \tfrac{3}{2}\vec{\nabla}U\right) \tag{5.3.15}$$

où U est le potentiel newtonien créé par le corps central et $\vec{a}$ l'accélération de la particule si elle n'est pas en chute libre (ainsi $\vec{a} = \vec{\nabla}U$ si le gyroscope est à la surface de la terre). Le terme proportionnel à $\vec{a}$ décrit la précession de Thomas (1927), bien connue en physique atomique. Le second terme, seul présent lorsque le gyroscope suit une géodésique, fut calculé par de Sitter en 1916 puis par H.Weyl (1923). Ainsi un gyroscope autour de la terre précessera d'environ 8"/ an.

A ces effets s'ajoute un couplage spin-spin de $\vec{S}$ avec $\vec{J}$, donné par une formule analogue à (5.3.14) et étudié par L.Schiff (1960). Pour un gyroscope en orbite autour de la terre la précession correspondante doit être de l'ordre de 0.1"/ an.

Tous ces effets se combinent en une formule unique (cf e.g. le Misner Thorne Wheeler) :

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{v} \wedge \left(-\tfrac{1}{2}\vec{a} + \tfrac{3}{2}\vec{\nabla}U\right) - \tfrac{1}{2}\vec{\nabla} \wedge \zeta \tag{5.3.16}$$

qu'une expérience menée par le groupe de F. Everitt à Stanford, consistant à mettre un gyroscope sur orbite polaire, devrait un jour vérifier.

4. Effets dûs au rayonnement d'ondes gravitationnelles

1. Les limitations de l'approximation post-newtonienne

Nous avons étudié le champ de gravitation créé par un corps unique, statique et à symétrie sphérique, décrit par la solution de Schwarzschild (& 2). Nous avons vu ensuite (& 3) quel était le champ créé par un système de corps en mouvements lents, à l'approximation post-newtonienne de la relativité générale, suffisante pour décrire les effets relativistes de rotation dans le système solaire. Ce qu'il nous manque pour compléter notre étude de la mécanique céleste relativiste est le champ créé par deux ou plusieurs objets de masses comparables, éventuellement compacts et donc créant des champs forts, éventuellement aussi en mouvement rapide.

En mécanique newtonienne le problème à deux corps se décompose simplement : le mouvement de translation uniforme du centre de masse et le mouvement d'une particule de masse réduite dans le champ d'une masse centrale. Le problème en relativité générale est beaucoup moins simple car il s'agit en quelque sorte de raccorder deux géométries de Schwarzschild. La symétrie sphérique est donc perdue. De plus on sait que les équations du mouvement des sources sont incluses dans les équations d'Einstein (identités de Bianchi). La staticité est donc perdue aussi. Enfin ces "remous" de la géométrie peuvent se propager au loin sous forme d'ondes gravitationnelles.

Voilà donc un problème très complexe que l'on ne sait pas résoudre exactement. Les études numériques se sont pour l'instant surtout limitées au collisions frontales (dont les symétries permettent de limiter les temps de calcul). Quant aux algorithmes analytiques d'approximation ils se regroupent en deux grandes familles : ceux dans la ligne de l'approximation post-newtonienne, dits souvent de *mouvement lent*, où le paramètre des développements est $v^2 \approx GM/r$; et ceux appelés *post-minkowskiens* (ou parfois de *mouvement rapide*) où l'on ne suppose pas a priori que $v \ll c$ et où les itérations s'effectuent en puissances de la constante de couplage G.

Dans une variante des algorithmes post-minkowskiens adaptés au mouvement des corps compacts (T. Damour et al.) on définit d'abord des régions de champ fort autour de chaque corps et on démontre que si les objets sont condensés (e.g. des étoiles à neutrons) les effets de marée peuvent être négligés. De plus la propriété d'effacement vaut, et l'espace-temps est quasi-schwarzschildien dans leur voisinage. On raccorde ensuite ces régions à l'espace-temps extérieur où le champ est faible ; le raccordement s'effectue ordre par ordre dans la constante de couplage G et impose en lui-même le mouvement des sources.

2. Le mouvement d'un système auto-gravitant

Précisons le schéma d'approximation qui nous a menés à la formule du quadrupôle. Nous avons posé : $g = \eta + h$ (les signes "=" ont ici une valeur symbolique) ; les symboles de Christoffel sont donc de la forme : $\Gamma = g\partial g = (\eta + h)\partial h = \partial h + h\partial h$ et le tenseur d'Einstein est : $G = \partial\Gamma + \Gamma\Gamma = \partial^2 h + (\partial h)^2 + h\partial^2 h + \mathcal{O}(h^3)$. Quant au tenseur d'énergie-impulsion il s'écrit : $T = \sum m \int d\tau\, \delta_4 uu \left(1 + h + \mathcal{O}(h^2)\right)$. Au premier ordre en h, les équations d'Einstein $G = 8\pi T$ se réduisent à : $\partial^2 h = \sum m \int d\tau \delta_4 uu$ dont la solution s'écrit symboliquement : $h_{(1)} = (Gm/r)uu$, où uu est d'ordre 1, v ou v^2 selon les composantes. Au second ordre en h les équations d'Einstein seront du type :

$$\partial^2 h = -\left(\partial h_{(1)}\right)^2 - h_{(1)}\partial^2 h_{(1)} + 8\pi G \sum m \int d\tau\, \delta_4 uu \left(1 + h_{(1)}\right). \tag{5.4.1}$$

Compte tenu de la forme de $h_{(1)}$ on se convainc aisément (en intégrant par exemple le terme d'ordre h dans le tenseur énergie-impulsion) que la métrique au second ordre est de la forme $h = h_{(1)} + h_{(2)}$ où $h_{(2)}$ contient des termes du type : $(Gm/r)(Gm/R)uu$ où R est la distance entre deux des masses. Ainsi donc on peut avoir dans la métrique des termes en $(Gm/r)v^2$ qui proviennent des composantes $\alpha\beta$ de la métrique à l'ordre linéaire ainsi que des termes en $(Gm/r)(GM/R)$ qui proviennent de la métrique au second ordre.

Pour que le schéma d'approximation linéaire, et donc la formule du quadrupôle, soit valable, il faut par conséquent que : $v^2 \gg Gm/R$. Cette condition est satisfaite par les systèmes liés par d'autre forces que la gravitation (e.g. une barre en rotation). Mais si le système considéré est gravitationnellement lié, alors $v^2 \approx Gm/R$, et un calcul rigoureux de la perte d'énergie sous forme d'ondes gravitationnelles exige de calculer la métrique au deuxième ordre. Le calcul, trop lourd pour être présenté ici, confirme cependant la formule du quadrupôle, qui donc s'applique également aux systèmes auto-gravitant (heureuse coïncidence.)

Le problème de la contre-réaction du rayonnement sur le mouvement de masses auto-gravitantes est un problème beaucoup plus difficile en relativité générale que le problème correspondant en électromagnétisme. Si on le traite en écrivant l'équation du mouvement des masses (l'équation géodésique) on tombe en effet sur un problème de renormalisation de la métrique (qui diverge sur des sources ponctuelles) compliqué du fait de la non linéarité des équations d'Einstein. Si l'on cherche à éviter cette difficulté en invoquant comme en électromagnétisme une énergie totale des masses et du champ, conservée, scindable en la somme d'une énergie mécanique des masses et d'une énergie de champ définie par il faut pouvoir définir cette énergie totale, un problème encore débattu dans le cas général. Dans certains cas cependant des bilans ont pu être établi explicitement. Ainsi par exemple l'énergie mécanique newtonienne E_{mec} de deux masses en orbite circulaire est proportionnelle à leur distance X. Si l'on écrit $\dot{E} = -\dot{E}_{mec} \propto \dot{X}$ avec $\dot{E}$ donné par la formule du quadrupôle on obtient une expression pour $\dot{X}$ qui se trouve être en accord avec ce que l'on déduit d'une étude détaillée du mouvement relativiste des deux masses.

Dans le cas général il faut développer les équations d'Einstein jusqu'à l'ordre $(G/c^2)^3$; les intégrer ordre par ordre (dans une jauge harmonique) ; obtenir les équations (géodésiques) du mouvement (l'analogue gravitationnel de (4.1.18)), ce qui implique de subtiles régularisations ; enfin les développer en puissance de v/c. Le résultat final, analogue gravitationnel de (4.1.19), est :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{Gm'}{R^2}\vec{N} + \frac{1}{c^2}\vec{A}_2 + \frac{1}{c^4}\vec{A}_4 + \frac{1}{c^5}A_5 \tag{5.4.2}$$

où les expressions explicites de $\vec{A}_2$ et $\vec{A}_4$ importent peu ici et où la force de réaction est donnée par :

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^5}A_5 = &-\frac{4G^2mm'}{c^5R^3}V^2[\vec{V} - 3\vec{N}(N.V)]+ \\ &+\frac{G^3mm'}{c^5R^4}\left[\left(\frac{208}{15}m' - \frac{24}{5}m\right)(N.V)\vec{N} + \left(-\frac{32}{5}m' + \frac{8}{5}m\right)\vec{V}\right].\end{aligned} \tag{5.4.3}$$

(C'est là qu'on voit–cf le second terme– qu'il fallait itérer trois fois les équations d'Einstein.)

Dans le cas d'un mouvement circulaire on retrouve le résultat déduit de la formule du quadrupôle ; dans le cas général l'effet de la force de réaction se traduit par un retard, cumulatif, de retour au périastre.

3. Le pulsar binaire PSR 1913+16

En 1974 Hulse et Taylor découvraient à l'aide du radio-télescope d'Arecibo à Porto-Rico le pulsar PSR 1913+16—une étoile à neutrons en rotation munie d'un "phare" radio balayant l'espace avec une période de 59 millisecondes. Les temps d'arrivée de ces "pulses" présentaient des fluctuations quasi-périodiques qui permirent de conclure qu'il était en orbite autour d'un compagnon invisible. L'analyse des données montra très vite que l'on avait affaire à un système très compact : deux objets de l'ordre de $1.4M_\odot$, de quelques kms de diamètre, orbitant en 8 heures environ sur une orbite qui tiendrait toute entière à l'intérieur du soleil. C'était donc un laboratoire idéal où tester les théories de la gravitation. L'avance du périastre par exemple y est de $\sim 4^0$ par an ! Ainsi, dès 1979, Taylor pouvait annoncer qu'il mesurait un retard de retour au périastre, signe de perte d'énergie par émission d'ondes gravitationnelles.

Ces mesures sont en parfait accord avec la prédiction théorique des temps d'arrivée sur terre, formule qui tient compte non seulement des effets relativistes sur les orbites jusqu'au troisième ordre en G comme nous l'avons vu, mais aussi des corrections relativistes aux trajectoires des signaux—déviation, effet Shapiro, redshift gravitationnel—à la fois dans la région du pulsar et dans le système solaire.

Depuis que les données s'accumulent, cet effet, qui est la première confirmation de la relativité générale en régime de champ fort et la preuve de l'existence des ondes gravitationnelles, est mesuré avec une précision $\sim 10^{-2}$, ce qui nécessite une connaissance des éléments orbitaux à 10^{-6} près. Quant à l'avance du périastre elle est maintenant connue à mieux de 7×10^{-6} près !

Cette découverte, indirecte mais probante, des ondes gravitationnelles a valu à Hulse et Taylor le prix Nobel 1993.