Nathalie Deruelle

L'ESPACE-TEMPS DE MINKOWSKI

"L'espace en lui-même, le temps en lui-même, sont condamnés à s'évanouir tels de simples ombres, et seule une sorte d'union des deux préserve une réalité indépendante."

Hermann Minkowski, 1908

Relativité restreinte

Représentation de l'espace et du temps

1. Principes de relativité et de constance de la vitesse de la lumière

Einstein en 1905 fonda une nouvelle physique sur deux postulats : le principe de relativité, déjà au cœur de la physique newtonienne, à savoir que les équations de la physique doivent être les mêmes dans tous les repères inertiels et ne permettent donc pas de déterminer leur mouvement de translation uniforme par rapport au référentiel absolu, et le postulat de la constance de la vitesse de la lumière dans le vide : la lumière se propage à la vitesse c dans tous les repères inertiels.[1]

La loi de transformation d'un repère à un autre ne peut donc pas être celle de Galilée, qui implique que la vitesse d'un corps n'est *pas* la même dans deux repères en mouvement relatif, que si elle est c dans $\mathcal{S}$ elle doit être $c' = c - V_0$ dans le repère $\mathcal{S}'$ allant à la vitesse V_0 par rapport à $\mathcal{S}$.

Or les transformations de Galilée forment un sous-groupe des déplacements rigides, qui préservent la forme de l'élément de longueur de l'espace euclidien $\mathcal{E}_3$, *cf* livre ND-JPU. Rejeter les transformations de Galilée implique donc abandonner l'idée de représenter l'espace par $\mathcal{E}_3$, le temps par un paramètre universel t et l'espace-temps par un fibré $\mathcal{E}_3 \times R$.

2. L'espace-temps absolu

En relativité restreinte, lieux *et* instants, ou *événements*, sont représentés par un ensemble de points p, $\{p\} = M_4$, l'*espace-temps absolu*. M_4 est postulé *pseudo*-euclidien, à quatre dimensions, de sorte que les points-événements peuvent être distingués par un système de quatre coordonnées *minkowskiennes* (ou *pseudo-cartésiennes*) X^i $(i = 0, 1, 2, 3)$. La distance, ou *intervalle* entre deux points infiniments voisins de coordonnées X^i et $X^i + dX^i$ est donné par un théorème de Pythagore généralisé

$$\begin{aligned} ds^2 &= -(dX^0)^2 + (dX^1)^2 + (dX^2)^2 + (dX^3)^2 \\ &= \sum_{i,j} \eta_{ij} dX^i dX^j = \eta_{ij} dX^i dX^j = dX_j dX^j \,. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Les dernières égalités définissent les coefficients η_{ij}, rappellent la convention de sommation d'Einstein ainsi que l'opération d'abaissement d'indice : $dX_j \equiv \eta_{ij} dX^i$ (ainsi $dX_\alpha = dX^\alpha$ mais $dX^0 = -dX_0$). Le repère d'espace-temps absolu $\mathcal{S}$ est l'ensemble de l'origine O de coordonnées $(0, 0, 0, 0)$ et des quatre axes orthonormés $\{X^0, X^1, X^2, X^3\}$.

Les coordonnées X^i du point p peuvent aussi être vues comme les composantes du 4-vecteur position Op. De même dX^i représente un incrément de coordonnée ou, de manière équivalente, la i-ème composante

[1] numériquement : $c = 299\,792\,458$ m/s.
Ce n'est pas parce que le principe de relativité est limité au repères inertiels qu'il est qualifié de *restreint* ; nous verrons en effet qu'il peut être élargi à tout repère : le principe est *restreint* aux interactions autres que gravitationnelles.

du vecteur infinitésimal $dp = dX^i e_i$ où $e_i \equiv \frac{\partial}{\partial X^i}$ est une base orthornormée de M_4 . La formule précédente définit donc une métrique dite *métrique de Minkowski*, notée

$$\ell = \eta_{ij} \mathrm{d}X^i \otimes \mathrm{d}X^j \equiv \eta_{ij}\, \mathrm{d}X^i\, \mathrm{d}X^j \tag{2.2}$$

où $\mathrm{d}X^i \equiv \epsilon^i$ est la forme différentielle associée à $\frac{\partial}{\partial X^i} = e_i$.[2]

Les coordonnées X^α $(\alpha = 1, 2, 3)$ sont *spatiales* ; $T \equiv \frac{X^0}{c}$ est le *temps-coordonnée*.[3] Si $\ell(dp, dp) > 0$, la distance/intervalle entre p et $(p + dp)$ est du *genre espace* ; si $\ell(dp, dp) < 0$, elle est du *genre temps* ; quant à l'équation $\ell(dp, dp) = 0$, elle définit les *cônes de lumière*. L'ensemble des événements p' (dits "à l'intérieur du cône"), dont la distance à p est du genre temps et tels que $T' > T$, représentent le *futur* de p (ou son *passé* si $T' < T$).

3. Référentiel absolu

Une section $X^0 = Const.$ de l'espace-temps de Minkowski est un espace euclidien $\mathcal{E}_3$. La concrétisation d'un repère cartésien s'effectue comme en physique newtonienne par le choix d'un trièdre solide orienté, construit à l'aide d'instruments rigides, en utilisant le théorème de Pythagore ordinaire. Les trois coordonnées X^α repèrent ainsi le lieu de l'événement p. Quant à la coordonnée de temps T elle est concrétisée par le temps d'horloges idéales *immobiles* dans le référentiel, c.-à-d. situées en $X^\alpha = Const.$

Le référentiel doit être "inertiel" ce qui, comme en physique newtonienne, signife concrètement que les particules libres doivent y etre en mouvement rectiligne uniforme.

La différence la plus importante entre physiques newtonienne et einsteinienne est peut-être le fait qu'en physique newtonienne *toutes* les (bonnes) horloges, quel que soient leurs mouvements, sont censées mesurer le même temps ; en relativité restreinte des horloges en mouvement relatif ne mesureront pas, *a priori*, le même temps ; les notions de "présent" et de simultanéité ne sont plus universelles ; on ne peut plus affirmer par exemple, comme en physique newtonienne, que la durée d'un périple doit être la même à la montre du voyageur et à celle du sédentaire.[4]

4. Cinématique

Le mouvement d'un objet matériel P sans étendue et sans structure interne est représenté par une *ligne d'univers i.e.* une courbe de M_4 représentée sous forme paramétrique : $p = p(\lambda)$. Ses équations dans $\mathcal{S}$ sont $X^i = X^i(\lambda)$. Sa tangente en p est le vecteur $u = \frac{dp}{d\lambda}$ de composantes $U^i = \frac{dX^i}{d\lambda}$ dans la base $e_i = \frac{\partial}{\partial X^i}$.

On postule que pour tout point matériel la ligne d'univers est du genre temps, c-à-d $\ell(u, u) = \eta_{ij} U^i U^j = ds^2/(d\lambda)^2 < 0$. On peut alors choisir comme paramètre λ l'abscisse curviligne de la ligne d'univers telle que $\ell(u, u) = -c^2$. Il est alors traditionnel de poser $\lambda = \tau$ et d'appeler $u = \frac{dp}{d\tau}$ le vecteur *quadri-vitesse*.

Les composantes de la quadri-vitesse en fonction de la 3-vitesse $V^\alpha = \frac{dX^\alpha}{dT}$ sont alors (en convenant que U^0 est positif) :

$$U^0 \equiv \frac{dX^0}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad , \quad U^\alpha \equiv \frac{dX^\alpha}{d\tau} = \frac{V^\alpha}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \, , \tag{4.1}$$

où $V^2 \equiv \delta_{\alpha\beta} V^\alpha V^\beta \equiv V_\alpha V^\alpha$.[5] On remarque que pour que les formules ci-dessus aient un sens les vitesses doivent être inférieures à c qui devient ainsi la vitesse maximale qu'un objet matériel peut atteindre.

---

[2] On rappelle que, *cf* livre ND-JPU :
$\ell(dp, dp) = dX^i dX^j\, \ell(e_i, e_j) = dX^i dX^j\, \eta_{kl}\, (\epsilon^k \otimes \epsilon^l)(e_i, e_j)$
$= dX^i dX^j\, \eta_{kl}\, \epsilon^k(e_i)\, \epsilon^l(e_j) = dX^i dX^j\, \eta_{kl}\, \delta^k_i \delta^l_j = \eta_{ij} dX^i dX^j = ds^2$.
La signature de la métrique de Minkowski est donc $(-1, +1, +1, +1)$ et son signe -1.

[3] Dorénavant les indices latins, d'espace-temps, iront de 0 à 3 et les indices grecs, d'espace, de 1 à 3.

[4] On peut s'étonner, à première vue, que la concrétisation des quatre vecteurs de base, $e_i = \frac{\partial}{\partial X^i}$, ou de leur formes associées, $\epsilon^i = \mathrm{d}X^i$, soit pour l'un le battement d'une horloge et pour les trois autres trois règles unité orthogonales. Mais en relativité le concept de longueur, de règle et, de manière générale, de corps rigide, est en fait secondaire. Seule l'unité de temps doit être définie, l'unité de longueur en découlant après multiplication par la constante universelle c.

[5] Les V^α ne sont pas les composantes d'un vecteur de M_4, ni les $V_\alpha \equiv \delta_{\alpha\beta} V^\beta$ les composantes d'une forme ! La vitesse $V = \{V^\alpha\}$ perd (au profit de la quadri-vitesse u) le statut vectoriel qu'elle avait en physique newtonienne.

On appelle $P \equiv mu$ la *quadri-impulsion* de la particule, m étant sa masse inertielle. En effet les composantes spatiales $P^\alpha \to mV^\alpha$ dans la limite des petites vitesses et généralisent la notion d'impulsion. Quant à la composante temporelle elle donne $cP^0 \to mc^2 + \frac{1}{2}mV^2$. Ainsi cP^0 est interprété comme l'énergie de la particule, somme de son énergie au repos et de son énergie cinétique. La fameuse formule "$E = mc^2$" découle donc de la représentation de l'espace et du temps proposée par la relativité restreinte.

La *quadri-accélération* de P dans $\mathcal{S}$ est le vecteur défini par $\gamma = \frac{du}{d\tau}$ et a pour composantes $\gamma^i \equiv \frac{dU^i}{d\tau}$, où τ est l'abcisse curviligne. (On laisse au lecteur le soin de les exprimer en fonction de $a^\alpha \equiv \frac{d^2X^\alpha}{dT^2}$, composantes de la 3-accélération a.) Comme $\eta_{ij}U^iU^j = -c^2$, quadri-vitesse et accélération sont orthogonales : $\ell(u,\gamma) = \gamma_i U^i = 0$.

Enfin un rayon lumineux est postulé suivre une ligne d'univers $p(\lambda)$ du genre lumière, c.-à-d. de longueur nulle. Son vecteur tangent $k = \frac{dp}{d\lambda}$ est donc tel que $\eta_{ij}k^ik^j = 0$ où $k^i \equiv \frac{dX^i}{d\lambda}$. Par conséquent : $k^0 = |k| \equiv \sqrt{k_\alpha k^\alpha}$. Ainsi, si $k^2 = k^3 = 0$ et $k^1 > 0$, alors $X^1 = c(T - T_0)$ ce qui justifie l'identification de la constante c à la vitesse de la lumière. Le 4-vecteur k peut être interprété comme la quadri-vitesse d'un paquet d'ondes (ou "photon") ou comme le *vecteur d'onde* d'une onde plane monochromatique de phase $\Phi = k_iX^i$ soit encore $\Phi = k_\alpha X^\alpha + k_0X^0 = k_\alpha X^\alpha - \omega T$ où $\omega \equiv |k|c$ est sa pulsation.

Changement de repère minkowskien et transformations de Lorentz

5. Le groupe de Poincaré

L'ensemble des transformations de coordonnées minkowskiennes $X^i \mapsto X'^i$ qui préservent la forme et la valeur de l'intervalle ($ds^2 = \eta_{ij}dX^idX^j = \eta_{ij}dX'^idX'^j$, soit encore $\ell = \eta_{ij}\,\mathrm{d}X^i\,\mathrm{d}X^j = \eta_{ij}\,\mathrm{d}X'^i\,\mathrm{d}X'^j$), de sorte que les quatre axes restent orthonormés, constituent les *transformations de Lorentz* et forment le *groupe de Poincaré*. Elles s'écrivent

$$X'^j = \Lambda_i^{\ j}(X^i - d^i) \quad \text{avec} \quad \Lambda_k^{\ i}\Lambda_l^{\ j}\eta_{ij} = \eta_{kl} \tag{5.1}$$

où la matrice de "pseudo"-rotation $\Lambda_i^{\ j}$ et le vecteur de translation de composantes d^i dans $\mathcal{S}$ ne dépendent pas des X^i. Ce changement de coordonnées (à $6+4=10$ paramètres) s'accompagne du changement de base de l'espace vectoriel sous-tendant M_4 : $e_i \equiv \frac{\partial}{\partial X^i} = \Lambda_i^{\ j}e'_j \equiv \Lambda_i^{\ j}\frac{\partial}{\partial X'^j}$ et de son dual : $\mathrm{d}X'^j = \Lambda_i^{\ j}\mathrm{d}X^i$. Ces transformations sont la version relativiste des changements de repère cartésiens en physique newtonienne.

En physique newtonienne il a fallu distinguer changements de repère cartésien et changements de repère inertiel (définis par le groupe de Galilée). En relativité restreinte ces notions se confondent, du fait que le temps y a le statut de coordonnée. Ainsi les transformations de Lorentz incluent les rotations et translations des axes X^α (indépendantes du temps) mais aussi la loi de passage du repère absolu $\mathcal{S}$ à un repère inertiel $\mathcal{S}'$, en translation uniforme par rapport à $\mathcal{S}$. Considérons en effet par exemple la transformation de Lorentz *spéciale*

$$X'^0 = X^0\cosh\psi - X^1\sinh\psi \quad , \quad X'^1 = X^1\cosh\psi - X^0\sinh\psi \tag{5.2}$$

(et $X'^2 = X^2$, $X'^3 = X^3$) où ψ est une constante. Le mouvement dans $\mathcal{S}$ de l'origine de $\mathcal{S}'$ ($X'^1 = 0$) est $X^1/X^0 = \tanh\psi$ de sorte que $c(\tanh\psi) \equiv V_0$ peut être identifié à la vitesse du repère $\mathcal{S}'$ par rapport à $\mathcal{S}$. Ainsi donc $\mathcal{S}'$ est en translation uniforme par rapport à $\mathcal{S}$ le long de l'axe X^1 : c'est un repère inertiel. En fonction de V_0 la transformation (5.2) prend la forme (en posant $X^1 \equiv X, X'^1 \equiv X'$)

$$T' = \frac{T - V_0X/c^2}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}} \quad , \quad X' = \frac{X - V_0T}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}} \quad , \quad Y' = Y \ , \ Z' = Z \tag{5.3}$$

qui se réduit à une transformation de Galilée lorsque $V_0/c \ll 1$.[6]

[6] On note que la transformation (5.2-3) est telle que $\Lambda_0^{\ 0} > 1$ et $\det\Lambda = +1$; les transformations satisfaisant à ces deux conditions constituent le sous-groupe *propre* de Poincaré auquel on se restreindra. On remarque aussi que la composition de deux transformations de Lorentz n'est *pas* commutative si les 3-vecteurs V_{01} et V_{02} les caractérisant ne sont pas parallèles. On note enfin que les nouveaux vecteurs de base ($e'_0 = \cosh\psi\, e_0 + \sinh\psi\, e_1$; $e'_1 = \sinh\psi\, e_0 + \cosh\psi\, e_1$) sont orthogonaux au sens de la métrique de Minkowski mais forment sur le papier un angle aigu et se confondent avec la bissectrice lorsque $V_0 \to c$.

Une transformation de Lorentz se concrétise par une rotation du solide de référence accompagnée d'une translation uniforme de ce solide. Le lieu de l'événement p est ainsi repéré par les trois coordonnées X'^{α} dans le nouveau référentiel. Quant à la nouvelle coordonnée temporelle $T' = \frac{X'^0}{c}$ elle mesure le temps des horloges *immobiles* dans le nouveau référentiel, c.-à-d. en mouvement rectiligne uniforme dans $\mathcal{S}$. Se confirme ainsi le fait que des horloges en mouvement relatif ne battent pas de la même façon et que deux événements, simultanés dans $\mathcal{S}$ (*i.e.* ayant la même coordonnée temporelle T) ne le seront pas quand mesuré au temps T' des horloges immobiles dans le référentiel $\mathcal{S}'$.

6. Dilatation du temps, contraction des longueurs

Soient deux événements ayant lieu au même endroit et à ΔT d'intervalle dans $\mathcal{S}$; par application directe de (5.3) on a que dans $\mathcal{S}'$ ces deux événements seront observés à un intervalle $\Delta T' = \frac{\Delta T}{\sqrt{1-V_0^2/c^2}}$: c'est le phénomène de *dilatation du temps*. Si un observateur immobile dans $\mathcal{S}$ convient que son horloge bat la seconde, il devra admettre qu'une horloge identique en translation uniforme bat plus lentement, toutes les $1/\sqrt{1-V_0^2/c^2}$ secondes. A l'inverse l'observateur de $\mathcal{S}'$ tiendra que c'est l'horloge de $\mathcal{S}$ qui retarde.

Soit par ailleurs un objet rigide immobile dans $\mathcal{S}$, *i.e.* tel que les lignes d'univers L_1 et L_2 de ses extrémités soient des droites parallèles dans $\mathcal{S}$ à l'axe des T; si on appelle *longueur propre* la distance ΔX entre entre L_1 et L_2 à T constant, alors sa longueur dans $\mathcal{S}'$ à T' constant est, toujours par application de (5.3) : $\Delta X' = \Delta X\sqrt{1-V_0^2/c^2}$: c'est le phénomène de *contraction des longueurs*.[7] Remarquons que $\Delta X' = Const.$: un corps rigide le reste dans une transformation de Lorentz. Bien sûr une règle marquée de n graduations équidistantes conservera dans son mouvement n graduations équidistantes : mais si un observateur immobile dans $\mathcal{S}$ convient qu'elle mesure n cm dans $\mathcal{S}$, alors il devra admettre qu'elle ne mesure plus que $n\sqrt{1-V_0^2/c^2}$ cm lorsqu'elle est en translation uniforme.

7. Transformation des quadri- vitesse et accélération

Considérons la ligne d'univers du genre temps d'un point matériel P dans $\mathcal{S}$: $X^i = X^i(\tau)$, où τ est l'abcisse curviligne (*i.e.* $\eta_{ij}U^iU^j = -c^2$ où $U^i \equiv dX^i/d\tau$). Dans une transformation de Lorentz les coordonnées de P dans $\mathcal{S}'$ sont $X'^i(\tau) = X'^i(X^i(\tau))$, de sorte que

$$U'^j \equiv \frac{dX'^j}{d\tau} = \Lambda_i{}^j\, U^i \quad , \quad \gamma'^j \equiv \frac{dU'^j}{d\tau} = \Lambda_i{}^j\, \gamma^i \tag{7.1}$$

(car les $\Lambda_i{}^j$ sont des constantes). Ainsi les composantes U'^i et U^i sont les avatars dans deux repères différents du même vecteur : $u = \frac{dX^i}{d\tau}e_i = \frac{dX'^i}{d\tau}e'_i$, et il en est de même de l'accélération γ. On peut donc parler des quadri-vitesse et accélération dans l'absolu, sans spécifier le repère inertiel où elles sont évaluées. C'était une propriété que la 3-accélération possédait aussi en physique newtonienne, mais *pas* la 3-vitesse, qui n'était pas représentée par le même vecteur dans deux repères inertiels différents.

Dans la transformation spéciale (5.3) la 3-vitesse $V'^{\alpha} \equiv \frac{dX'^{\alpha}}{dT'}$ d'une particule est donnée en fonction de $V^{\alpha} = \frac{dX^{\alpha}}{dT}$ et V_0 par :

$$V'^1 = \frac{V^1 - V_0}{1 - \frac{V^1V_0}{c^2}} \quad , \quad V'^2 = \frac{V^2\sqrt{1-V_0^2/c^2}}{1 - \frac{V^1V_0}{c^2}} \quad , \quad V'^3 = \frac{V^3\sqrt{1-V_0^2/c^2}}{1 - \frac{V^1V_0}{c^2}} \tag{7.2}$$

(d'où l'on déduit que si $V \to c$ alors $V' \to c$).[8]

Quant au module de la 3-vitesse d'un rayon lumineux il est bien, comme voulu, toujours égal à c : si sa ligne d'univers est, par exemple, $X = c\,T$ dans le repère $\mathcal{S}$, alors, dans le repère inertiel $\mathcal{S}'$ lié à $\mathcal{S}$ par la

[7] Précisons l'obtention de la formule : dans $\mathcal{S}$ les lignes d'univers L_1 et L_2 ont pour équations : $X = 0$ et $X = \Delta X \quad , \forall\, T$. Dans $\mathcal{S}'$ leurs équations deviennent : $T' = T/\sqrt{1-V_0^2/c^2}\,, X' = -V_0T/\sqrt{1-V_0^2/c^2}$ soit $X' = -V_0T'$ pour L_1 et, pour L_2 : $T' = (T - V_0\Delta X/c^2)/\sqrt{1-V_0^2/c^2}\,, X' = (\Delta X - V_0T)/\sqrt{1-V_0^2/c^2}$ soit $X' = -V_0T' + \Delta X\sqrt{1-V_0^2/c^2}$.

[8] On trouve de même la relation entre les composantes des 3-accélérations. A une dimension par exemple : $a' = \frac{(1-V_0^2/c^2)^{\frac{3}{2}}}{(1-VV_0/c^2)^3}\, a$, où $a \equiv \frac{d^2X^1}{dT^2}$ et $a' \equiv \frac{d^2X'^1}{dT'^2}$.

transformation (5.3), elle est donnée par $X' = cT'$. Ce résultat découle aussi du fait que $\ell(k,k) = 0$, k étant son quadri-vecteur vitesse dont les composantes dans $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont reliées selon la loi (7.1). Plus précisément, si ses composantes dans $\mathcal{S}$ sont $k^i = (k, k\cos\alpha, k\sin\alpha, 0)$ (de sorte que $k_i k^i = 0$), ses composantes dans le repère $\mathcal{S}'$ défini par (5.3) seront $k'^i = (k', k'\cos\alpha', k'\sin\alpha', 0)$ avec

$$\tan\alpha' = \frac{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}}{1 - V_0/(c\cos\alpha)}\tan\alpha \qquad , \qquad \nu' = \frac{\nu(1 - V_0\cos\alpha/c)}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}} \tag{7.3}$$

où $\nu \equiv \frac{kc}{2\pi}$ et $\nu' \equiv \frac{k'c}{2\pi}$ sont les fréquences de l'onde dans les deux repères. On remarque que, même si $\alpha = \pi/2$, $\nu' \neq \nu$: c'est l'effet *Doppler transverse*.[9]

Le temps propre

8. Longueurs de lignes d'univers et temps propre

Considérons, dans un système de référence inertiel $\mathcal{S}$, un observateur P au repos en $X^\alpha = 0$ et un autre P' qui issu de $X^\alpha = 0$ à $T = 0$ (événement (1)) y retourne en $T = \Delta T$ (événement (2)). P étant au repos, le temps-coordonnée T est, on l'a postulé, le temps indiqué par sa montre (qui mesure sa durée de vie par exemple). Mesurée par P la durée qui sépare les événements (1) et (2) est donc ΔT, ce qui n'est autre que la longueur de sa ligne d'univers divisée par c : $\Delta T = \int_0^{\Delta T} dT$.

Maintenant soient $X^i = X^i(\tau)$ les équations de la ligne d'univers de P', u sa quadri-vitesse, où τ est l'abcisse curviligne (telle que $\ell(u,u) = -c^2$) et $V^\alpha = \frac{dX^\alpha}{dT}$ les composantes de sa 3-vitesse. La longueur de

[9] **Quelques expériences et observations à la lumière de la relativité restreinte.**

Expérience de Michelson-Morley.

Dans un référentiel considéré comme quasi-inertiel lié à la terre, la vitesse de la lumière, par le second postulat de la relativité, est c. Le temps qu'elle met pour faire un aller-retour le long d'un bras d'interféromètre de longueur l, parallèle ou perpendiculaire à la vitesse orbitale de la terre est le même : $2l/c$. Il restera le même après rotation de l'appareil. Aucun déplacement de la figure d'interférence n'est donc attendu, contrairement aux prédictions de Michelson et de ses contemporains (*cf* livre ND-JPU) mais en accord avec l'expérience. Aucune étude *à la* Lorentz de la dynamique des charges dans les bras de l'interféromètre n'est nécessaire pour rendre compte du résultat, qui s'interprète comme une conséquence directe de la cinématique einsteinienne.

Expérience de Fizeau.

Si c/n est la vitesse de la lumière dans un milieu réfringent d'indice n au repos, la vitesse c' lorsque le milieu est animé d'une vitesse u est donnée par les formules (7.2) qui se réduisent dans le cas considéré à $c' = \frac{c/n+u}{1+u/(nc)} \approx \frac{c}{n}\left[1 + \frac{nu}{c}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\right]$ qui n'est autre que la formule de Fresnel, vérifiée expérimentalement par Fizeau, *cf* livre ND-JPU. Là encore l'effet est, en relativité restreinte, purement cinématique.

Aberration des étoiles et effet Doppler-Fizeau.

Plaçons-nous dans le repère quasi-inertiel $\mathcal{S}$ du système solaire et considérons le vecteur d'onde de la lumière en provenance d'une étoile de composantes $k^i = (k, k\cos\alpha, k\sin\alpha, 0)$, à l'époque où la terre se meut le long de l'axe des X avec la 3-vitesse v_r. Dans le repère lié à la terre l'angle est α', donné par (7.3) (où V_0 est remplacé par v_r). Six mois plus tard il aura varié de $\Delta\alpha' \approx 2v_r/(c\cos\alpha')$. On retrouve ainsi la formule d'aberration de Bradley (*cf* livre ND-JPU), toujours valable, que l'on décrive la lumière comme des corpuscules lumineux (des "photons") ou des ondes.

Par ailleurs la seconde formule (7.3) donne le décalage spectral d'une source lumineuse en fonction du mouvement du récepteur. Dans le cas simple où $\alpha = 0$ on a, en introduisant la 3-vitesse v_s de la source par rapport à $\mathcal{S}$ et sa fréquence ν_s dans le repère où elle est au repos :

$$\nu_r = \nu_s\sqrt{\frac{1 + v_s/c}{1 - v_s/c}}\sqrt{\frac{1 - v_r/c}{1 + v_r/c}} = \nu_s\sqrt{\frac{1 + v'_s/c}{1 - v'_s/c}} \qquad \text{où} \qquad v'_s = \frac{v_s - v_r}{1 - v_s v_r/c^2}$$

v'_s est, par (7.2), la 3-vitesse de la source dans le repère où le récepteur est au repos. Au premier ordre en $1/c$ cette formule et celle de l'effet Doppler s'identifient, *cf* livre ND-JPU. Il convient cependant de remarquer que dans le calcul relativiste aucun repère privilégié, où un éther porteur des ondes lumineuses serait au repos, n'intervient. En relativité restreinte le concept d'éther devient superflu.

cette ligne entre (1) et (2) est

$$\begin{aligned} L &= \int_1^2 \sqrt{-(ds)^2} = \int_0^{\Delta T} \sqrt{-\eta_{ij} \frac{dX^i}{dX^0} \frac{dX^j}{dX^0}}\, dX^0 = c \int_0^{\Delta T} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\, dT \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{-\ell(u,u)}\, d\tau = c \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \equiv c\, \Delta\tau\,. \end{aligned} \tag{8.1}$$

(La deuxième ligne ne fait que rappeler la définition de l'abcisse curviligne.) Cette longueur L (divisée par c) est un invariant géométrique : sa valeur numérique (exprimée en secondes par exemple) est la même, quel que soit le système de coordonnées, minkowskien ou non, utilisé pour définir la ligne d'univers de P'. *On postule qu'elle mesure le temps écoulé à la montre de* P'. C'est pour cette raison que l'abcisse curviligne τ est appelée le *temps propre* de P'. Ainsi le temps $\Delta\tau$ écoulé entre les événements (1) et (2) est-il, pour P' :

$$\Delta\tau = \int_0^T dT \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\,. \tag{8.2}$$

Quel que soit le mouvement de P', $\Delta\tau$ sera toujours inférieur à ΔT. En particulier, si P' s'éloigne de P à la vitesse constante V et fait un demi-tour instantané pour le rejoindre ensuite avec la vitesse $-V$, la formule (8.2) s'intègre immédiatement pour donner $\Delta\tau = \Delta T \sqrt{1 - V^2/c^2}$.

9. Les jumeaux de Langevin

Ce résultat fut popularisé en France par Langevin dans les années vingt : si P et P' sont des "jumeaux" (*e.g.* des particules identiques), le jumeau voyageur au terme de son périple, sera plus jeune que le jumeau sédentaire. Cela avait été trouvé paradoxal. En effet, raisonnait-on, si l'on fait le calcul des longueurs des lignes d'univers de P et P' dans le repère $\mathcal{S}'$ où P' est au repos, alors c'est P qui devient voyageur, ce qui est exact. La formule (8.2), poursuivait-on, dit alors que lorsque P rejoindra P' c'est lui, et non P', qui aura le moins vieilli ! Mais cette partie du raisonnement est fausse car la formule (8.2) ne s'applique que si $\mathcal{S}'$ est un repère inertiel. Or le mouvement de P' ne peut pas être inertiel tout le temps. Il devra, contrairement à P, être à un moment ou à un autre accéléré par rapport à l'ensemble des repères inertiels, ne serait-ce que pour faire demi-tour.

Pour faire le calcul des longueurs des lignes d'univers dans $\mathcal{S}'$ il faut effectuer correctement le changement de repère. (Voir en deuxième partie des exemples de telles transformations).

10. Confirmation expérimentale

Considérons, de façon plus vérifiable expérimentalement, un ensemble de particules identiques, en mouvement dans $\mathcal{S}$. Quel que soit leur mouvement, on peut leur associer momentanément des repères inertiels $\mathcal{S}'$ dont la vitesse V est celle qu'elles ont à ce moment-là ; dans ces repères elles sont (momentanément) au repos. On a donc $ds^2 = -c^2 dT'^2$ où T' est leur temps propre, c.-à-d. celui qui caractérise, par exemple, leur durée de vie $\Delta\tau$: $dT' \equiv \Delta\tau$. L'invariance de la métrique, *i.e.* de ds^2, implique alors que leur durée de vie mesurée dans $\mathcal{S}$ où elles ont la vitesse V sera supérieure : $\Delta T = \Delta\tau/\sqrt{1 - V^2/c^2}$.

Cette prédiction a été vérifiée expérimentalement au CERN en 1976. Les muons sont des particules instables qui se désintègrent en électrons au bout de $\Delta\tau$ =1.5 microseconde dans le repère où ils sont au repos. On les accéléra jusqu'à ce qu'ils atteignent une vitesse de $0.9994c$ et on mesura leur taux de désintégration c.-à-d. leur temps de vie dans le repère où ils étaient en mouvement. On trouva ΔT =44 microsecondes, en parfait accord (à deux millièmes près) avec la prédiction de la relativité restreinte.

L'inclusion de cet effet de dilatation du temps est maintenant essentielle à la bonne marche des routines d'ingéniérie comparant les temps d'horloges atomiques en mouvement relatif, sur terre et dans les satellites du réseau GPS par exemple.

Exit le temps absolu de Newton.

11. Loi de la dynamique et principe de relativité

La loi fondamentale de la dynamique relativiste est la même que celle de Newton dans le sens où elle stipule que l'accélération d'un point matériel est proportionnelle à la force qu'elle subit ; mais les représentations de l'espace et du temps étant différentes dans les deux théories, cette loi s'exprime en fonction d'objets géométriques définis dans des espaces mathématiques différents, M_4 *vs* $\mathcal{E}_3 \times R$, et les prédictions physiques qui en découlent seront aussi éventuellement différentes.

On postule donc que le mouvement d'un point matériel sans étendue et sans structure interne P, dans tout repère inertiel $\mathcal{S}$ en coordonnées minkowskiennes X^i, obéit à :

$$m\,\gamma = F \quad \Longleftrightarrow \quad m\,\frac{d^2X^i}{d\tau^2} = F^i \tag{11.1}$$

où m est la masse inertielle de P, où $p = p(\tau)$ est sa ligne d'univers d'équation $X^i = X^i(\tau)$ où τ est le temps propre, où γ, de composantes $\gamma^i = \frac{d^2X^i}{d\tau^2}$, est sa quadri-accélération, et où F^i sont les composantes de la *quadri-force* F qu'il subit. Comme γ est orthogonal à la quadri-vitesse u, F^iU_i doit être nul et (11.1) ne comporte que 3 composantes indépendantes.

Le mouvement d'une particule libre ($F = 0$) est rectiligne uniforme en repère inertiel : sa quadri-vitesse u de composantes $U^i = \frac{dX^i}{d\tau}$ est constante, sa 3-vitesse de composantes $V^\alpha = \frac{dX^\alpha}{dT}$ aussi. Dans un autre repère inertiel ayant la 3-vitesse V_0 constante par rapport à $\mathcal{S}$, la quadri-vitesse de P est représentée par le même vecteur u ; ses nouvelles composantes, données par (7.1) ainsi que les nouvelles composantes (7.2) de sa 3-vitesse sont également constantes. Ainsi, comme en mécanique newtonienne, le mouvement de particules libres ne permet pas de particulariser un système de référence "absolu"; il détermine seulement l'ensemble des systèmes inertiels.

Peut-on déterminer un système de référence absolu à l'aide de particules accélérées pour lesquelles $F \neq 0$? Le principe de relativité l'interdit, qui exige que la loi de la dynamique (11.1) soit la même dans tout repère inertiel. La quadri-accélération étant, par construction, invariante, il doit donc en être de même de la force F dont on "parie" qu'elle sera représentée par le même quadri-vecteur dans tout repère inertiel.

Ainsi, en relativité restreinte comme en théorie newtonienne le système de référence absolu est un "fantôme", un échafaudage superflu une fois le principe de relativité posé. En revanche la classe d'équivalence des repères inertiels, elle, garde son statut privilégié : ce n'est que dans ces repères que la loi de la dynamique s'écrit sous la forme (11.1). Ayant même expression dans tous les repères inertiels elle ne permet pas de les distinguer. Comme en physique newtonienne, ce sont les conditions initiales du mouvement, données dans un repère particulier, qui le distingue.

12. La force de Lorentz

Une particule de masse m et *charge q* plongée dans un *champ électromagnétique* subit une force dite de Lorentz. Dans le cadre de la physique newtonienne, son équation du mouvement peut s'écrire sous la forme :

$$m\,a = q\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\left(E + \frac{V}{c}\wedge B - \frac{1}{c^2}V(V.E)\right)\ , \tag{12.1}$$

où $V^\alpha \equiv \frac{dX^\alpha}{dt}$ sont les composantes de sa vitesse V dans le repère inertiel considéré, $X^\alpha(t)$ étant ses coordonnées cartésiennes et t le temps absolu (et $V^2 \equiv \delta_{\alpha\beta}V^\alpha V^\beta$).[10] L'accélération $a \equiv \frac{dV}{dt}$, V, E et B

[10] **Formules utiles de calcul vectoriel.** Dans un repère cartésien, pour toute fonction f et tous vecteurs V, W, on a : $\nabla.\nabla\wedge V \equiv 0$; $\nabla\wedge\nabla f \equiv 0$; $\nabla\wedge\nabla\wedge V = -\triangle V + \nabla\nabla.V$; $\nabla.(V\wedge W) = -V.\nabla\wedge W + W.\nabla\wedge V$. Rappelons aussi que : $A.(B\wedge C) = C.(A\wedge B)$, $A\wedge(B\wedge C) = (A.C)B - (A.B)C$, $(A\wedge B)^2 = A^2B^2 - (A.B)^2$.

sont des vecteurs de $\mathcal{E}_3$, E et B désignant respectivement les champs *électrique* et *magnétique*, évalués sur la trajectoire de la charge. Enfin c est une constante numériquement égale à celle de la lumière dans le vide.[11]

Si l'on passe à un autre repère inertiel $\mathcal{S}'$ se déplaçant à la vitesse V_0 par rapport au premier, la loi de transformation des vitesses de Galilée impose que $V \mapsto V' = V - V_0$ et le membre de droite de l'équation (12.1), qui dépend de la vitesse de la charge, ne satisferait *pas* au principe de relativité si E et B étaient représentés par les mêmes vecteurs dans les deux repères ($E' = E,\ B' = B$) : elle aurait une autre forme, dépendant de V_0, et la question deviendrait de savoir dans quel repère inertiel *particulier* elle a la forme (12.1). Or l'expérience dit qu'elle est toujours donnée par (12.1).

Pour qu'elle garde, au premier ordre en $1/c$, la même forme dans $\mathcal{S}'$ il faut poser

$$E \mapsto E' = E + \frac{V_0}{c} \wedge B + \mathcal{O}(1/c^2) \qquad \text{et} \qquad B \mapsto B' = B - \frac{V_0}{c} \wedge E + \mathcal{O}(1/c^2)\,, \tag{12.2}$$

lois de transformation en plein accord avec les expériences de Biot et Savart et Faraday. Les champs électrique et magnétique (contrairement par exemple au champ de gravitation de Newton) ne sont donc pas représentés par les mêmes vecteurs dans deux repères inertiels différents. Pour conserver l'invariance de l'équation du mouvement (12.1) dans les transformations de Galilée aux ordres supérieurs en $1/c$ il faut être plus ingénieux, introduire avec Lorentz un temps "fictif" T' et une contraction des corps dans la direction de leur mouvement, bref, comme le montra Poincaré, faire "comme si" le passage d'un repère inertiel à un autre était donné par les formules de Lorentz (5.3), tout en maintenant que la "vraie" formule est celle de Galilée : $X' = X - V_0 t$, où $t = T$ est le temps absolu de Newton.

En relativité restreinte le point de vue est inversé : T et T' sont, selon Einstein, "purement et simplement" des temps "vrais", dilatation du temps et contraction des longueurs ne sont plus que des effets de cinématique qui n'ont plus besoin d'être expliqués par la dynamique des corps chargés, la loi de transformation de Lorentz découle de la nouvelle représentation de l'espace-temps, et l'invariance des équations de l'électromagnétisme dans le passage d'un repère inertiel à un autre devient évidente.

On vérifie en effet que l'équation de Lorentz (12.1) peut se réécrire, en fonction des quadri-vitesse et accélération U et γ de la charge sous la forme

$$m\gamma^i = F^i \qquad \text{avec} \qquad F^i = \frac{q}{c} F^i{}_j U^j \qquad \text{et} \qquad F_{ij} \equiv \frac{\partial A_j}{\partial X^i} - \frac{\partial A_i}{\partial X^j}\ , \tag{12.3}$$

où $A^i \equiv (\Phi, A)$ est le *quadri-potentiel* formé du couple des potentiels coulombien Φ et "vecteur" A définis en Note 11. Les indices sont montés ou descendus à l'aide des coefficients de la métrique de Minkowski η_{ij} et son inverse η^{ij} ; ainsi $A_i \equiv \eta_{ij} A^j$ (soit : $A_0 = -A^0$, $A_\alpha = A^\alpha$), $F_{ij} \equiv \eta_{ik} F^k{}_j$, *etc.* Les composantes de F_{ij} s'expriment en fonction de E et B par $F_0{}^\alpha \equiv -E^\alpha$ et $F_{12} = B_3$, $F_{13} = -B_2$, $F_{23} = B_1$. Trois seulement des quatre composantes de (12.3) sont indépendantes car $F_i U^i = 0$ comme il se doit.[12]

[11] Ces champs ne sont pas complètement indépendants car ils s'avèrent satisfaire aux trois contraintes $\nabla.B = 0$, $\nabla \wedge E = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}$ (voir & 13), ce qui peut s'exprimer par le fait qu'ils dérivent d'un *potentiel scalaire* Φ et d'un *potentiel vecteur* A selon

$$E = -\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} - \nabla\Phi \qquad , \qquad B = \nabla \wedge A\,.$$

Il n'y a dans l'ensemble (Φ, A) que trois composantes indépendantes ; en effet $\Phi' = \Phi + \dot{f}$, $A' = A - \nabla f$ où $f(t, X^\alpha)$ est une fonction quelconque, définissent les mêmes vecteurs E et B, ce qui permet par exemple de choisir *ad libitum* Φ. Cet arbitraire dans la définition des potentiels est une première facette de l'*invariance de jauge* de l'électromagnétisme.

[12] On a :

$$\begin{cases} F^0 = \dfrac{q}{c}\dfrac{E.V}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad , \quad F^\alpha = \dfrac{q}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\left(E^\alpha + \dfrac{1}{c}(V \wedge B)^\alpha\right) \\[2ex] \gamma^0 = \dfrac{V.a}{c(1 - V^2/c^2)^2} \quad , \quad \gamma^\alpha = \dfrac{a^\alpha}{1 - V^2/c^2} + \dfrac{V^\alpha (V.a)}{c^2(1 - V^2/c^2)^2} \end{cases}$$

où $V^\alpha \equiv \frac{dX^\alpha}{dT}$. D'où l'équivalence entre (12.3) et (12.1) si l'on identifie le temps absolu de Newton t au temps T des horloges

Le principe de relativité impose que A^i soit un quadri-vecteur, c-à-d que ses composantes dans un autre repère inertiel soient données par $A'^j = \Lambda_i{}^j A^i$. Alors F_{ij} sont les composantes d'un tenseur deux fois covariant, le *tenseur électromagnétique* (ou de *Faraday*), et se transforme selon

$$F'_{ij} = \Lambda^k{}_i \Lambda^l{}_j \, F_{kl} \quad ; \quad F'^i{}_j = \Lambda_k{}^i \Lambda^l{}_j \, F^k{}_l \quad ; \quad F'^{ij} = \Lambda_k{}^i \Lambda_l{}^j \, F^{kl} \, . \tag{12.4}$$

Ainsi la force de Lorentz $F^i = qF^i{}_j \, U^j$, contractée d'un tenseur deux fois covariant et d'un vecteur est bien aussi un quadri-vecteur : dans $\mathcal{S}'$ l'équation du mouvement est (12.3) (ou (12.1)) où toutes les grandeurs et variables sont primées, *y compris* le temps.[13]

L'unification des champs électrique et magnétique amorcée par Maxwell prend ainsi tout son sens : ils sont les composantes d'un seul objet, le tenseur de Faraday, et leur transmutation doit être vue comme un "effet de perspective" dû au repère choisi.

13. Les équations de Maxwell

Les équations de Maxwell s'écrivent dans un repère inertiel donné :

$$\begin{aligned} &\nabla . B = 0 \quad , \quad \nabla \wedge E = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} \\ &\nabla . E = 4\pi\rho \quad , \quad \nabla \wedge B = \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j \end{aligned} \tag{13.1}$$

où ρ et j sont 4 fonctions à préciser, la *densité* et le *vecteur courant* des charges qui créent les champs électrique et magnétique E et B. L'ensemble implique, hors des charges :

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \triangle E = 0 \quad , \quad -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} + \triangle B = 0 \tag{13.2}$$

---

immobiles dans $\mathcal{S}$. La contrainte $m\gamma^0 = F^0$ permet de réécrire (12.1) sous la forme :

$$m\frac{d}{dT}\frac{V}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = q\left(E + \frac{V}{c} \wedge B\right)$$

[13] **Transformation du champ électromagnétique et de la force de Lorentz.**
Dans la transformation spéciale (5.3) (où $\mathcal{S}'$ glisse le long de l'axe des X à la vitesse V_0 par rapport à $\mathcal{S}$) champs électrique et magnétique se transforment selon

$$\begin{cases} E_1 = E'_1 \quad , \quad E_2 = \dfrac{E'_2 + V_0 B'_3/c}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}} \quad , \quad E_3 = \dfrac{E'_3 - V_0 B'_2/c}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}} \\ B_1 = B'_1 \quad , \quad B_2 = \dfrac{B'_2 - V_0 E'_3/c}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}} \quad , \quad B_3 = \dfrac{B'_3 + V_0 E'_2/c}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}} \end{cases}$$

expressions qui se réduisent aux formules (12.3) au premier ordre en $1/c$. Quant à la force de Lorentz F elle se transforme comme tout quadri-vecteur

$$F'^0 = \frac{F^0 - V_0 F_1/c}{\sqrt{1 - V_0^2}} \quad , \quad F'^1 = \frac{F^1 - V_0 F^0/c}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}} \quad , \quad F'^2 = F^2 \quad , \quad F'^3 = F^3$$

où F^i est donné en Note 12. La quadri-accélération γ se transforme de même. En remplaçant les E^α et B^α par les E'^α et B'^α selon les formules ci-dessus, en transformant également la 3-vitesse V^α selon les formules (7.2) (inversées) : $V^1 = \frac{V'^1 + V_0}{1 + V_0 V'^2/c^2}$, $V^2 = \frac{V'^2\sqrt{1 - V_0^2/c^2}}{1 + V_0 V'^1/c^2}$, $V^3 = \frac{V'^3\sqrt{1 - V_0^2/c^2}}{1 + V_0 V'^1/c^2}$ on trouve ce qui s'obtient en une ligne dans le formalisme quadri-dimensionnel, à savoir :

$$m\,a' = q\sqrt{1 - \frac{V'^2}{c^2}}\left(E' + \frac{V'}{c} \wedge B' - \frac{1}{c^2}V'(V'.E')\right) \, ,$$

avec $V'^\alpha \equiv \frac{dX^\alpha}{dT'}$, $a = \frac{dV}{dT'}$ où T'est le temps des horloges immobiles dans $\mathcal{S}'$ (et non un temps "fictif").

dont la solution générale est un paquet d'ondes se propageant à vitesse c, numériquement égale à celle de la lumière, comme que le vérifia Hertz. (C'est ainsi que Maxwell en conclut que la lumière était un champ électromagnétique).

L'expérience impose (*cf* Note 9) que les équations de Maxwell (13.1-2) soient invariantes dans le passage à un autre repère inertiel (car contrairement à ce qui est possible avec le son par exemple, *cf* livre ND-JPU, il s'avère impossible de déterminer le repère où un "éther" porteur des ondes lumineuses serait au repos). Or, dans un cadre newtonien, E et B sont des vecteurs de $\mathcal{E}_3$, t est le temps absolu et il est très malaisé d'imposer leur invariance dans le passage d'un repère inertiel à un autre au moyen des transformations de Galilée (sauf à imposer que les champs ne soient pas représentés par les mêmes vecteurs dans deux repères différents et à introduire un temps "fictif" comme nous l'avons vu en & 12.)

Dans le cadre de la relativité restreinte E et B sont les composantes du tenseur de Faraday $F_{ij} \equiv \partial_i A_j - \partial_j A_i$ (où $A^i = (\Phi, A)$), $t = T$ est le temps d'une l'horloge immobile dans le repère inertiel considéré et l'on voit aisément que les équations (13.1) s'écrivent :

$$F_{ij,k} + F_{jk,i} + F_{ki,j} = 0 \qquad , \qquad F^{ij}{}_{,j} = \frac{4\pi}{c} j^i \tag{13.3}$$

où $j^i = (c\rho, j)$ est le *quadri-vecteur courant* et où on rappelle les notations $f_{,i} \equiv \partial_i f \equiv \frac{\partial f}{\partial X^i}$. La première équation est équivalente au deux premières équations de Maxwell et est une identité puisque F_{ij} est contraint par $F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$. La seconde s'écrit aussi

$$\Box A_i - \partial_i(\partial_j A^j) = -\frac{4\pi}{c} j^i \tag{13.4}$$

où le *Dalembertien* $\Box$ est défini par $\Box \equiv \eta^{ij}\partial_i\partial_j = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial T^2} + \triangle$.[14] Exprimées ainsi sous forme tensorielle, Les équations de Maxwell (13.3-4) gardent par construction la même forme d'un repère inertiel à un autre. De même le scalaire $F_{ij}F^{ij}$ et le pseudo-scalaire $\epsilon^{ijkl}F_{ij}F_{kl}$ ont même valeur dans tous les repères inertiels :[15]

$$\begin{aligned} F_{ij}F^{ij} = F'_{ij}F'^{ij} \quad &\Longleftrightarrow \quad E^2 - B^2 = E'^2 - B'^2 \\ \epsilon^{ijkl}F_{ij}F_{kl} = \epsilon^{ijkl}F'_{ij}F'_{kl} \quad &\Longleftrightarrow \quad E.B = E'.B' \, . \end{aligned} \tag{13.5}$$

14. Loi de conservation du courant de charge

La seconde équation de Maxwell (13.3) impose la *loi de conservation du courant*

$$\partial_i j^i \equiv 0 \tag{14.1}$$

car F_{ij} est antisymétrique. En intégrant sur un 3-volume $\mathcal{V}$ de l'hyperplan $X^0 \equiv cT = Const.$ on obtient, par le théorème de Gauss

$$\frac{dQ}{dT} = -\int_\Sigma j^\alpha n_\alpha dS \qquad \text{où} \qquad Q \equiv \int_\mathcal{V} \rho \, dV \, . \tag{14.2}$$

Σ est la 2-surface délimitant $\mathcal{V}$, dV est l'élément de volume et $n_\alpha dS$ l'élément de surface. En absence de flux à travers Σ, Q, la *charge totale* du système inclus dans $\mathcal{V}$, est constante.

[14] $\partial_j A^j$ étant un scalaire il a même valeur dans tout repère inertiel. Comme le quadri-potentiel $A'_i = A_i + \partial_i f$ définit le même tenseur de Faraday, *cf* Note 11, on peut choisir choisir f de sorte que $\partial_j A'^j = 0$, en résolvant l'équation $\partial_i A^i + \Box f = 0$. L'ensemble des quadripotentiels A'_i obtenus (définis à des gradients de *fonctions harmoniques* près, *i.e.* à $\partial_i h$ près où $\Box h = 0$) forme la *jauge de Lorentz.*

[15] Les composantes η_{ij} de la métrique de Minkowski, le symbole de Kronecker δ^i_j et le pseudo-tenseur ou *indice de Levi-Civita* ϵ_{ijkl} complètement antisymétrique (avec $\epsilon_{0123} = +1$) sont les trois grandeurs qui ont les mêmes composantes dans tous les systèmes de coordonnées pseudo-cartésiennes.

Si la source du champ électromagnétique est un ensemble de N particules ponctuelles le quadri-vecteur courant qui s'impose pour les représenter est

$$j^i(X^j) = \sum_{n=1}^{n=N} c\, q_n \int_{L_n} d\tau\, \delta_4(X^j - X^j_n(\tau))\, U^i_n \tag{14.3}$$

où $X^i = X^i_n(\tau)$ est l'équation de la ligne d'univers L_n de la particule n de charge q_n paramétrisée par son temps propre τ, où $U^i_n = \frac{dX^i_n}{d\tau}$ est sa quadri-vitesse ($\eta_{ij}U^i_n U^j_n = -c^2$) et où $\delta_4(X^j - X^i_n(\tau))$ est la distribution de Dirac.[17] En effet c'est, par construction, un quadri-vecteur, dont les composantes

$$\frac{j^0}{c} \equiv \rho = \sum_n q_n \delta_3(X^\alpha - X^\alpha_n(T)) \quad , \quad j^\alpha = \sum_n q_n V^\alpha \delta_3(X^\alpha - X^\alpha_n(T)) \tag{14.4}$$

coïncident avec les définitions newtoniennes des densité et courant de charge. Enfin la charge totale du systeme, donnée par (14.2), est bien $Q = \sum_n q_n$ et est une constante.

15. Tenseur énergie-impulsion du champ électromagnétique

A partir des équations de Maxwell écrite sous la forme (13.1) il est facile de voir que

$$\frac{\partial W}{c\,\partial t} + c\,\nabla . S = -j.E \qquad \text{avec} \quad W \equiv \frac{E^2 + B^2}{8\pi} \quad \text{et} \quad S \equiv \frac{E \wedge B}{4\pi c}\,. \tag{15.1}$$

(S est le 3-*vecteur de Poynting*.) Il faut se garder cependant d'écrire le membre de gauche sous une forme quadri-dimensionnelle (*i.e.* $\partial_i W^i$ avec $W^i = (W/c, S)$) car W^i n'est pas un quadri-vecteur dans les transformations de Lorentz : $j.E$ n'est pas un scalaire de M_4 et il est impossible à l'aide du seul tenseur F_{ij} de bâtir un vecteur. En revanche le tenseur symétrique

$$T^{ij} = \frac{1}{4\pi}\left(F^i{}_k F^{jk} - \frac{1}{4}\eta^{ij} F_{kl} F^{kl}\right) \tag{15.2}$$

qui est tel que $T^{00} = W$ et $T^{0\alpha} = c\,S^\alpha$ est tel que (en tenant compte seulement de l'antisymétrie de F_{ij})

$$\partial_k T^{ik} = \frac{1}{4\pi} F^i{}_k\, \partial_j F^{jk}\,. \tag{15.3}$$

Si on impose que les équations de Maxwell (13.3) sont satisfaites, on a alors

$$\partial_k T^{ik} = -\frac{1}{c} F^i{}_k j^k\,. \tag{15.4}$$

En remplaçant j^k par son expression (14.3) et reconnaissant dans l'integrant la force de Lorentz (12.3), on peut réécrire (15.4) selon

$$\partial_k T^{ik} = -\sum_n m_n c \int_{L_n} d\tau\, \delta_4(X^j - X^j_n(\tau))\, \gamma^i_n \tag{15.5}$$

où γ^i_n est la quadri-accélération de la particule n de masse m_n.

Par intégration sur un volume $\mathcal{V}$ de l'hyperplan $T = Const.$ on obtient ainsi

$$\frac{d}{dT}\left(P^i_{\text{champ}} + P^i_{\text{charges}}\right) = -\int_\Sigma T^{\alpha i} n_\alpha dS \qquad \text{où} \qquad P^i_{\text{champ}} \equiv \frac{1}{c}\int_{\mathcal{V}} dV T^{i0} \tag{15.5}$$

[17] telle que $\int \delta_4(X^j - X^i_n(\tau)) d^4X = \left(\int \delta(X) dX\right)^4 = 1$.

et où $P^i_{\text{charges}} \equiv \sum_n m_n u^i_n$ est la quadri-impulsion des particules chargées créant le champ, introduite en &4 avec $\frac{dP^i_{\text{charges}}}{dT} \equiv \sum_n m_n \frac{\gamma^i_n}{u^0_n}$. Ainsi, en absence de flux à travers Σ, la quadri-impulsion P^i totale, somme de celle du champ et des charges, est constante en vertu des équations de Maxwell et de Lorentz. Les grandeurs W et S définies en (15.1) s'interpètent donc comme les densités d'énergie et d'impulsion du champ, et T^{ik}, défini en (15.2), comme le *tenseur d'énergie-impulsion du champ électromagnétique.*

Réciproquement, si on *impose* que le tenseur impulsion-énergie du champ soit conservé, *i.e.* que $\partial_j T^{ij} = 0$, alors l'identité (15.3) implique $\partial_j F^{ij} = 0$. En d'autres termes, la conservation du tenseur énergie-impulsion du champ électromagnétique implique les équations du mouvement, *i.e.* les équations de Maxwell (hors des charges).

L'espace-temps absolu M_4 et sa cohorte de repères inertiels minkowskiens est un cadre manifestement approprié à la description de l'électromagnétisme, ainsi que nous venons de le voir. En est-il de même des autres interactions ? La réponse est oui pour ce qui est des champs à courte portée qui régissent la dynamique des nucléons et particules élémentaires, tous décrits en termes de quadri-vecteurs, tenseurs (ou spineurs) de M_4. Il est d'ailleurs une façon simple de le voir. Rappelons en effet que la loi (11.1) avec $F = 0$ permet aussi de traiter les problèmes de chocs de particules car, sauf au moment du choc, elles sont libres. Un choc élastique est défini par le fait que la quadri-impulsion totale du système est conservée dans l'interaction. Or cette loi de conservation permet de décrire, en accord avec l'expérience, les collisions de particules élémentaires qui, lors du choc, interagissent par l'intermédiaire de ces champs à courte portée.

La seule interaction fondamentale qui résiste à une formulation dans le cadre de la relativité restreinte est la gravitation. Ses diverses descriptions en termes de quadri-vecteurs ou tenseurs de M_4 ont toutes conduit à des prédictions en désaccord avec les observations (en particulier celle concernant l'avance du périhélie de Mercure). Point n'est donc ici besoin d'en faire l'historique.

16. Fluides parfaits

Tirant leçon de la formulation des lois de l'électromagnétisme dans le cadre de la relativité restreinte, on décrit le contenu énergétique de toute matière par un tenseur d'ordre deux symétrique dont les composantes T^{00} et $\frac{1}{c}T^{0\alpha}$ représentent sa densité d'énergie et d'impulsion.

Le flot d'un fluide, c.-à-d. l'ensemble continu (ou *congruence*) des lignes d'univers de ses éléments, est décrit par un champ de vecteurs $U^i(X^j)$, normalisé selon $U_i U^i = -c^2$, de sorte que $U^i = \frac{dX^i}{d\tau}$ est la quadri-vitesse de la ligne d'univers du flot d'équation $X^i = X^i(\tau)$ passant au point considéré X^i. Si, dans le repère inertiel où une portion du fluide est (momentanément) au repos, les grandeurs le décrivant sont isotropes, le fluide est dit *parfait.* Dans ce repère donc le tenseur énergie-impulsion du fluide est imposé être de la forme

$$T^{00} = \epsilon \quad , \quad T^{0\alpha} = 0 \quad , \quad T^{\alpha\beta} = c^2 p\, \delta^{\alpha\beta} \tag{16.1}$$

où $\epsilon(X^i)$ et $p(X^i)$ sont la *densité propre d'énergie* et la *pression* du fluide.

Un façon d'obtenir l'expression de T^{ij} dans le repère où le flot du fluide est $U^i(X^j)$ est de construire, à partir des scalaires ϵ et p et du vecteur U^i, un tenseur qui se réduise à (16.1) dans le repère où le fluide, dans un voisinage de X^j, est momentanément au repos, *i.e.* où les composantes de U^i se réduisent à $U^i = (c, 0, 0, 0)$. Le tenseur cherché est

$$T^{ij} = (\epsilon + p)\frac{U^i U^j}{c^2} + p\,\eta^{ij}\ . \tag{16.2}$$

Imposer la conservation du tenseur énergie-impulsion, $\partial_j T^{ij} = 0$, donne les équations du mouvement du fluide. En effet en contractant cette équation avec U_j on obtient d'abord la loi de conservation du *nombre baryonique* n défini par $dn/n = d\epsilon/(\epsilon + p)$:

$$\partial_i(n\, U^i) = 0\ . \tag{16.3}$$

A l'ordre le plus bas en $1/c$, ϵ est d'ordre $\mathcal{O}(c^2)$ (car elle inclut l'énergie de masse) et p d'ordre $\mathcal{O}(1)$, $n \propto \epsilon \sim c^2 \varrho$ où ϱ est la densité de masse et (16.3) se réduit à : $-\frac{\partial \varrho}{\partial T} = \nabla.(\varrho v)$, *i.e* à l'équation newtonienne de conservation de la masse (*cf* livre ND-JPU).

Tenant compte de (16.3) l'équation de conservation prend le nom d'*équation d'Euler relativiste* et s'écrit

$$(\epsilon + p)\,\frac{dU^k}{d\tau} + \frac{dp}{d\tau}\,U^k + c^2 \partial^k p = 0 \tag{16.4}$$

où $\frac{d}{d\tau} \equiv U^j \partial_j$, τ étant le temps propre de la ligne d'univers du fluide passant par X^i. A l'ordre le plus bas en $1/c$ (16.4) se réduit à l'équation d'Euler newtonienne, *cf* livre ND-JPU.

Finalement, une équation d'état, $p = p(\epsilon)$, ferme le système des équations du mouvement du fluide. Pour avoir un aperçu des équations d'état possibles, considérons un ensemble de particules ponctuelles de masses m_n. Par analogie avec l'expression du courant de particules chargées, *cf* eq (14.3), on définit son tenseur énergie-impulsion comme

$$T^{ij}(X^k) = \sum_n m_n c \int_{L_n} d\tau\, \delta_4(X^k - X_n^k(\tau))\, U_n^i U_n^j \tag{16.5}$$

où U_n^i est la quadri-vitesse de la particule n, tangente à sa ligne d'univers L_n. En effet

$$T^{ij} = \sum_n c\, m_n \frac{U_n^i U_n^j}{U_n^0}\, \delta_3(X^\alpha - X_n^\alpha(T)) \tag{16.6}$$

de sorte que T^{00} et $T^{0\alpha}/c$ représentent bien des densités d'énergie et d'impulsion. Si les interactions entre ces particules se limitent à des chocs, les quadri-vitesses U_n^i sont constantes entre ces chocs.

Si cet ensemble de particules peut être décrit comme un fluide parfait cela signifie qu'il existe un repère où il est en moyenne au repos et peut s'écrire sous la forme (16.1). On a alors, dans ce repère

$$\begin{aligned} \epsilon &= <T^{00}> = <\sum_n \frac{m_n c^2}{\sqrt{1 - V_n^2/c^2}} \delta_3(X^\alpha - X_n^\alpha(T))> \\ p &= \frac{1}{3} <T_\alpha^\alpha> = \frac{1}{3} <\sum_n \frac{m_n V_n^2}{\sqrt{1 - V_n^2/c^2}} \delta_3(X^\alpha - X_n^\alpha(T))> \end{aligned} \tag{16.7}$$

(la moyenne $<>$ étant prise sur les angles) de sorte qu'aux limites non-relativiste et ultra-relativiste (le fluide est alors appelé *radiation*), les équations d'état sont, respectivement

$$\epsilon \simeq \varrho c^2 + \frac{3}{2} p \qquad , \qquad \epsilon \simeq 3p\,. \tag{16.8}$$

Un fluide sans pression prend le nom de *poussière*. L'équation d'Euler (16.4) implique que son flot est rectiligne uniforme. Absence de pression signifie absence de chocs entre les particules constituant le fluide et dans ce cas la congruence des lignes d'univers des particules individuelles apparaissant dans (16.5) s'identifie au flot lui-même.

Enfin, en perturbant les équations de continuité et d'Euler (16.3-4) autour de la solution statique, $U^i = (c, 0, 0, 0)$, $\epsilon = \epsilon_0$, $p = p_0$, on obtient facilement l'équation du mouvement de la perturbation ϵ_1

$$-\frac{\partial^2 \epsilon_1}{\partial T^2} + v_s^2 \triangle \epsilon_1 = 0 \tag{16.9}$$

où $v_s^2 \equiv c^2 \frac{dp}{d\epsilon}|_0$. Ainsi l'équation de *propagation du son* est la même qu'en physique newtonienne (*cf* livre ND-JPU). Ni l'une ni l'autre n'est invariante par changement de repère inertiel, ce qui permet de déterminer le repère où le fluide est au repos.

Eléments de calcul extérieur

17. p-formes et produit extérieur

Considérons un tenseur T covariant de type $\binom{0}{p}$ défini sur le dual E_n^* d'un espace vectoriel de dimension n et de base θ^i. T se décompose selon $T = T_{i_1 i_2 \ldots i_p}\, \theta^{i_1} \otimes \theta^{i_2} \ldots \otimes \theta^{i_p}$. *Antisymétriser* T consiste à lui associer le tenseur complètement antisymétrique T_a selon

$$T_a = T_{[i_1 i_2 \ldots i_p]}\, \theta^{i_1} \otimes \theta^{i_2} \ldots \otimes \theta^{i_p} \tag{17.1}$$

dont les composantes complètement antisymétriques $T_{[i_1 i_2 \dots i_p]}$ peuvent être définies par récurrence :

$$T_{[ij]} \equiv \frac{1}{2!}(T_{ij} - T_{ji}) \quad , \quad T_{[ijk]} \equiv \frac{1}{3!}(T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij} - T_{jik} - T_{ikj} - T_{jki}) \quad etc \tag{17.2}$$

Ainsi, par exemple

$$\begin{aligned} (\theta^i \otimes \theta^j)_a &= \frac{1}{2}(\theta^i \otimes \theta^j - \theta^j \otimes \theta^i) \\ (\theta^i \otimes \theta^j \otimes \theta^k)_a &= \frac{1}{3!}(\theta^i \otimes \theta^j \otimes \theta^k + \theta^j \otimes \theta^k \otimes \theta^i + \theta^k \otimes \theta^i \otimes \theta^j - \\ &\quad - \theta^j \otimes \theta^i \otimes \theta^k - \theta^i \otimes \theta^k \otimes \theta^j - \theta^j \otimes \theta^i \otimes \theta^k) \qquad etc\,. \end{aligned} \tag{17.3}$$

Les tenseurs complètement antisymétriques de type $\binom{0}{p}$ s'appellent les *p-formes* ou *formes de degré p*. Elles constituent un sous-espace, noté $\Lambda^p E_n^*$, de l'ensemble des tenseurs de type $\binom{0}{p}$ sur l'espace vectoriel E_n^*. Ce sous-espace est invariant par changement de base, de dimension $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$. La dimension maximale d'une p-forme est donc $p = n$. Si par exemple la dimension de E_n^* est 3, les dimensions des espaces des $0, 1, 2, 3$-formes sont respectivement $1, 3, 3, 1$.

Le *produit extérieur* (ou de *Grassmann*) d'une p-forme α et d'une q-forme β est une $(p+q)$-forme définie par :

$$\alpha \wedge \beta \equiv \frac{(p+q)!}{p!q!}(\alpha \otimes \beta)_a\,. \tag{17.3}$$

Ainsi par exemple le produit extérieur des deux 1-formes θ^i et θ^j est la2-forme

$$\theta^i \wedge \theta^j = \theta^i \otimes \theta^j - \theta^j \otimes \theta^i\,. \tag{17.4}$$

Le produit extérieur possède les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} &(c_1\,\alpha + c_2\,\beta) \wedge \gamma = c_1\,\alpha \wedge \gamma + c_2\,\beta \wedge \gamma \quad , \quad (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \\ \text{et} \qquad &\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha \end{aligned} \tag{17.5}$$

où p et q sont les degrés des formes α et β et c_1, c_2 des constantes. On en déduit par exemple que le produit extérieur des trois 1-formes θ^i, θ^j et θ^k est la 3-forme

$$\theta^i \wedge \theta^j \wedge \theta^k = \theta^i \otimes \theta^j \otimes \theta^k + \theta^j \otimes \theta^k \otimes \theta^i + \theta^k \otimes \theta^i \otimes \theta^j - \theta^j \otimes \theta^i \otimes \theta^k - \theta^i \otimes \theta^k \otimes \theta^j - \theta^j \otimes \theta^i \otimes \theta^k\,. \tag{17.6}$$

Si θ^i est une base de E_n^*, la base naturelle de l'espace $\Lambda^p E_n^*$ des p-formes est $\theta^{i_1} \wedge \theta^{i_2} \dots \wedge \theta^{i_p}$, avec $i_1 < i_2 \dots < i_p$. Ainsi toute p-forme α se décompose-t-elle selon

$$\alpha = \frac{1}{p!}\alpha_{i_1 i_2 \dots i_p}\, \theta^{i_1} \wedge \theta^{i_2} \dots \wedge \theta^{i_p} \tag{17.7}$$

où les θ^i ne sont *pas* ordonnées, de sorte que ses composantes dans la base des θ^i ordonnées sont la partie antisymétrique *ordonnée* des $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_p}$.[18]

18. Le dual d'une p-forme

Considérons un espace vectoriel E_n muni d'une métrique euclidienne e ou minkowskienne ℓ et imposons que la base θ^i du dual E_n^* soit (pseudo-)orthonormée, *i.e* que $e = \delta_{ij}\,\theta^i \otimes \theta^j$ ou $\ell = \eta_{ij}\,\theta^i \otimes \theta^j$. Cette métrique peut servir d'ascenseur d'indice et établit une correspondance bijective entre vecteurs de E_n et formes de E_n^*.

[18] Ainsi par exemple une 2-forme à $n = 3$ s'écrit-elle : $\alpha = \frac{1}{2}(\alpha_{12}\theta^1 \wedge \theta^2 + \alpha_{21}\theta^2 \wedge \theta^1 + \dots) = \frac{1}{2}(\alpha_{12} - \alpha_{21})\theta^1 \wedge \theta^2 + \frac{1}{2}(\alpha_{13} - \alpha_{31})\theta^1 \wedge \theta^3 + \frac{1}{2}(\alpha_{23} - \alpha_{32})\theta^2 \wedge \theta^3 \equiv \alpha_{|[ij]|}\theta^i \wedge \theta^j$ où $\alpha_{|[ij]|}$ est la partie antisymétrisée *et* ordonnée $(i < j)$ de α_{ij}.

Soit une p-forme $\alpha = \frac{1}{p!}\alpha_{i_1\ldots i_p}\theta^{i_1}\wedge\ldots\theta^{i_p}$. Son *dual* est la $(n-p)$-forme ${}^*\alpha$ (où * dénote l'*opérateur de Hodge*) définie par

$$
{}^*\alpha = \frac{1}{(n-p)!p!}\epsilon_{i_1\ldots i_p i_{p+1}\ldots i_n}\alpha^{i_1\ldots i_p}\,\theta^{i_{p+1}}\wedge\ldots\theta^{i_n} \tag{18.1}
$$

où $\epsilon_{i_1\ldots i_n}$ est l'indice de Levi-Civita d'ordre n et où les indices ont été montés avec l'aide de la métrique, de composantes η^{ij} ou $\delta^{\alpha\beta}$ (et où les θ^i ne sont pas ordonnées). Prenons pour l'exemple le cas euclidien et $n=3$. Le dual de la 0-forme 1 est $\theta^1\wedge\theta^2\wedge\theta^3$; le dual de la 1-forme de base θ^1 est $\theta^2\wedge\theta^3$; le dual de la 2-forme $\theta^1\wedge\theta^2$ est θ^3 ; enfin le dual de $\theta^1\wedge\theta^2\wedge\theta^3$ est 1. A 4 dimensions et pour une métrique minkowskienne :

$$
\begin{array}{ccccc}
{}^*(\theta^0\wedge\theta^1) = -\theta^2\wedge\theta^3 & , & {}^*(\theta^0\wedge\theta^2) = +\theta^1\wedge\theta^3 & , & {}^*(\theta^0\wedge\theta^3) = -\theta^1\wedge\theta^2 \\
{}^*(\theta^1\wedge\theta^2) = +\theta^0\wedge\theta^3 & , & {}^*(\theta^1\wedge\theta^3) = -\theta^0\wedge\theta^2 & , & {}^*(\theta^2\wedge\theta^3) = +\theta^0\wedge\theta^1
\end{array} \tag{18.2}
$$

On se convainc aisément que si p est le degré de la forme α, n la dimension de l'espace et $\mathrm{sign}\, g$ la signature de sa métrique ($+1$ pour un espace euclidien, -1 pour un espace minkowskien) alors :

$$
{}^{**}\alpha = (-1)^{p(n-p)}(\mathrm{sign}\, g)\,\alpha\,. \tag{18.3}
$$

L'opérateur de Hodge permet de relier produit extérieur et produit vectoriel. Rappelons en effet qu'en géométrie euclidienne à $n=3$ dimensions le produit vectoriel de deux vecteurs v et w se décomposant selon $v = v^\beta h_\beta$ et $w = w^\gamma h_\gamma$ sur une base h_α de E_n est $v\wedge w \equiv \epsilon^\alpha{}_{\beta\gamma}v^\beta w^\gamma h_\alpha$. En utilisant la métrique euclidienne, de composantes $\delta^{\alpha\beta}$, comme ascenseur d'indice, on peut associer à ce vecteur $v\wedge w$ la forme $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}v^\beta w^\gamma\theta^\alpha$. Cette forme n'est autre que le dual du produit extérieur des formes $v_\beta\,\theta^\beta$ et $w_\gamma\,\theta^\gamma$ associées par ascension d'indices aux vecteurs v et w.

19. La dérivation extérieure

La *dérivation extérieure* est un opérateur, noté d, agissant sur une p-forme pour donner une $(p+1)$-forme et possédant les propriétés suivantes qui la définissent : si f est une 0-forme, $\mathrm{d}f(t) = t\,f$ (où t est un vecteur de E_n), ce qui coïncide avec la définition des (1)-formes différentielles(*cf e.g.* livre ND-JPU) ; $\mathrm{d}(\alpha+\beta) = \mathrm{d}\alpha + \mathrm{d}\beta$, α et β étant des formes de même degré, et

$$
\mathrm{d}(\alpha\wedge\beta) = \mathrm{d}\alpha\wedge\beta + (-1)^p\alpha\wedge\mathrm{d}\beta \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}^2 = 0 \tag{19.1}
$$

p étant le degré de α.

Cette définition ne requiert que l'introduction d'un espace vectoriel E_n (à partir duquel on construit son dual, puis ses produits tensoriels dont les formes sont des éléments). Mais si la "brique" de base est un espace (pseudo-)euclidien, on peut introduire les bases naturelles $\frac{\partial}{\partial X^i}$ et $\mathrm{d}X^i$ associées à des coordonnées (pseudo-)cartésiennes X^i, et la la dérivation extérieure se définit alors simplement par : soit $\alpha = \frac{1}{p!}\alpha_{i_1 i_2\ldots i_p}\mathrm{d}X^{i_1}\wedge\ldots\mathrm{d}X^{i_p}$ une p-forme ; sa dérivée extérieure est

$$
\mathrm{d}\alpha = \partial_l\alpha_{i_1 i_2\ldots i_p}\mathrm{d}X^l\wedge\mathrm{d}X^{i_1}\wedge\ldots\mathrm{d}X^{i_p} \tag{19.2}
$$

dont on vérifie qu'elle possède toutes les propriétés (19.1). La dernière, appelée *lemme de Poincaré*, se démontre facilement : $\mathrm{d}(\mathrm{d}\alpha) = \partial^2_{p\,l}\alpha_{i_1 i_2\ldots i_p}\mathrm{d}X^p\wedge\mathrm{d}X^l\wedge\mathrm{d}X^{i_1}\wedge\ldots\mathrm{d}X^{i_p} = 0$ vue la symétrie des dérivées secondes.

Une forme α dont la dérivée extérieure est nulle ($\mathrm{d}\alpha = 0$) est dite *fermée*. Une forme α qui est la dérivée extérieure d'une forme β ($\alpha = \mathrm{d}\beta$) est dite *exacte*. Une forme exacte est fermée ; réciproquement, si une p-forme est fermée alors elle est (localement du moins) exacte, *i.e.*, si α est telle que $\mathrm{d}\alpha = 0$ alors il existe une $(p-1)$-forme β telle que, localement, $\alpha = \mathrm{d}\beta$.

Lorsque l'on dispose d'une métrique on peut définir un autre opérateur de dérivation, la *codifférentielle*, notée δ, qui agit sur une forme α selon

$$
\delta\alpha = -(\mathrm{sign}\, g)(-1)^{n(p+1)}\,{}^*\mathrm{d}^*\,\alpha \tag{19.3}
$$

où $\mathrm{sign}\, g$ est la signature de la métrique, n la dimension de l'espace, p le degré de la forme α et * l'opérateur de Hodge défini en (18.3). Comme l'opération ** est essentiellement l'identité (*cf* (18.3)) et vu le lemme de Poincaré ($d^2 = 0$) on a

$$
\delta^2 = 0\,. \tag{18.4}
$$

20. Ré-écriture des équations de Maxwell

Le calcul extérieur permet une formulation compacte et élégante des équations de Maxwell, dont nous avons vu qu'elles étaient, dans un système de coordonnées minkoswkiennes X^i, cf & 13

$$F_{ij,k} + F_{jk,i} + F_{ki,j} = 0 \qquad , \qquad F^{ij}{}_{,j} = \frac{4\pi}{c} j^i \tag{20.1}$$

où F_{ij} est le tenseur de Faraday $F_{ij} \equiv \partial_i A_j - \partial_j A_i$, A_i étant le quadri-vecteur potentiel et j^i le quadri-vecteur courant.

Le quadri-vecteur potentiel est une 1-forme : $A = A_i \mathrm{d}X^i$. Le tenseur de Faraday est une 2-forme, dérivée extérieure de A :

$$F = \mathrm{d}A\,. \tag{20.2}$$

En effet : $\mathrm{d}A \equiv \partial_i A_j \, \mathrm{d}X^i \wedge \mathrm{d}X^j = \frac{1}{2}(\partial_i A_j - \partial_j A_i)\mathrm{d}X^i \wedge \mathrm{d}X^j \equiv \frac{1}{2} F_{ij} \mathrm{d}X^i \wedge \mathrm{d}X^j \equiv F$.

Le tenseur de Faraday étant une forme exacte, elle est fermée, *i.e.*

$$\mathrm{dF} = 0 \tag{20.3}$$

ce qui n'est autre que le premier groupe des équations de Maxwell. En effet :
$0 = \mathrm{d}F = \frac{1}{2}\partial_k F_{ij}\, \mathrm{d}X^k \wedge \mathrm{d}X^i \wedge \mathrm{d}X^j = (\partial_0 F_{12} + \partial_1 F_{20} + \partial_2 F_{01})\mathrm{d}X^0 \wedge \mathrm{d}X^1 \wedge \mathrm{d}X^2 + ...$

Quant au second groupe des équations de Maxwell il s'écrit

$$\mathrm{d}^*F = \frac{4\pi}{c}({}^*j)\,. \tag{20.4}$$

En effet : $F = F_{01}\, \mathrm{d}T \wedge \mathrm{d}X + ... + F_{12}\, \mathrm{d}X \wedge \mathrm{d}Y + ...$; ${}^*F = -F_{01}\, \mathrm{d}Y \wedge \mathrm{d}Z + ... + F_{12}\, \mathrm{d}T \wedge \mathrm{d}Z + ...$ (en utilisant (18.2) : d'où $\mathrm{d}^*F = \partial_0 F^{01}\, \mathrm{dT} \wedge \mathrm{d}Y \wedge \mathrm{d}Z + \partial_1 F^{01}\, \mathrm{dX} \wedge \mathrm{d}Y \wedge \mathrm{d}Z + ...$ en appliquant la définition (19.2), soit encore, en regroupant les termes : $\mathrm{d}^*F = \partial_j F^{0j}\, \mathrm{d}X \wedge \mathrm{d}Y \wedge \mathrm{d}Z - \partial_j F^{1j}\, \mathrm{d}T \wedge \mathrm{d}Y \wedge \mathrm{d}Z + ...$ Quant à ${}^*j$ il est donné par ${}^*j = \frac{1}{6}\epsilon_{ijkl} j^i\, \mathrm{d}X^j \wedge \mathrm{d}X^k \wedge \mathrm{d}X^l = j^0 \mathrm{d}X \wedge \mathrm{d}Y \wedge \mathrm{d}Z - j^1 \mathrm{d}T \wedge \mathrm{d}Y \wedge \mathrm{d}Z + ...$; *q.e.d.*

En prenant à nouveau le dual de l'équation (20.4) on obtient une formulation équivalente du premier groupe des équations de Maxwell :

$$\delta F = \frac{4\pi}{c} j\,. \tag{20.5}$$

Comme $\delta^2 = 0$, on a

$$\delta j = 0 \tag{20.6}$$

ce qui exprime la loi de conservation du courant, $\partial_i j^i = 0$. En effet : $\delta j = -{}^*\mathrm{d}^*j = -{}^*\mathrm{d}(j^0 \mathrm{d}X \wedge \mathrm{d}Y \wedge \mathrm{d}Z - j^1 \mathrm{d}T \wedge \mathrm{d}Y \wedge \mathrm{d}Z + ...) = -{}^*(\partial_0 j^0 \mathrm{d}T \wedge \mathrm{d}X \wedge \mathrm{d}Y \wedge \mathrm{d}Z - \partial_1 j^i \mathrm{d}X \wedge \mathrm{d}Y \wedge \mathrm{d}Z \wedge \mathrm{d}T + ...) = -\partial_i j^i\, {}^*(\mathrm{d}T \wedge \mathrm{d}X \wedge \mathrm{d}Y \wedge \mathrm{d}Z) = \partial_i j^i$.

21. Opérateurs différentiels et dérivation extérieure

Le gradient d'une fonction, ∇f est le vecteur associé à la forme différentielle $\mathrm{d}f$ par la métrique :

$$\nabla f = \partial^\alpha f \frac{\partial}{\partial X^\alpha} \quad , \quad \mathrm{d}f = \partial_\alpha f\, \mathrm{d}X^\alpha \tag{21.1}$$

L'équation (20.6) a montré par ailleurs l'identité entre co-différentielle d'une 1-forme et divergence d'un vecteur :

$$\nabla \,.\, \left(v^\alpha \frac{\partial}{\partial X^\alpha}\right) = \partial_\alpha v^\alpha \quad , \quad \delta(v_\alpha \mathrm{d}X^\alpha) = -\partial_\alpha v^\alpha \tag{21.2}$$

On a vu également en & 18 le lien entre produit vectoriel et dual de produit extérieur. A $n = 3$ dimensions et pour une métrique euclidienne on établit de même que le *rotationnel* d'un vecteur v, $\nabla \wedge v$ est la version vectorielle du dual de la différentielle de la 1-forme associée. En effet :

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \left(v^\alpha \frac{\partial}{\partial X^\alpha}\right) &= (\partial_Y v^Z - \partial_Z v^Y)\frac{\partial}{\partial X} - (\partial_X v^Z - \partial_Z v^X)\frac{\partial}{\partial Y} + (\partial_X v^Y - \partial_Y v^X)\frac{\partial}{\partial Z} \\ {}^*\mathrm{d}(v_\alpha \mathrm{d}X^\alpha) &= (\partial_Y v^Z - \partial_Z v^Y)\mathrm{d}X - (\partial_X v^Z - \partial_Z v^X)\mathrm{d}Y + (\partial_X v^Y - \partial_Y v^X)\mathrm{d}Z \end{aligned}\,. \tag{21.3}$$

Quant au laplacien d'une fonction f on peut le définir de deux façons équivalentes :

$$\triangle f = \nabla \, . \, \nabla f = \partial_\alpha \partial^\alpha f \quad , \quad \delta \mathrm{d} f = -\partial_\alpha \partial^\alpha f \tag{21.4}$$

On peut enfin généraliser l'opérateur de Laplace par $\triangle \equiv \delta \mathrm{d} + \mathrm{d}\delta$.

22. Le théorème de Stokes

Soit $\alpha = \frac{1}{p!} \alpha_{i_1 \ldots i_p} \mathrm{d}X^{i_1} \wedge \ldots \mathrm{d}X^{i_p}$ une p-forme décomposée sur la base naturelle des 1-formes $\mathrm{d}X^i$ associées à des coordonnées (pseudo)-euclidiennes X^i d'un espace (pseudo-)euclidien de dimension n. Soit une hypersurface Σ de dimension p dans cet espace. Elle peut être définie par des équations paramétriques : $X^i = X^i(\lambda^1, ..., \lambda^p)$. En substituant $\mathrm{d}X^i = \frac{\partial X^i}{\partial \lambda^j} \mathrm{d}\lambda^j$ dans l'expression de α on obtient sa restriction à Σ_p, forme différentielle d'ordre p dans un espace de dimension p, donc de degré maximum, qui est de la forme : $a(\lambda^i) \mathrm{d}\lambda^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\lambda^p$.[19] On définit alors l'intégrale de α sur Σ comme l'intégrale élémentaire

$$\int_\Sigma \alpha \equiv \int_\Sigma a(\lambda^i) d\lambda^1 ... d\lambda^p \, . \tag{22.1}$$

Ceci permet de donner un sens opérationnel (mais non rigoureux) au *théorème de Stokes* :

$$\int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}\alpha = \int_\Sigma \alpha \tag{22.2}$$

où si α est une p-forme, Σ est l'hypersurface de dimension p délimitant le volume $\mathcal{V}$ de dimension $(p+1)$. Le *théorème de Gauss* est un cas particulier du théorème de Stokes correspondant à $p = n - 1$, n étant la dimension de l'espace.

Covariance générale et repères accélérés

Equations du mouvement en repère quelconque

23. Repères accélérés et coordonnées gaussiennes

En mécanique newtonienne, voir livre ND-JPU, on considère quatre types de changement de coordonnées ou repère : (1) les changements de repère cartésien (rotation des trois axes et translation de l'origine) qui laissent vitesse et accélération invariantes ; (2) le passage d'un repère inertiel à un autre par le groupe de Galilée (mouvement de translation uniforme de l'origine), qui laisse l'accélération et la loi de la dynamique newtonienne invariantes ; (3) le passage à un repère accéléré par le groupe plus large des déplacements rigides (mouvement quelconque de rotation des trois axes et de translation de l'origine) qui introduit dans la loi de la dynamique des accélérations d'inertie ; enfin, (4), passage dans un repère cartésien donné à des coordonnées curvilignes qui conduit à écrire la loi de la dynamique en termes de dérivée covariante. Cette relative complexité est due à la structure de l'espace-temps de Newton : les changements de coordonnées (1) et (4) s'opèrent dans l'espace euclidien $\mathcal{E}_3$ (et sa cohorte d'espaces tangents) ; les opérations (2) et (3) définissent des familles de repères, un pour chaque feuille du fibré $N_4 = \mathcal{E}_3 \times R$.

Dans l'espace-temps pseudo-euclidien de Minkowski où se formulent les lois de la relativité restreinte seules les transformations de coordonnées $X^i = X^i(x^j)$, linéaires *ou non* sont envisageables.

Ainsi les transformations, linéaires, de Lorentz (qui laissent quadri-accélération *et* quadri-vitesse invariantes) unifient comme nous l'avons vu les changements de repères cartésiens et le passage d'un repère inertiel à un autre. Rassemblons les formules qui les caractérisent, *cf* & 5 :

$$X'^j = \Lambda_i{}^j (X^i - d^i) \quad ; \quad e_i = \Lambda_i{}^j e'_j \quad , \quad \epsilon'^j = \Lambda_i{}^j \epsilon^i \tag{23.1}$$

[19] Ainsi par exemple si $n = 3$ ($X^\alpha = \{X, Y, Z\}$) et α est une 2-forme, on a : $a(\lambda^2, \lambda^2) = 2(\alpha_{[12]} \partial_{[1} X \partial_{2]} Y + \alpha_{[13]} \partial_{[1} X \partial_{2]} Z + \alpha_{[23]} \partial_{[1} Y \partial_{2]} Z)$

avec $\Lambda_k{}^i \Lambda_l{}^j \eta_{ij} = \eta_{kl}$. Elles ne permettent pas de passer d'un repère inertiel à un "repère accéléré".

Ceci étant, dans un repère inertiel donné $\mathcal{S}$ on peut bien sûr utiliser des coordonnées curvilignes x^i reliées aux coordonnées minkowskiennes X^i par une transformation $x^i = x^i(X^j)$ plus générale que celles de Lorentz. Une telle transformation, non-linéaire et dépendant de X^0 c.-à-d. du temps, *définit* le passage de $\mathcal{S}$ à un *repère accéléré* $\mathcal{C}$.

Illustrons cette correspondance entre coordonnées curvilignes (et leurs bases naturelles associées) et repères accélérés par un exemple. Considérons une particule accélérée O' dont le vecteur position dans $\mathcal{S}$ est $OO' \equiv d(\tau) = d^i(\tau)e_i$. Si τ est son temps propre sa quadri-vitesse $u \equiv \dot{d} = U^i e_i$ est contrainte par $\eta_{ij}U^iU^j = -c^2$. Considérons sur cette ligne d'univers le point-événement défini par $\tau = \bar{\tau}$ et considérons un *repère inertiel tangent* à la ligne d'univers en ce point. Il est obtenu par une transformation de Lorentz

$$X'^j = \Lambda_i{}^j(\bar{\tau})\,(X^i - d^i(\bar{\tau})) \quad ; \quad e_i = \Lambda_i{}^j(\bar{\tau})\,e'_j \quad , \quad \epsilon'^j = \Lambda_i{}^j(\bar{\tau})\,\epsilon^i \tag{23.2}$$

telle que $e'_0 = u(\bar{\tau})$, ce qui fixe quatre composantes de la matrice inverse en fonction des trois composantes indépendantes de la quadri-vitesse selon : $\Lambda^i{}_0 = U^i(\bar{\tau})$. Les trois vecteurs de base spatiaux e'_α sont déterminés par un choix des trois paramètres définissant les rotations spatiales, *e.g.* les angles d'Euler (ainsi la matrice de Lorentz $\Lambda_i{}^j$ est déterminée en fonction de 6 paramètres comme il se doit) ; comme la quadri-accélération $\gamma = \dot{u}$ est orthogonale à u on peut choisir $e'_1 = \gamma/\sqrt{\eta_{ij}\gamma^i\gamma^j}$. C'est dans de tels repères que s'effectue par exemple le calcul de la durée de vie des muons mentionné plus haut (& 10).

Considérons maintenant un point P quelconque. Son rayon vecteur peut être décomposé selon $OP = OO' + O'P$ soit encore : $X^i e_i = d^i e_i + X'^i e'_i$. Si P est suffisamment proche de la ligne d'univers de O' ou si cette ligne n'est pas trop courbée il existe un instant τ et un seul pour lequel $O'P$ est orthogonal à u et pour lequel on a $X^i e_i = d^i e_i + X'^\alpha e'_\alpha$, $\alpha = (1, 2, 3)$. La position de P peut être ainsi définie soit par ses coordonnées minkowskiennes X^i soit par la donnée de τ et de X'^α. Appelons x^i ces quatre coordonnées : $x^0 \equiv \tau$, $x^\alpha \equiv X'^\alpha$. Elles sont reliées aux X^i par

$$X^i = d^i(x^0) + \Lambda^i{}_\alpha(x^0)\,x^\alpha\,. \tag{23.3}$$

Ces relations $X^i = X^i(x^j)$ ne sont *pas* linéaires et les composantes de la métrique dans les coordonnées x^i sont $\ell_{ij} \neq \eta_{ij}$. Ainsi les coordonnées x^i représentent-elles la position d'un point de l'espace-temps de Minkowski dans un *repère accéléré* dont l'origine est liée à une ligne d'univers particulière. Ce repère est l'analogue relativiste d'un repère du groupe des déplacements rigides de la physique newtonienne.

Sortir du cadre des transformations linéaires entraîne l'introduction de bases locales de l'espace vectoriel tangent à chaque point p : $\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial X^j}$ et des bases associées de l'espace dual cotangent : $\mathrm{d}x^i = \frac{\partial x^i}{\partial X^j}\mathrm{d}X^j$. Ainsi, dans le nouveau système l'élément de longueur et la métrique de Minkowski sont donnés par

$$ds^2 = \ell_{ij}\,dx^i dx^j \qquad , \qquad \ell = \ell_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j\ , \tag{23.4}$$

où les composantes du tenseur métrique ℓ_{ij} et celles de son inverse ℓ^{im} tel que $\ell_{ij}\,\ell^{im} = \delta^m_j$ sont reliées aux composantes η_{ij} de la métrique de Minkowski en coordonnées minkowskiennes par

$$\ell_{ij} = \eta_{kl}\frac{\partial X^k}{\partial x^i}\frac{\partial X^l}{\partial x^j} \qquad , \qquad \ell^{im} = \eta^{pq}\frac{\partial x^i}{\partial X^p}\frac{\partial x^m}{\partial X^q}. \tag{23.5}$$

Ces formules sont l'exact analogue dans l'espace-temps M_4 des formules qui définissent les changements de coordonnées dans $\mathcal{E}_3$, *cf* livre ND-JPU.

24. Abandon des solides de référence accélérés

Reste maintenant la question de savoir ce que représentent les nouvelles coordonnées x^i ou, de manière équivalente, la question de matérialiser un repère accéléré par un système de référence dans l'espace physique réel, "relatif, apparent & vulgaire".

Cela ne pose pas de problème conceptuel en physique newtonienne où les repères accélérés s'obtiennent par déplacement rigide de sorte qu'on peut les concrétiser en accélérant un *solide* de référence dans lequel, par construction, la distance entre deux points reste la même et les trois axes restent orthonormés au cours du temps.[20]

En relativité restreinte, la coordonnée minkowskienne $T = X^0/c$ représente le temps d'une horloge immobile dans le repère inertiel considéré. La coordonnée $t = x^0/c$ ne représente *pas* en revanche en général le temps d'une horloge immobile dans $\mathcal{C}$ car on a postulé que c'est le temps propre qui joue ce rôle. Ce temps propre est donné par $\tau = \int \sqrt{1 - V^2/c^2}\, dT$ où V est la 3-vitesse de l'horloge par rapport à un repère inertiel $\mathcal{S}$. Mesuré en terme des coordonnées de $\mathcal{C}$ il s'obtient à partir de (23.4) en y posant $dx^i = \frac{dx^i}{dt}dt$ et vaut

$$\tau = \frac{1}{c}\int \sqrt{-ds^2} = \frac{1}{c}\int \sqrt{-\ell_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}dt = \int \sqrt{-\ell_{00}}\, dt \tag{24.1}$$

car la 3-vitesse de l'horloge est nulle dans $\mathcal{C}$.

Quant aux coordonnées spatiales x^α, peuvent-elles représenter un solide de référence tridimensionnel cartésien ? La réponse est "non" en général. En effet il faudrait pour cela que, à un temps constant à préciser, t par exemple, la métrique spatiale, donné par la formule (23.5), soit euclidienne, c'est-à-dire que : $\ell_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$. C'est là une condition très restrictive : seuls quelques repères (en accélération ou rotation uniformes par exemple) satisfont à ce critère de rigidité.

La notion de *solide* de référence accéléré ne laissant donc pas d'être subtile en relativité on est amené à admettre que *tout* système de coordonnées x^i peut être associé à un système matériel de référence, les coordonnées x^α étiquetant la position de ses points à un instant coordonnée $t = x^0/c$ dont la signification physique en terme de temps propre mesuré par une horloge est à préciser cas par cas. Dans le cadre ainsi élargi de la relativité restreinte on abandonne donc les notions de repère et de référentiels rigides introduits en physique newtonienne.[21]

25. Version covariante des équations de mouvement

La ligne d'univers d'un point matériel étant donnée par $X^i = X^i(\tau)$ dans un repère inertiel $\mathcal{S}$, τ étant son temps propre, et par $x^i = x^i(\tau) \equiv x^i(X^j(\tau))$ dans un système de coordonnées quelconque $\mathcal{C}$, les composantes de ses quadri-vitesse et de sa dérivée dans $\mathcal{C}$ sont données par

$$\left\{ \begin{aligned} u^i \equiv \frac{dx^i}{d\tau} &= \frac{\partial x^i}{\partial X^j}U^j \\ \frac{du^i}{d\tau} &= \frac{\partial x^i}{\partial X^j}\gamma^j + \frac{\partial^2 x^i}{\partial X^j \partial X^k}U^j U^k \end{aligned} \right. \tag{25.1}$$

où U^i et γ^i sont les composantes de ses quadri-vitesse et accélération dans $\mathcal{S}$. Ces formules sont identiques à celles qui donnent la transformation de la vitesse newtonienne et de sa dérivée dans les changements généraux de coordonnées et montrent que les composantes $\frac{\partial x^i}{\partial X^j}\gamma^j$ de l'accélération dans $\mathcal{C}$ ne sont pas les dérivées temporelles ordinaires des u^i mais leurs dérivées *covariantes* $\frac{\tilde{D}u^i}{d\tau}$ données par

$$\frac{\tilde{D}u^i}{d\tau} \equiv \frac{du^i}{d\tau} + \tilde{\Gamma}^i_{jk}u^j u^k \quad \text{avec} \quad \tilde{\Gamma}^i_{jk} \equiv \frac{\partial^2 X^m}{\partial x^j \partial x^k}\frac{\partial x^i}{\partial X^m}\,. \tag{25.2}$$

On rappelle que les coefficients de connexion ou symboles de Christoffel $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$ peuvent aussi s'écrire en fonction des composantes ℓ_{ij} de la métrique de Minkowski comme

$$\tilde{\Gamma}^i_{jk} = \frac{1}{2}\ell^{il}\left(\frac{\partial \ell_{kl}}{\partial x^j} + \frac{\partial \ell_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial \ell_{jk}}{\partial x^l}\right) \tag{25.3}$$

[20] Ceci dit, un bon trièdre de référence ne doit pas être disloqué au cours de son mouvement par les forces d'inertie qu'il subit, ce qui signifie concrètement qu'il ne peut être arbitarirement grand et qu'on n'y peut vérifier que localement les lois de la mécanique.

[21] Il reste néanmoins dans l'ensemble des systèmes de coordonnées x^i un sous-ensemble pour lequel la notion de repère tri-dimensionnel solide reste valide, à savoir les coordonnées minkowskiennes des repères inertiels !

et l'on vérifie que $\tilde{D}_i\ell_{jk} = 0$. Par ailleurs, dans un second changement de coordonnées : $x^j \to x'^k(x^j)$, les fonctions $\tilde{\Gamma}^i_{jk} \to \tilde{\Gamma}'^i_{jk}$ se transforment selon

$$\tilde{\Gamma}'^i_{jk} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^a}\frac{\partial x^b}{\partial x'^j}\frac{\partial x^c}{\partial x'^k}\,\tilde{\Gamma}^a_{bc} + \frac{\partial^2 x^a}{\partial x'^j \partial x'^k}\frac{\partial x'^i}{\partial x^a}\,. \tag{25.4}$$

(Voir, *e.g.*, livre ND-JPU pour une introduction à la dérivation covariante.)

L'équation du mouvement d'un point matériel sans structure interne dont la ligne d'univers est donnée par $X^i = X^i(\tau)$ dans le repère inertiel $\mathcal{S}$ est : $m\gamma = F$. Dans un système de coordonnées quelconque $\mathcal{C}$ elle s'obtient exactement comme en géométrie euclidienne et s'écrit en termes de la dérivation covariante $\tilde{D}$ selon

$$m\,\tilde{D}_u\,u = F \qquad \Longleftrightarrow \qquad m\,\frac{\tilde{D}u^i}{d\tau} = \frac{\partial x^i}{\partial X^j}F^j \tag{25.5}$$

où F^i sont les composantes de la force dans $\mathcal{S}$.

Ainsi l'équation de Lorentz (12.3) du mouvement d'une charge s'écrira dans le système $\mathcal{C}$ où sa quadri-vitesse est $u^i = \frac{dx^i}{d\tau}$:

$$m\,\frac{\tilde{D}u^i}{d\tau} = \frac{q}{c}F^i{}_j\,u^j \qquad \text{avec} \qquad F_{ij} = \tilde{D}_iA_j - \tilde{D}_jA_i = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j} \tag{25.6}$$

où la dernière égalité provient du fait que les symboles de Christoffel sont symétriques, où A_i sont les composantes, dans $\mathcal{C}$, du vecteur quadri-potentiel A : $A = A_i\,\mathrm{d}x^i$ et où les indices sont descendus ou montés à l'aide de ℓ_{ij} ou de son inverse. Quant aux équations de Maxwell (13.3) elles deviennent

$$F_{ij;k} + F_{jk;i} + F_{ki;j} = 0 \qquad , \qquad F^{ij}{}_{;j} = \frac{4\pi}{c}j^i \tag{25.7}$$

où l'on rappelle que $F_{ij;k} \equiv \tilde{D}_kF_{ij} = F_{ij,k} - \tilde{\Gamma}^l_{ki}F_{lj} - \tilde{\Gamma}^l_{kj}F_{il}$. A cause de l'antisymétrie de F_{ij} elle s'écrivent aussi

$$F_{ij,k} + F_{jk,i} + F_{ki,j} = 0 \qquad , \qquad \frac{\partial_j(\sqrt{(\det\ell)}\,F^{ij})}{\sqrt{(\det\ell)}} = \frac{4\pi}{c}j^i\,. \tag{25.8}$$

La conservation du tenseur énergie-impulsion du champ,

$$T^{ij} = \frac{1}{4\pi}\left(F^i{}_kF^{jk} - \frac{1}{4}\,\ell^{ij}\,F_{kl}F^{kl}\right), \tag{25.9}$$

s'écrit, en tenant compte des équations de Maxwell

$$\tilde{D}_kT^{ik} = -\frac{1}{c}F^i{}_kj^k\,. \tag{25.10}$$

Enfin, le tenseur énergie-impulsion d'un fluide parfait se généralise tout aussi automatiquement

$$T^{ij} = (\epsilon + p)\frac{u^iu^j}{c^2} + p\,\ell^{ij} \tag{25.11}$$

et la loi covariante de conservation, $\tilde{D}_iT^{ij} = 0$, conduit aux versions covariantes des équations de continuité et d'Euler (16.3-4) régissant le mouvement d'un fluide :

$$\tilde{D}_i(n\,u^i) = 0 \qquad , \qquad (\epsilon + p)\,\frac{\tilde{D}u^k}{d\tau} + \frac{dp}{d\tau}\,u^k + c^2\partial^kp = 0\,. \tag{25.12}$$

26. Géométrisation des forces d'inertie

D'un point de vue mathématique l'équation du mouvement $m\tilde{D}_u u = F$ n'est qu'une généralisation triviale. Dans le cadre de la physique newtonienne, c'est-à-dire si nous remplaçons les indices latins par des indices grecs, u par v, τ par t et ℓ par e, elle permet de calculer par exemple l'accélération d'une planète en coordonnées polaires.

Dans le cadre de la relativité elle prend en revanche une tout autre dimension car, le temps y étant devenu une coordonnée, elle remplace à la fois l'équation de la dynamique en coordonnées curvilignes ($m\,\tilde{D}_v v = F$) *et* en repère accéléré ($m\frac{dv}{dt} = F + m(-2\Omega\wedge v + ...)$. Ainsi les accélérations d'inertie sont maintenant absorbées dans la dérivation covariante, "encodées" dans les symboles de Christoffel. C'est là un aspect de la *relativité générale*, à savoir que les lois de la physique doivent être covariantes, *i.e.* avoir même expression dans *tout* repère, accéléré ou non, soit encore dans tout système de coordonnées, cartésiennes ou non. L'espace-temps de Minkowski, cadre naturel où formuler l'électromagnétisme, offre donc en quelque sorte comme *bonus* la géométrisation des forces d'inertie.

A l'inverse on peut se poser la question : les composantes $\ell_{ij}(x^k)$ de la métrique de Minkowski étant donnée dans un système de coordonnées curvilignes x^i, comment retourner à un repère inertiel et ses coordonnées minkowskiennes associées X^i et effacer ainsi les forces d'inertie ? La réponse est dans son principe simple : les symboles de Christoffel $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$ sont connus en fonction de $\ell_{ij}(x^k)$ et de sa matrice inverse par les formules (25.3) : $\tilde{\Gamma}^i_{jk} = \frac{1}{2}\ell^{il}(\partial_j\ell_{kl} + \partial_k\ell_{li} - \partial_l\ell_{kj})$; d'autre part ils sont reliés à des coordonnées minkowskiennes X^i par les formules (25.2) qui s'écrivent aussi

$$\frac{\partial^2 X^l}{\partial x^i \partial x^j} = \tilde{\Gamma}^i_{jk}\frac{\partial X^l}{\partial x^k}\,. \tag{26.1}$$

Une fois ces équations *linéaires* résolues il reste à fixer les constantes d'intégration, ce que l'on fait en imposant (23.5), à savoir : $\eta_{kl}\frac{\partial X^k}{\partial x^i}\frac{\partial X^l}{\partial x^j} = \ell_{ij}$. Il en restera 10, les 10 paramètres du groupe de Poincaré dont le choix détermine un repère inertiel particulier.

Concluons par une remarque : pour pouvoir être vues comme composantes de la métrique de Minkowski les 10 fonctions $\ell_{ij}(x^k)$ ne peuvent pas être quelconques puisqu'elles doivent pouvoir s'exprimer en fonctions de quatre fonctions indépendantes seulement selon $\ell_{ij} = \eta_{kl}\frac{\partial X^k}{\partial x^i}\frac{\partial X^l}{\partial x^j}$. Si ce n'est pas le cas elles pourront toujours caractériser une métrique mais d'un l'espace-temps plus complexe que celui de Minkowski, *courbe*.

L'exemple du repère de Rindler

27. Ligne d'univers d'une particule uniformément accélérée

Soit dans un repère inertiel $\mathcal{S}$, c.-à-d. dans un système de coordonnées minkowskiennes $X^i = (T, X)$ où l'élément de longueur est donné par $ds^2 = -dT^2 + dX^2$ (nous ne considèrerons que des mouvements selon l'axe des X, poserons dorénavant $c = 1$ et ignorerons les coordonnées Y, Z), une particule P_{acc} dont la ligne d'univers est la branche $X > 0$ de l'hyperbole $X^2 - T^2 = 1/g^2$ où g est une constante. Cette équation peut être écrite sous la forme paramétrique

$$T = \frac{1}{g}\sinh g\tau \quad , \quad X = \frac{1}{g}\cosh g\tau \tag{27.1}$$

$$\Longrightarrow \quad U^i \equiv \frac{dX^i}{d\tau} = (\cosh g\tau\ ,\ \sinh g\tau) \quad , \quad \gamma^i \equiv \frac{dU^i}{d\tau} = g(\sinh g\tau\ ,\ \cosh g\tau) \tag{27.2}$$

où τ est le temps propre de P_{acc} (car $U^iU_i = -1$). La quadri-accélération γ^i est de module constant g et est orthogonale à la quadri-vitesse u : $U^i\gamma_i = 0$. La 3-vitesse est : $V \equiv \frac{dX}{dT} = \tanh g\tau$ et tend vers 1 (*i.e.* vers la vitesse de la lumière) pour T et $\tau \to \pm\infty$. La 3-accélération est $a \equiv \frac{d^2X}{dT^2} = g\cosh^{-3} g\tau$. A la limite des faibles vitesses ($g\tau \ll 1$) on retrouve la parabole newtonienne : $T \sim \tau$, $v \sim gT$, $X \sim \frac{1}{g} + \frac{1}{2}gT^2$.

28. Horizons, décalages spectraux et repères inertiels tangents

Supposons qu'une particule P_{in} au repos en $X = 1/g$ dans $\mathcal{S}$ envoie un signal lumineux à $T = T_e$ vers la particule P_{acc} dont la ligne d'univers est donnée par (27.1). Ce signal se propage sur un cône de lumière, *i.e.* le long de la droite $X = T - T_e + 1/g$. La ligne d'univers de P_{acc} étant asymptotique à $X = T$ pour $T \to +\infty$, on voit que si $T_e > 1/g$, ce signal n'atteindra pas P_{acc}.

La particule P_{acc} est accélérée ; mais à chaque instant on peut lui associer un repère inertiel $\mathcal{S}_g$, tangent à sa ligne d'univers. Les signaux lumineux qu'elle émet vers P_{in} se propagent le long des cônes de lumière communs à $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}_g$ d'équations $X = -T + Const.$. Sa ligne d'univers étant asymptotique à $X = -T$ pour $T \to -\infty$ on voit qu'aucun de ces signaux ne peut atteindre P_{in} avant $T = -1/g$.

Ainsi P_{acc} entre dans l'*horizon* de P_{in} à $T = -1/g$ (avant cette date aucun signal en provenance de P_{acc} ne peut atteindre P_{in}) ; et à $T = +1/g$ c'est P_{in} qui sort de l'horizon de P_{acc} (après cette date aucun signal en provenance de P ne peut atteindre P_{acc}).

Qualitativement, la raison de ce phénomène est qu'asymptotiquement la vitesse de P_{acc} approche celle de la lumière. Quand donc $T \to -\infty$ les signaux émis par la particule P_{acc} ne peuvent la devancer et P_{in} les recevoir. Quand $T \to +\infty$ P_{acc} s'éloigne à la vitesse de la lumière et les signaux émis par P_{in} ne peuvent pas la rattraper.

Plus quantitativement, au laps $\Delta\tau^e_{P_{acc}}$ du temps propre de P_{acc} qui sépare l'envoi de deux rayons lumineux, correspond le laps de temps dans $\mathcal{S}$: $\Delta T_e \simeq \Delta\tau^e_{P_{acc}}/\sqrt{1-V_e^2}$ où V_e est la vitesse de P_{acc} dans $\mathcal{S}$ au moment d'émission ("dilatation du temps"). Comme les deux rayons sont envoyés d'endroits différents l'intervalle séparant la réception des deux messages par P_{in} est $\Delta T_r = \Delta T_e(1+V_e)$ (effet Doppler). Cet intervalle est aussi celui effectivement mesuré par P_{in} qui est immobile dans $\mathcal{S}$. Ainsi l'on a :

$$\Delta\tau^r_{P_{in}} = \Delta T_r \simeq \Delta T_e(1+V_e) \simeq \Delta\tau^e_{P_{acc}}\sqrt{\frac{1+V_e}{1-V_e}}. \tag{28.1}$$

Si $\Delta\tau^e_{P_{acc}}$ est la période de la lumière émise par P_{acc}, on voit que lorsque P_{acc} entre dans l'horizon de P_{in} ($V_e \to -1$) la période mesurée par P_{in} tend vers 0 et la fréquence du signal est infiniment décalée vers le bleu. Inversement lorsque P_{in} sort de l'horizon de P_{acc} ($V_e \to 1$) la fréquence des signaux reçus par P_{in} est infiniment décalée vers le rouge.

Ce raisonnement, qui introduit un repère inertiel tangent à la ligne d'univers de P_{acc} au moment de l'envoi du signal, n'est justifié que si la vitesse de P_{acc} ne varie pas trop pendant la durée de l'émission. On trouve que cela impose $g\Delta\tau^e_{P_{acc}} \ll 1$; (pour $g = 10^n \times 10\text{m/sec}^2$ par exemple, $\tau \ll 10^{-n}$ an, ce qui laisse de la marge...)

Supposons maintenant que ce soit P_{in} qui envoie des messages à P_{acc}. C'est alors P_{in} qui a une vitesse temporairement constante par rapport à P_{acc}, égale à $-V_r$, V_r étant la vitesse de P_{acc} dans $\mathcal{S}$ au moment de la réception du message. En intervertissant les rôles on obtient :

$$\Delta\tau^r_{P_{acc}} \simeq \Delta\tau^e_{P_{in}}\sqrt{\frac{1+V_r}{1-V_r}}. \tag{28.2}$$

où $\Delta\tau^r_{P_{acc}}$ est l'intervalle, mesuré par P_{acc}, séparant la réception des signaux, que P_{in} a émis à $\Delta\tau^e_{P_{in}}$ d'intervalle de son temps propre. Si $\Delta\tau^e_{P_{in}}$ est la période de la lumière émise par P_{in}, on voit que lorsque $V_r \to -1$ les signaux que reçoit P_{acc} sont infiniment décalés vers le bleu. Inversement lorsque $V_r \to 1$ les signaux reçus par P_{acc} sont infiniment décalés vers le rouge. (A nouveau, pour que le raisonnement tienne, il faut que $g\Delta\tau^r_{P_{acc}} \ll 1$.)

Précisons la construction des repères inertiels $\mathcal{S}_g$ tangents à la ligne d'univers de P_{acc}. Les vecteurs de base (e'_0, e'_1) de ces repères $\mathcal{S}_g$ se déduisent des vecteurs de base (e_0, e_1) de $\mathcal{S}$ par des transformations de Lorentz telles que les e'_0 soient à chaque instant τ parallèles à la quadri-vitesse u de P_{acc}. Quant aux e'_1 ils sont orthogonaux aux e'_0 et donc, *cf* (27.2)

$$e'_0 = e_0\cosh g\tau + e_1\sinh g\tau = u \qquad , \qquad e'_1 = e_0\sinh g\tau + e_1\cosh g\tau = \frac{a}{g} \tag{28.3}$$

Les transformations de coordonnées $(T, X) \mapsto (T', X')$, elles, s'écrivent

$$T' = T\cosh g\tau - X\sinh g\tau \qquad , \qquad X' = -T\sinh g\tau + X\cosh g\tau - \frac{1}{g}\,. \tag{28.4}$$

Dans un de ces repères inertiels, caractérisé par $\tau = \bar{\tau}$, la ligne d'univers de P_{acc} est, *cf* (27.1) et (28.4)

$$T' = \frac{1}{g}\sinh[g(\tau - \bar{\tau})] \quad , \quad X' = \frac{1}{g}\cosh[g(\tau - \bar{\tau})] - \frac{1}{g} \tag{28.5}$$

et se confond avec l'origine $X' = 0$ tant que $|g(\tau - \bar{\tau})| \ll 1$.

29. Calculs exacts de décalages spectraux ; durée de vie des "jumeaux"

Pour calculer l'intervalle de temps $\Delta\tau^r_{P_{in}}$, mesuré par P_{in} immobile en $X = 1/g$ dans $\mathcal{S}$, qui sépare la réception de signaux émis par P_{acc} à $\Delta\tau^e_{P_{acc}}$ d'intervalle de son temps propre, point n'est en fait besoin de recourir à des repères inertiels tangents. On a en effet : $\Delta\tau^e_{P_{acc}} = \tau_{e_2} - \tau_{e_1}$ où τ_{e_1} et τ_{e_2} sont les temps propres de P_{acc} d'émission du premier et second signal lumineux. La ligne d'univers du premier signal vers P_{in} est $T = -X + X_{e_1} + T_{e_1} = -X + \exp(g\tau_{e_1})/g$, *via* (27.1). Ce signal atteint la ligne d'univers de P_{in} à $gT_{r_1} = -1 + \exp(g\tau_{e_1})$. on a donc $g\Delta T_r = [\exp(g\tau_{e_2}) - \exp(g\tau_{e_1})] = \exp(g\tau_{e_1})[\exp(g\Delta\tau^e_{P_{acc}}) - 1]$. Comme P_{in} est immobile dans $\mathcal{S}$ son temps propre $\tau_{P_{in}}$ s'identifie au temps T, temps des horloges immobiles dans $\mathcal{S}$ et on a $\Delta\tau^r_{P_{in}} = \Delta T_r$. Se rappelant enfin que la 3-vitesse de P_{acc} est $V = \tanh g\tau$ on obtient, quel que soit le laps de temps séparant l'émission des deux signaux P_{acc} :

$$g\Delta\tau^r_{P_{in}} = \sqrt{\frac{1 + V_{e_1}}{1 - V_{e_1}}}\left[\exp(g\Delta\tau^e_{P_{acc}}) - 1\right] \tag{29.1}$$

qui se réduit bien à (28.1) lorsque $g\Delta\tau^e_{P_{acc}} \ll 1$.

Un calcul calqué sur le précédent donne la formule exacte de l'intervalle de temps $\Delta\tau^r_{P_{acc}}$ séparant la réception par P_{acc} de signaux émis par la particule immobile P_{in} en fonction de l'intervalle $\Delta\tau^e_{P_{in}}$ selon

$$g\Delta\tau^r_{P_{acc}} = -\ln\left(1 - g\Delta\tau^e_{P_{in}}\sqrt{\frac{1 + V_{r1}}{1 - V_{r1}}}\right) \tag{29.2}$$

qui redonne (28.2) si $g\Delta\tau^r_{P_{acc}} \ll 1$.

Autre exemple : soit deux particules uniformément accélérées P_e et P_r, respectivement en $X_e = 1/g_e$ et $X_r = 1/g_r$ à $T = 0$, dont les lignes d'univers sont données par

$$X^i = \left(\frac{1}{g_e}\sinh g_e\tau\ ,\ \frac{1}{g_e}\cosh g_e\tau\right) \qquad , \qquad X^i = \left(\frac{1}{g_r}\sinh g_r\tau\ ,\ \frac{1}{g_r}\cosh g_r\tau\right) \tag{29.3}$$

(avec $g_e > g_r$). P_e envoie des signaux lumineux à $\Delta\tau_e = \tau_{e_2} - \tau_{e_1}$ de son temps propre. Ils sont reçus par P_r à $\Delta\tau_r = \tau_{r_2} - \tau_{r_1}$ d'intervalle de son temps propre. La ligne d'univers du premier signal est $T = X - X_{e_1} + T_{e_1}$. Ainsi $X_{r_1} - T_{r_1} = \exp(-g_r\tau_{r_1}) = \exp(-g_e\tau_{e_1})$ de sorte que $\tau_{r_1} = \tau_{e_1}g_e/g_r$. Par conséquent l'intervalle de temps propre $\Delta\tau_r$ qui sépare la réception par P_r des deux signaux émis par P_e à $\Delta\tau_e$ de son temps propre est donné par

$$\Delta\tau_r = (1 + g_e h)\Delta\tau_e \tag{29.4}$$

où on a posé $X_r = X_e + h$. Cette prédiction est assez trivialement à mettre, comme les précédentes, sur le compte de simples effets cinématiques.

Il en est de même de la différence de durée de vie des "jumeaux" de Langevin. Considérons dans le repère inertiel $\mathcal{S}$ la particule accélérée P_{acc} (le "jumeau voyageur") et une particule libre P_{in} en $X = X_{in} > 1/g$ (le "jumeau sédentaire"). Leurs lignes d'univers se coupent en $T = \pm T_0$, instants où le voyageur quitte le sédentaire et où il le retrouve. La durée qui sépare ces deux événements est $\Delta\tau_{in} = 2T_0$ pour P_{in} (le sédentaire). La durée mesurée par P_{acc} (le voyageur) est $\Delta\tau_{acc} = 2\tau_0$ avec $gX_{in} = \cosh g\tau_0$ et $gT_0 = \sinh g\tau_0$ et par conséquent

$$\Delta\tau_{acc} = \frac{2}{g}\mathrm{ArgSh}\,\frac{g\Delta\tau_{in}}{2} \qquad (< \Delta\tau_{in})\,. \tag{29.5}$$

30. Système de coordonnées et repère de Rindler

Bien sûr on peut effectuer les calculs précédents de décalage spectraux et de durée de vie dans d'autres systèmes de coordonnées, par exemple les coordonnées de *Rindler* (t, x), reliées aux coordonnées minkowkiennes (T, X) par

$$\begin{aligned} gT = (1+gx)\sinh gt \quad &, \quad gX = (1+gx)\cosh gt \\ \text{soit} \qquad g^2(X^2 - T^2) = (1+gx)^2 \quad &, \quad \frac{T}{X} = \tanh gt \end{aligned} \tag{30.1}$$

Comme on le voit facilement à partir de (27.1) et (28.3), le passage des coordonnées (T, X) aux coordonnées (t, x) est un cas particulier de la prescription qui fait passer de (23.2) à (23.3). Dans ce système la ligne d'univers de la particule P_{acc} est $x = 0$ et son temps propre est $\tau = t$.

Les vecteurs de la base naturelle de l'espace tangent d'un point p sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial t}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial T}{\partial t}\frac{\partial}{\partial T} = (1+gx)\left(\cosh gt \frac{\partial}{\partial T} + \sinh gt \frac{\partial}{\partial X}\right) \\ &= (1+gx)(e_0 \cosh gt + e_1 \sinh gt) \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial}{\partial T} = \cosh g\tau \frac{\partial}{\partial X} + \sinh g\tau \frac{\partial}{\partial T} = e_0 \sinh gt + e_1 \cosh gt\,. \end{aligned} \tag{30.2}$$

On peut aussi introduire la base non holonome (h_x, h_t) et le champ de repères associés (θ^x, θ^t)

$$h_x = \frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad h_t = \frac{1}{1+gx}\frac{\partial}{\partial t} \qquad , \qquad \theta^x = \mathrm{d}x \quad , \quad \theta^t = (1+gx)\mathrm{d}t\,. \tag{30.3}$$

Dans ce nouveau système l'élément de longueur minkowskien s'écrit :

$$ds^2 = -dT^2 + dX^2 = -(1+gx)^2 dt^2 + dx^2 \tag{30.4}$$

et la métrique de Minkowski devient

$$\ell = -\mathrm{d}T^2 + \mathrm{d}X^2 = -(1+gx)^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 = -(\theta^t)^2 + (\theta^x)^2 \tag{30.5}$$

Les repères locaux (θ^t, θ^x) liés à $x = 0$ (ligne d'univers de P_{acc}) ne sont autres que les repères inertiels tangents introduits en & 28, avec $t = \tau$.

Les coordonnées de Rindler ne se déduisent *pas* des coordonnées minkowskiennes (T, X) par une transformation de Lorentz. On note plutôt la ressemblance avec le passage des coordonnées cartésiennes (u, v) aux coordonnées polaires $(r, \phi\ : u = r\cos\phi, v = r\sin\phi)$ en géométrie euclidienne :

$$dl^2 = dv^2 + du^2 = r^2 d\phi^2 + dr^2. \tag{30.6}$$

L'analogie devient complète si l'on pose : $1 + gx = gr,\ gt = \mathrm{i}\,\phi\ ; X = u,\ T = \mathrm{i}\,v$. On remarque cependant que si les coordonnées polaires (r, ϕ) couvrent tout le plan euclidien (u, v), il n'en est pas de même des coordonnées de Rindler (t, x) qui ne couvrent que les cadrans $X^2 > T^2$ du plan minkowskien (T, X).

Chaque ligne $x = Cte$ est une hyperbole de M_4 et représente la ligne d'univers d'une particule de quadri-accélération constante $\frac{g}{1+gx}$.

L'équation de la ligne d'univers d'une particule libre, en translation uniforme dans $\mathcal{S}$, est donnée par l'équation géodésique $\tilde{D}_u u = 0$, soit, plus simplement par :

$$X = AT + B \qquad \text{soit} \qquad \frac{g}{1+gx} = \frac{\cosh gt - A\sinh gt}{B}. \tag{30.7}$$

Ainsi la ligne d'univers de la particule P_{in} au repos en $X = 1/g$ dans $\mathcal{S}$ est-elle, dans le système de Rindler : $1 + gx = 1/\cosh gt$. Cependant, comme $gT = \tanh gt$, cette courbe ne représente la ligne d'univers de P_{in} que pour $-1/g < T < 1/g$.

Enfin un signal lumineux issu de P_{acc} en $x = 0$ à t_e a une ligne d'univers de longueur nulle $[(1+gx)dt = -dx]$ et intersecte la ligne d'univers de P_{in} en $x = x_r, t = t_r$ donnés par :

$$\exp(-2gt_r) = 2\exp(-gt_e) - 1 \qquad , \qquad 1 + gx_r = \exp(gt_e)\sqrt{2\exp(-gt_e) - 1}. \tag{30.8}$$

Armés de ces résultats c'est un simple exercice de refaire les calculs de décalages spectraux ou de durée de vie effectués en & 29, cette fois-ci dans les coordonnées de Rindler.

Reprenons en détail, pour l'exemple, l'obtention de la formule de décalage spectral (29.1). La ligne d'univers de P_{acc} étant $x = 0$, son temps propre est relié au temps coordonnée t par, *cf* (2.17)) : $d\tau_{P_{acc}} = dt$ soit encore $\tau_{P_{acc}} = t$. Quant au temps propre de P_{in}, dont la ligne d'univers est $1 + gx = 1/\cosh gt$, il est relié à t par :

$$d\tau_{P_{in}} = dt\sqrt{(1+gx)^2 - (dx/dt)^2} \quad \text{soit encore} \quad g\tau_{P_{in}} = \tanh gt. \tag{30.9}$$

P_{acc} envoie deux signaux lumineux à $\tau^{e1}_{P_{acc}} = t_{e1}$ et $\tau^{e2}_{P_{acc}} = t_{e2}$ $[(\tau^{e2}_{P_{acc}} - \tau^{e1}_{P_{acc}}) \equiv \Delta\tau^{e}_{P_{acc}}]$. Ces signaux atteindront P_{in} aux instants t_{r1} et t_{r2} donnés par (30.8). Ce sont des temps coordonnées correspondant par la formule (30.9) aux temps propres de P_{in} $\tau^{r1}_{P_{in}}$ et $\tau^{r2}_{P_{in}}$ $[(\tau^{r2}_{P_{in}} - \tau^{r1}_{P_{in}}) \equiv \Delta\tau^{r}_{P_{in}}]$. Le calcul explicite redonne (29.1).

Refaisons également le calcul de la durée du périple du jumeau accéléré P_{acc} dans le système de Rindler où il est au repos. Sa ligne d'univers est $x = 0$, son temps propre est t. La ligne d'univers du jumeau inertiel P_{in} est $X_{in} = (x + 1/g)\cosh gt$, son temps propre est $X_{in}\tanh gt$. Les lignes d'univers s'intersectent en $\pm t_0$. La durée du périple pour le jumeau accéléré P_{acc} est $2t_0$; pour P_{in} elle est $2X_{in}\tanh gt_0$. Comme on a $gX_{in} = \cosh gt_0$ on retrouve le résultat (29.5).

Reprenons enfin le cas de deux deux particules uniformément accélérées P_e et P_r, au repos en $x_e = 1/g_e - 1/g$ et $x_r = 1/g_r - 1/g$. P_e envoie à P_r un signal lumineux de durée $\Delta\tau_e \equiv 1/\nu$ correspondant par exemple à une transition atomique. A cette durée de temps propre correspond l'intervalle de temps coordonnée $\Delta t = \Delta\tau_e/(1 + gx_e)$. Comme P_r est au repos la durée-coordonnée du signal à son arrivée en P_r sera aussi Δt, mais la durée de temps propre $\Delta\tau_r \equiv 1/\nu_r$ que P_r observera sera donnée par : $\Delta\tau_r = \Delta t/(1 + gx_r) = \Delta\tau_e\frac{1+gx_r}{1+gx_e}$ soit, en posant $x_r = x_e + h$: $\Delta\tau_r = \Delta\tau_e(1 + g_e h)$, ce qui est identique, bien sûr, à (29.4). Comme $(1 + gx)$ est la composante (00) de la métrique de Minkowski en coordonnées de Rindler, on peut réécrire ce résultat sous la forme plus générale

$$\nu_{rec} = \sqrt{\frac{l_{00}(em)}{l_{00}(rec)}}\ \nu, \tag{30.10}$$

qui donne le décalage de fréquence lorsque les émetteur et récepteur sont immobiles dans le système de coordonnées x^i et lorsque la métrique est statique (*i.e.* lorsque les composantes de la métrique de Minksowski l_{ij} ne dépendent pas de x^0).[22]

31. "Rigidité" du référentiel de Rindler

De manière générale considérons dans un repère inertiel $\mathcal{S}$ (de coordonnées minkowskiennes X^i) deux lignes de coordonnées spatiales voisines, $x(X^i) = x_0 = const$ et $x(X^i) = x_0 + \Delta x$, d'un repère accéléré $\mathcal{C}$ (on se place à une dimension pour simplifier les notations) ; elles ont dans $\mathcal{S}$ une vitesse $V \equiv dX/dT$ déterminée par $dx = 0$; soit par ailleurs ΔX leur distance propre, mesurée dans $\mathcal{S}$, c.-à-d. à T constant. Dans le repère inertiel $\mathcal{S}_g$ allant à la vitesse V par rapport à $\mathcal{S}$ où elles sont momentanément au repos leur distance propre est donc $\Delta X_g = \Delta X/\sqrt{1 - V^2}$ (contraction des longueurs). Un solide peut alors être défini en imposant que ΔX_g soit égal à Δx, la distance entre les lignes de coordonnées du repère accéléré.

Le système de coordonnées de Rindler satisfait à ce critère. En effet les lignes d'univers, dans $\mathcal{S}$, de deux lignes de coordonnées voisines sont donnés par $g^2(X^2 - T^2) = (1 + gx_0)^2$ et $g^2(X^2 - T^2) = [1 + g(x_0 + \Delta x)]^2$.

[22] Il faut rappeler que ce résultat suppose que quand P_{rec} mesure dans son référentiel inertiel tangent la fréquence de la même transition atomique en P_{rec}, il trouve ν (c'est ainsi qu'il peut dire que ce que lui envoie P_{em} lui semble décalé par rapport à ce qu'il mesure dans son laboratoire). On suppose donc que la transition atomique considérée n'est pas affectée par l'accélération à laquelle l'atome est soumis (ou l'est de manière négligeable).

Leur vitesse dans $\mathcal{S}$ est $V = dX/dT = T/X$. Quant à leur distance propre ΔX, mesurée dans $\mathcal{S}$, c.-à-d. à T constant, elle est donnée par : $gX\Delta X = (1+gx_0)\Delta x$. Dans le repère inertiel tangent à leur ligne d'univers elle est (contraction des longueurs) : $\Delta X_g = \Delta X/\sqrt{1-V^2}$. En développant le calcul : $\Delta X_g = \frac{\Delta X}{\sqrt{1-V^2}} = \frac{(1+gx_0)\Delta x}{gX}\frac{1}{\sqrt{1-T^2/X^2}} = \frac{(1+gx_0)\Delta x}{g\sqrt{X^2-T^2}} = \Delta x$. En ce sens précis la ligne de coordonnée $x = const.$ peut être considérée comme un "axe rigide" et on peut concevoir la matérialisation du repère de Rindler par un solide accéléré le long de l'axe X du repère inertiel $\mathcal{S}$. Cette propriété est particulière au repère de Rindler; dans le cas général il faut abandonner la notion de repère "rigide" et de référentiel "solide" sauf s'ils sont inertiels.

Repères en rotation et spin

32. Repères en rotation, effet Sagnac et forces d'inertie

Considérons, dans un repère inertiel $\mathcal{S}$ et ses coordonnées minkowskiennes $X^i = (T, X, Y, Z)$ telles que $ds^2 = \eta_{ij}dX^i dX^j$, une particule P_{acc} contrainte au mouvement circulaire $X^i = (T, R\cos f(T), R\sin f(T), 0)$ et une particule P_{in} immobile en $X^i = (T, R, 0, 0)$. Le temps propre de P_{in} est T, celui de P_{acc} est $\tau = \int dT\sqrt{1-R^2\Omega^2}$ où $\Omega \equiv \frac{df}{dT}$. On note que la 3 vitesse $R\Omega$ doit toujours être inférieure à 1 (*i.e.* à c), que τ est toujours inférieur à T ("dilatation du temps") et que si Ω est constante le temps mis par P_{acc} pour faire un tour est $\Delta T = \frac{2\pi}{\Omega}$ à la montre de P_{in} et $\Delta\tau = \Delta T\sqrt{1-R^2\Omega^2} < \Delta T$ à celle de P_{acc} ("paradoxe des jumeaux").

Effectuons le changement de coordonnées $X^i = (T, X, Y, Z) \mapsto x^i = (t, r, \psi, z)$ tel que

$$T = t \quad , \quad X = r\,\cos(\psi + f(t)) \quad , \quad Y = r\,\sin(\psi + f(t)) \quad , \quad Z = z\,. \tag{32.1}$$

Dans ce repère accéléré l'élément de longueur minkowskien s'écrit (avec $\Omega = \frac{df}{dt}$ que nous supposerons ici constant)

$$ds^2 = -(1 - r^2\Omega^2)dt^2 + 2r^2\Omega\,dt\,d\psi + dr^2 + r^2\,d\psi^2 + dz^2\,. \tag{32.2}$$

La ligne d'univers de P_{acc} y est $x^i = (t, R, 0, 0)$, celle de P_{in} : $x^i = (t, R, -f(t), 0)$ et leurs temps propres respectifs se relisent sur (32.2) comme : $\tau_{acc} = \sqrt{1-r^2\Omega^2}\,t$; $\tau_{in} = t$.

Considérons deux particules, l'une prograde l'autre rétrograde, contraintes (par des miroirs par exemple) à suivre les lignes d'univers : $x^i = (t, R, \omega_\pm t, 0)$ où $\omega_\pm$ sont des constantes (respectivement positive et négative). Les temps coordonnées $t_\pm$ mis par ces deux particules pour faire un tour (qui sont aussi les temps mesurés par des horloges immobiles dans le repère initial $\mathcal{S}$) sont : $t_\pm = \pm\frac{2\pi}{\omega_\pm}$. Mesurée au temps propre de P_{acc} leur différence est : $\Delta\tau_{acc} = 2\pi\sqrt{1-R^2\Omega^2}\,\frac{\omega_+ + \omega_-}{\omega_+\omega_-}$. Quant aux temps propres des particules elles-mêmes ils se lisent sur (32.2) comme : $\tau_\pm = \sqrt{1-R^2(\Omega+\omega_\pm)^2}\,t$. Leurs quadri-vitesses ont donc pour composantes $u^i = \frac{(1,0,\omega_\pm,0)}{\sqrt{1-R^2(\Omega+\omega_\pm)^2}}$. Si on impose que les vitesses tangentielles soient opposées : $\frac{\omega_+}{\sqrt{1-R^2(\Omega+\omega_+)^2}} = -\frac{\omega_-}{\sqrt{1-R^2(\Omega+\omega_-)^2}}$, alors : $\frac{\omega_+ + \omega_-}{\omega_+\omega_-} = \frac{2\pi R^2}{1-\Omega R^2}$, une relation qui vaut aussi si les particules sont des photons dont les lignes d'univers sont de longueur nulle. Ainsi, dans tous les cas : $\Delta\tau_{acc} = \frac{4\pi R^2\Omega}{\sqrt{1-R^2\Omega^2}}$. Soit λ la longueur d'onde (éventuellement de de Broglie) des particules considérées ; si on les fait interférer on observera un décalage de franges (par rapport à la figure obtenue lorsque $\Omega = 0$) de

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{4\beta\,S}{R\lambda\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{4\beta\,S}{R\lambda} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^3}\right) \qquad \text{avec} \qquad S = \pi R^2 \quad , \quad \beta = \frac{\Omega R}{c}. \tag{32.3}$$

C'est là l'*effet Sagnac.*[23]

[23] **Effets Sagnac.** Dans le cadre d'une théorie corpusculaire newtonienne de la lumière le temps de parcours autour de l'origine d'un appareil en rotation doit être le même dans les deux sens puisque les vitesses sont, en module, les mêmes par rapport au référentiel tournant. Dans le cadre d'une théorie ondulatoire en revanche, la vitesse de la lumière est constante *par rapport à l'éther*, immobile dans le référentiel absolu dans lequel le référentiel tournant est accéléré et l'effet (32.2) doit être observé. L'expérience fut proposée dès 1897 par O. Lodge ; Sagnac l'effectua en 1913 à la suite de calculs détaillés faits en 1905 ;

Effectuons enfin le nouveau changement de coordonnées $x^i = (t, r, \psi, z) \mapsto x'^i = (t, x, y, z)$ tel que

$$t = T \quad , \quad x = r\cos\psi \quad , \quad y = r\sin\psi \quad , \quad z = Z\,. \tag{32.4}$$

Dans ce repère, accéléré également, l'élément de longueur minkowskien s'écrit

$$ds^2 = -(1 - \Omega^2(x^2 + y^2))dt'^2 + 2\Omega\, dt(xdy - ydx) + dx^2 + dy^2 + dz^2\,. \tag{32.5}$$

Un calcul sans difficulté donne les symboles de Christoffel à partir des formules générales (25.2) ou (25.3) selon :

$$\tilde\Gamma^x_{tt} = -\Omega^2 x - \frac{d\Omega}{dt}y \quad , \quad \tilde\Gamma^y_{tx} = -\tilde\Gamma^x_{ty} = \Omega \quad , \quad \tilde\Gamma^y_{tt} = -\Omega^2 y + \frac{d\Omega}{dt}x \tag{32.6}$$

(les autres s'obtenant par symétrie ou étant nuls). L'équation du mouvement d'une particule libre de quadri-vitesse u est donnée par $\tilde D_u u = 0$, ses composantes dans le système de coordonnées x'^i sont $\frac{d^2x'^i}{d\tau^2} + \tilde\Gamma'^i_{jk}\frac{dx'^j}{d\tau}\frac{dx'^k}{d\tau} = 0$, soit encore :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = +2\Omega\dfrac{dy}{dt} + \Omega^2 x + \dfrac{d\Omega}{dt}y \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -2\Omega\dfrac{dx}{dt} + \Omega^2 y - \dfrac{d\Omega}{dt}x \end{cases} \tag{32.7}$$

ce qui peut se réécrire sous forme tri-dimensionnelle sous la forme

$$a' = -2\Omega \wedge v' + \Omega \wedge (R' \wedge \Omega) - \frac{d\Omega}{dt} \wedge R'. \tag{32.8}$$

où on a introduit les grandeurs $R' \equiv (x, y, 0)$, $v' \equiv= \frac{dR'}{dt}$, $a' \equiv \frac{dv'}{dt}$. On reconnait dans (32.8) l'expression des accélérations d'inertie newtoniennes où $t = T$ est le temps d'horloges immobiles dans le repère initial $\mathcal{S}$. Ainsi les symboles de Christoffel encodent-ils bien à la fois le système de coordonnées spatiales choisi (ici cartésien) et les accélérations d'inertie dues au fait que le repère accéléré (t, x, y, z) tourne par rapport au repère inertiel $\mathcal{S}$.

33. Mouvement du solide : rappels de mécanique newtonienne

En mécanique newtonienne la notion de corps rigide accéléré ne posant pas de problème conceptuel, la cinématique d'un solide est décrite par un déplacement rigide des trois axes orthonormés auxquels il est attaché, et son équation du mouvement se déduit de la loi fondamentale de la dynamique

$$ma = f \tag{33.1}$$

où a est l'accélération dans un repère inertiel $\mathcal{S}$ d'un des points matériels P qui le constituent, m sa masse et f la force qui lui est appliquée.

En effet, soit $R = OP$ le rayon vecteur dans $\mathcal{S}$ du point P, soit $d = OO'$ celui de l'origine du repère $\mathcal{S}'$ dans lequel il est immobile et $R' = O'P$ le vecteur position, constant, de P dans $\mathcal{S}'$. En dérivant deux fois par rapport au temps l'identité $R = R' + d$ on obtient :

$$v = \dot d + \Omega \wedge R' \quad , \quad a = \ddot d - \Omega \wedge (R' \wedge \Omega) + \dot\Omega \wedge R' \quad \text{en notant } \dot R' \equiv \Omega \wedge R' \tag{33.2}$$

---

il mesura l'effet avec une précision de 10^{-2} .(L'effet avait été observé une première fois, mais sans être compris, par Harres à Iéna en 1912.) L'effet Sagnac est actuellement mesuré avec une précision de 10^{-12} (expérience de Macek et Davis, 1963) ; il a été également mesuré avec l'aide de particules massives, neutrons (1984), atomes de Calcium (1991), électrons (1993) *etc* et sert maintenant couramment comme contrôle de navigation.

Expérience de Michelson Gale et Pearson. L'effet (32.2) doit être observé sur tout référentiel en rotation par rapport aux référentiels inertiels, et donc aussi dans un interféromètre fixe par rapport à la Terre dont la rotation diurne doit pouvoir ainsi être mesurée. L'expérience, proposée également par O. Lodge en 1893 fut effectuée en 1925 par Michelson, Gale et Pearson à l'aide d'un appareil de 612 mètres sur 339 dont la lumière faisait le tour dans un sens et dans l'autre avant d'interférer ; un déplacement de franges fut effectivement observé. Une expérience similaire, avec des neutrons cette fois, fut effectuée de manière concluante en 1979 par Werner *et al.*. Ces expériences, comme celle du pendule de Foucault (*cf* livre ND-JPU), mesurent des rotations *absolues* par rapport à l'ensemble des référentiels inertiels, au statut priviligié en relativité restreinte tout comme en physique newtonienne.

où Ω est le *vecteur rotation* du solide, *cf e.g. supra*, équation (32.8). Choisissons pour origine O' de $\mathcal{S}'$ le *centre de masse* du solide, défini par

$$\sum m\, R' = 0\,. \tag{33.3}$$

On déduit alors de (33.1-2), en posant $M = \sum m$ et $F = \sum f$:

$$M\ddot{d} = F \tag{33.4}$$

équation qui régit le mouvement du centre de masse du solide. On tire aussi de (33.2), en prenant toujours pour O' le centre de masse du solide : $\sum mR' \wedge a = \sum m\{R' \wedge (\dot{\Omega} \wedge R') - R' \wedge [\Omega \wedge (R' \wedge \Omega)]\}$. Le membre de droite de cette relation n'est autre que la dérivée temporelle du *moment cinétique* J du solide défini comme

$$J = \sum mR' \wedge v \qquad \text{avec} \qquad \sum m\, R' = 0\,. \tag{33.5}$$

Ainsi donc l'équation du mouvement qui régit le mouvement de rotation du solide autour de son centre de masse est :

$$\dot{J} = K \tag{33.6}$$

où $K \equiv \sum mR' \wedge a = \sum R' \wedge f$ de part la loi fondamentale (33.1) est le *moment* des forces appliquées au solide. On note que (33.6), tout comme (33.4), est invariante dans les transformations de Galilée.

Reste à relier J et Ω. On a, en utilisant (33.2-3) (et la Note 10)

$$J \equiv \sum mR' \wedge v = \sum mR' \wedge (\dot{d} + \Omega \wedge R') = \sum m[R'^2\Omega - R'(R'.\Omega)] \tag{33.7}$$

soit, en composantes :

$$J_\alpha = I_{\alpha\beta}\Omega^\beta \qquad \text{avec} \qquad I_{\alpha\beta} \equiv \sum m(\delta_{\alpha\beta}\, X'^\gamma X'_\gamma - X'_\alpha X'_\beta) \tag{33.8}$$

Les axes X'^α peuvent être choisis de sorte que le *tenseur d'inertie* $I_{\alpha\beta}$ soit diagonal. Les trois éléments de la diagonale, I_1, I_2 et I_3, sont les *moments principaux d'inertie.* S'ils sont tous égaux le solide est une "toupie sphérique" ; si $I_1 = I_2, I_3 = 0$ le solide est un "rotateur" : si $I_1 = I_2 \neq I_3$ c'est une "toupie symétrique".

Considérons le cas où K=0. On voit sur les équations (33.4) (33.6) et (33.8) que l'axe de rotation Ω d'une toupie ou d'un rotateur, parallèlle au moment cinétique J, garde alors une direction fixe dans $\mathcal{S}$ quel que soit le mouvement de son centre de masse : ce sont des *gyroscopes.* En revanche l'axe de rotation d'une toupie symétrique précesse autour de J.

34. "Spin" en relativité restreinte

Considérons dans un repère inertiel $\mathcal{S}$ un ensemble de particules de masses m situées en X^i dont les mouvements sont décrits par un champ de vecteurs quadri-vitesses $\mathcal{U}^i$ (tel que $\mathcal{U}_i\mathcal{U}^i = -1$; nous posons $c = 1$). Associons-leur la grandeur $M^{ij} = \sum m(X^i\mathcal{U}^j - X^j\mathcal{U}^i)$, que l'on peut considérer comme une version relativiste du moment cinétique newtonien J défini en (33.5), à la réserve près que X^i est ici la position des points par rapport à l'origine du repère $\mathcal{S}$ et non dans un repère où leurs distances seraient constantes (dans un sens qu'il faudrait de toute façon préciser). Il en résulte que M^{ij} ne se transforme pas comme un tenseur de type $\binom{2}{0}$ dans une transformation du groupe de Poincaré ; si $X^i = \Lambda^i{}_k X'^k - d^i$ on a : $\mathcal{U}^j = \Lambda^j{}_l\mathcal{U}'^l$ et donc $M^{ij} = \Lambda^i{}_k\Lambda^j{}_l M'^{kl} - (d^iP^j - d^jP^i)$ où $P^i \equiv \sum m\mathcal{U}^i$ est l'impulsion totale du système. Il est une grandeur en revanche qui, elle, est un quadri-vecteur covariant dans les transformations de Lorentz, à savoir le *moment cinétique intrinsèque* du système, défini comme

$$S_i = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijkl}M^{jk}U^l \tag{34.1}$$

où ϵ_{ijkl} est l'indice de Levi-Civita et où $U^i \equiv \frac{P^i}{M}$, avec $M \equiv \sum m$ et $U_iU^i = -1$, est le champ de vecteurs quadri-vitesses du système considéré comme un tout. Le vecteur S_i n'a que trois composantes indépendantes car $S_iU^i = 0$.

Dans le repère inertiel tangent où $U^i = (1,0,0,0)$ les composantes de S_i sont $(0, J)$ où $J_x = M^{23} = \sum m(Y\mathcal{U}^Z - Z\mathcal{U}^Y)$ *etc.* Si le système n'est soumis à aucun "moment de forces" il est justifié d'imposer que l'équation du mouvement de J soit la même qu'en physique newtonienne, à savoir $\frac{dJ}{dt} = 0$ où t est le temps des horloges immobiles dans le repère inertiel tangent. Une version covariante de cette équation, valable dans *tout* repère inertiel, est $U^j\partial_j S_i = fU_i$, qui donne bien $\frac{dJ}{dt} = 0$ dans le repère inertiel tangent. Le facteur de proportionalité f est déterminé par la condition $S_iU^i = 0$ qui implique $U^j\partial_j(S_iU^i) = -f + S_i(U^j\partial_jU^i) = 0$. Ainsi donc les équations du mouvement du moment cinétique intrinsèque S_i d'un système soumis à aucun moment de force sont, dans tout repère inertiel

$$U^j\partial_j S_i = [S_j(U^k\partial_k U^j)]\, U_i \quad \text{avec} \quad S_iU^i = 0 \tag{34.2}$$

où U^i est la quadri-vitesse du système. Ainsi, contrairement à la prédiction newtonienne, un moment cinétique intrinsèque ne garde pas une orientation constante dans un repère inertiel s'il est accéléré : c'est la *précession de Thomas*.

Cette construction effectuée on peut en oublier l'échafaudage et introduire la notion de particule dotée, en plus de sa masse inertielle, d'un moment cinétique intrinsèque ou *spin*, S_i, dont l'équation du mouvement est (34.2), $U^i \equiv \frac{dX^i}{d\tau}$ étant alors la quadri-vitesse de la particule et τ son temps propre. Dans un cadre classique (*i.e.* non quantique) cette "particule" est en fait un objet composite, dont les mouvements des parties ne sont pas inclus dans (34.2) et doivent éventuellement faire l'objet d'une étude séparée. En effet, la notion de corps rigide n'existant pas en relativité restreinte, on ne peut relier directement le moment cinétique S_i à une vitesse angulaire globale du système comme en physique newtonienne.

Dans un système de coordonnées quelconques x^i, *i.e.* dans tout repère accéléré, l'équation du mouvement d'une particule dotée d'un spin, de composantes s_i dans ce système ($s_i = \frac{\partial X^j}{\partial x^i} S_j$), est donc :

$$\frac{\tilde{D}s^i}{d\tau} = u^i\left(s_j\frac{\tilde{D}u^j}{d\tau}\right) \quad \text{avec} \quad s_iu^i = 0 \tag{34.3}$$

où $\tilde{D}$ est la dérivée covariante associée au système de coordonnées x^i, où τ est le temps propre de la particule et $u^i = \frac{\partial x^i}{\partial X^j}U^j$ sa quadri-vitesse telle que $\ell_{ij}u^iu^j = -1$, ℓ_{ij} étant les composantes de la métrique de Minkowski dans le système x^i.

Tables des matières

L'ESPACE-TEMPS DE MINKOWSKI