Devoir Maison
Théorie Mathématique pour la Physique

29 mars 2022

Loïc Chantry - Léo Bernus

Déformations isométriques du cône

Introduction au problème.

L'objet ce problème concernera l'existence ou l'inexistence de déformations isométriques de familles de cônes. C'est-à-dire l'existence de difféomorphismes $S \longrightarrow \tilde{S}$ entre surfaces régulières qui préservent la longueur des courbes. Nous avons déjà rencontré ce genre de transformation en cours avec l'exemple de la caténoïde qui une fois découpée se transforme isométriquement et continûment en hélicoïde droit.

Comme dans le cours, pour toute surface régulière S, pour $P \in S$ on notera $\mathcal{T}_p(S)$ le plan tangent, $\boldsymbol{n}$ la normale, I_p et II_p la première et la seconde formes fondamentales en P et K la courbure de Gauss et $\mathcal{S}_1$ la sphère unité de $\mathbb{R}^3$.

On étudiera les déformations isométriques des cônes, on montrera en particulier que chaque cône régulier est isométrique à un cône sinusoïdal. L'objet du problème est ici de montrer que tous les cônes sont isométriques à une surface d'une famille qu'on aura préalablement étudiée en détail : les cônes sinusoïdaux.

1 Les cônes sinusoïdaux

Soient $\theta_0 \in [0, \pi/2[$, $n \in \mathbb{N}$, on définit $\mathcal{C}_{n,\theta_0}$ l'ensemble image de l'application

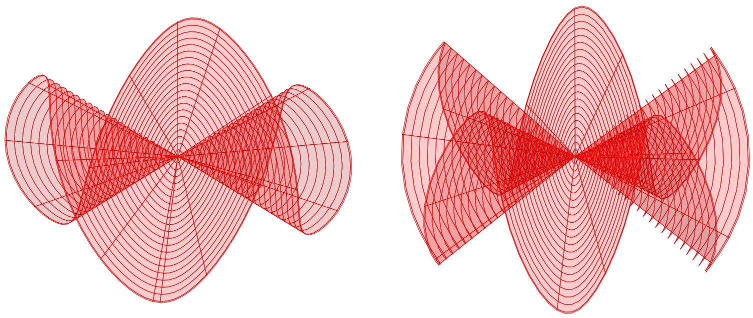
$$\begin{array}{rccc} \boldsymbol{\varphi}_{n,\theta_0} : & \mathbb{R}_{+,\star} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (r, \phi) & \mapsto & r\boldsymbol{u}(\theta_0 \cos(n\phi), \phi) \end{array}$$

avec

$$\begin{array}{rccc} \boldsymbol{u} : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathcal{S}_1 \\ & (\theta, \phi) & \mapsto & \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ \sin\theta \end{pmatrix} \end{array}$$

le vecteur unité de latitude θ et de longitude ϕ parcourant la sphère unité. $\boldsymbol{\varphi}_{n,\theta}(\mathbb{R}_{+,\star}\times\mathbb{R})$ définit l'ensemble qu'on appelle cône sinusoïdal $\mathcal{C}_{n,\theta_0}$. On définit $\mathcal{U}=]0,\infty[\times]-\pi,\pi[$ alors on pose, pour $\phi_0\in[-\pi,\pi[$,

$$\begin{array}{cccc} \boldsymbol{\Psi}_{n,\theta_0,\phi_0} & : & \mathcal{U} & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & (r,\phi) & \mapsto & \boldsymbol{\varphi}_{n,\theta_0}(r,\phi+\phi_0) \end{array}$$



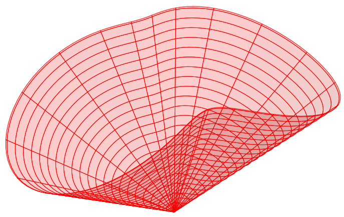
Représentation des cônes sinusoïdaux pour $\theta_0=\pi/5$ et $n=3$ (à gauche) et $n=5$ (à droite).

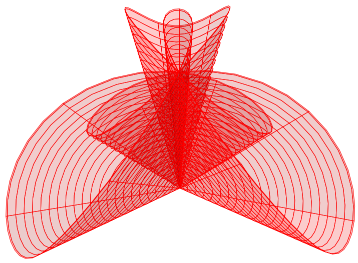
1. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall\theta_0\in[0,\pi/2[$ et $\forall\phi_0\in[0,2\pi[$, $(\boldsymbol{\Psi}_{n,\theta_0,\phi_0},\mathcal{U})$ est une nappe paramétrée régulière, dont on notera $\tilde{\mathcal{C}}_{n,\theta_0,\phi_0}$ la nappe géométrique. En déduire que $\mathcal{C}_{n,\theta_0}$ est une surface régulière.
2. On considère la courbe paramétrée incluse dans la nappe géométrique $\tilde{\mathcal{C}}_{n,\theta_0,\phi_0}$ définie par
$$\begin{array}{cccc} \boldsymbol{\Gamma}_{n,\theta_0,\phi_0} & : &]-\pi,\pi[& \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & \phi & \mapsto & \Psi_{n,\theta_0,\phi_0}(1,\phi+\phi_0) \end{array}$$
Montrer que $\boldsymbol{\Gamma}_{n,\theta_0,\phi_0}$ est régulier est qu'il peut être prolongé par continuité en $\pm\pi$ et que $\boldsymbol{\Gamma}([-\pi,\pi[)$ est une courbe fermée simple incluse dans la sphère unité.
3. Montrer que la longueur de $\boldsymbol{\Gamma}_{n,\theta_0,\phi_0}$ est indépendante de ϕ_0 et en particulier que
$$\forall n\geq 1,\ \ell_n(\theta_0)=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{\cos^2(\theta_0\cos u)+(n\theta_0)^2\sin^2 u}\,\mathrm{d}u$$
et que $\ell_n(0)=2\pi$, que $\ell_n(\theta_0)\geq 4n\theta_0$ et que $\ell_0(\theta_0)=2\pi\cos\theta_0$
4. Montrer que
$$\forall\ell\in\mathbb{R}_{+,\star},\exists n\in\mathbb{N},\exists\theta_0\in[0,\pi/2[\ /\ \ell_n(\theta_0)=\ell$$
(*Indication : n'hesitez pas à utiliser le théorème de Rolle*). Montrer en particulier que
$$\forall\ell\in]0,2\pi],\exists!\theta_0\in[0,\pi/2[\ /\ \ell_0(\theta_0)=\ell$$
5. On pose $s_{n,\theta_0,\phi_0}:\phi\in]-\pi,\pi[\longrightarrow]-\ell_n(\theta_0)/2,\ell_n(\theta_0)/2[$ l'abscisse curviligne orientée, centrée en $\Gamma_{n,\theta_0,\phi_0}(0)$ de la courbe géométrique $\boldsymbol{\Gamma}_{n,\theta_0,\phi_0}(]-\pi,\pi[)$. Montrer alors que
$$s_{n,\theta_0,\phi_0}(\phi)=\frac{2}{n}\int_0^{n\phi}\sqrt{\cos^2(\theta_0\cos u)+(n\theta_0)^2\sin^2 u}\,\mathrm{d}u$$
On note $\boldsymbol{\gamma}_{n,\theta_0,\phi_0}$ la paramétrisation unitaire orientée correspondante. On pose alors
$$\begin{array}{cccc} \boldsymbol{f}_{n,\theta_0,\phi_0} & : & \mathcal{U} & \rightarrow & \mathcal{V}_{n,\theta_0} \\ & & (r,\phi) & \mapsto & (r,s_{n,\theta_0,\phi_0}(\phi)) \end{array}$$
où $\mathcal{V}_{n,\theta_0}=\mathbb{R}_{+,n}\times]-\ell_n(\theta_0)/2,\ell_n(\theta_0)/2[$, montrer que $\boldsymbol{f}$ est un difféomorphisme défini entre $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}_{n,\theta_0}$. En déduire que $\boldsymbol{\xi}_{n,\theta_0,\phi_0}=\boldsymbol{\Psi}_{n,\theta_0,\phi_0}\circ f^{-1}_{n,\theta_0,\phi_0}$ vérifie
$$(\boldsymbol{\xi}_{n,\theta_0,\phi_0},\mathcal{V}_{n,\theta_0})\sim(\boldsymbol{\Psi}_{n,\theta_0,\phi_0},\mathcal{U})$$
et que
$$\forall(r,s)\in\mathcal{V}_{n,\theta_0},\ \boldsymbol{\xi}_{n,\theta_0,\phi_0}(r,s)=r\boldsymbol{\gamma}_{n,\theta_0,\phi_0}(s)$$

6. Calculer les éléments de lignes de la première forme fondamentale associée à $\boldsymbol{\xi}_{n,\theta_0,\phi_0}$. En déduire que l'aire de l'image par $\boldsymbol{\xi}_{n,\theta_0,\phi_0}$ de $]0,r_0[\times]-\ell_n(\theta_0)/2,\ell_n(\theta_0)/2[$ est égale à $\frac{r_0^2}{2}\ell_n(\theta_0)$.
7. Montrer que, dans le paramétrage $\boldsymbol{\xi}_{n,\theta_0,\phi_0}$ l'application de Gauss sur $\mathcal{C}_{n,\theta_0}$ est égale à :
$$\boldsymbol{N}_{n,\theta_0,\phi_0} = \boldsymbol{\gamma}_{n,\theta_0,\phi_0} \wedge \dot{\boldsymbol{\gamma}}_{n,\theta_0,\phi_0}$$
En déduire que dans ce paramétrage, l'application de Weingarten est égale à :
$$F_{\boldsymbol{\xi}_{n,\theta_0,\phi_0}}(\,.\,) = -(\mathrm{d}\boldsymbol{N}_{n,\theta_0,\phi_0})_{\boldsymbol{\xi}_{n,\theta_0,\phi_0}}(\,.\,) = -\boldsymbol{\gamma}_{n,\theta_0,\phi_0} \wedge \ddot{\boldsymbol{\gamma}}_{n,\theta_0,\phi_0}\mathrm{d}s(\,.\,)$$
Que vaut l'application de Gauss $\boldsymbol{n}$ de la sphère unité, la seconde forme fondamental sur la sphère ?
La courbe paramétrée $\boldsymbol{\gamma}_{n,\theta_0,\phi_0}$ unitaire est incluse à la fois dans la sphère unité et dans $\mathcal{C}_{n,\theta_0}$. Montrer que la courbure géodésique [1] de $\boldsymbol{\gamma}_{n,\theta_0,\phi_0}$ en tant qu'elle est incluse dans la sphère vérifie :
$$\boldsymbol{\kappa_g}(s) = \ddot{\boldsymbol{\gamma}}_{n,\theta_0,\phi_0} + \boldsymbol{\gamma}_{n,\theta_0,\phi_0}(s)$$
Montrer alors que,
$$F_{\boldsymbol{\xi}_{n,\theta_0,\phi_0}}(\,.\,) = \frac{\kappa_g(s)}{r}\partial_s\boldsymbol{\xi}_{n,\theta_0,\phi_0}\mathrm{d}s(\,.\,)$$
En déduire que les courbures principale sont dans ce paramétrage $k_1(r,s) = 0$ et $\frac{\kappa_g(s)}{r}$. Que vaut la courbure de Gauss sur le cône ?

2 Régularité des cônes quelconques

On peut définir un cône régulier quelconque comme l'ensemble des demi-droites passant par un point S et une courbe géométrique gauche Γ, régulière, fermée et simple.





Représentation de deux deux cônes quelconques ; l'un est une surface régulière (à gauche) et l'autre s'auto-intersecte et donc n'est pas une surface régulière (à droite).

On travaillera sans perte de généralité [2] avec une courbe gauche paramétrée $\boldsymbol{\gamma}$: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ qui sera choisie telle que $\Gamma = \boldsymbol{\gamma}(\mathbb{R})$. On considérera $\boldsymbol{\gamma}$ lisse et par commodité 2π-périodique. On définit $\mathcal{C}$ par l'image de
$$\begin{array}{rccc} \boldsymbol{\varphi} & : & \mathbb{R}_{+,\star}\times\mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & (r,\phi) & \mapsto & S + r\overrightarrow{\boldsymbol{S}\gamma}(\phi) \end{array}$$

1. On rappelle que lorsqu'on travaille avec une courbe $\boldsymbol{\gamma}$ au paramétrage unitaire incluse dans une surface S (ce qui est le cas de $s \mapsto \gamma_{n,\theta_0,\phi_0}$ avec la sphère unité et $\mathcal{C}_{n,\theta_0}$) sa courbure se décompose en une courbure géodésique et une courbure normal. C'est-à-dire que la dérivée seconde de l'arc se décompose dans l'espace tangent de la surface et l'espace normal $\ddot{\boldsymbol{\gamma}}(s) = \boldsymbol{\kappa_g}(s) + II_{\boldsymbol{\gamma}}(\dot{\boldsymbol{\gamma}},\dot{\boldsymbol{\gamma}})\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\gamma}(s))$, où II est la seconde forme fondamentale et n l'application de Gauss de la surface en question. Le vecteur $\boldsymbol{\kappa_g}(s)$ appartient donc à $\mathcal{T}_{\boldsymbol{\gamma}(s)}(S)$, il est également orthogonal à $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$, il est donc proportionnel au vecteur unitaire $\boldsymbol{k}(s) = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{\gamma}(s)) \wedge \dot{\boldsymbol{\gamma}}(s)$. On a donc $\ddot{\boldsymbol{\gamma}}(s) = \kappa_g(s)\boldsymbol{k}(s) + II_{\boldsymbol{\gamma}}(\dot{\boldsymbol{\gamma}},\dot{\boldsymbol{\gamma}})\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\gamma}(s))$
2. toute courbe géométrique fermée simple est homéomorphe au cercle unité

On pose alors $\forall \phi_0 \in [-\pi, \pi[$

$$\begin{array}{cccc} \boldsymbol{\Psi}_{\phi_0} & : & \mathbb{R}_{+,\star} \times]-\pi,\pi[& \to & \mathbb{R}^3 \\ & & (r,\phi) & \mapsto & \boldsymbol{\varphi}(r, \phi+\phi_0) \end{array}$$

1. Montrer que pour tout $\phi_0 \in [-\pi, \pi[$, $\boldsymbol{\Psi}_{\phi_0}$ est injective si est seulement si $\boldsymbol{\gamma}$ ne passe pas par S et que
$$\boldsymbol{\beta} : \phi \mapsto S + \frac{\overrightarrow{S\boldsymbol{\gamma}(\phi)}}{\left\|\overrightarrow{S\boldsymbol{\gamma}(\phi)}\right\|}$$
est une courbe fermée simple.
2. Montrer que pour tout $\phi_0 \in [-\pi, \pi[$, $\boldsymbol{\Psi}_{\phi_0}$ est immersive (différentielle de rang 2) si est seulement si $\boldsymbol{\gamma}$ ne passe pas par S et que $\boldsymbol{\beta}$ est une courbe *régulière*.
3. Montrer que pour tout $\phi_0 \in [-\pi, \pi[$, $\boldsymbol{\Psi}_{\phi_0}$ est une nappe paramétrée régulière si est seulement si $\boldsymbol{\gamma}$ ne passe pas par S et que $\boldsymbol{\beta}$ est une courbe paramétrée régulière, fermée et simple. En déduire que dans ces conditions $\mathcal{C}$ est une surface régulière.

3 Isométrie entre un cône quelconque et un cône sinusoïdal

On considère $\mathcal{C}$ notre cône quelconque, on se place dans les conditions pour lesquelles $\mathcal{C}$ est une surface régulière. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $\theta_0 \in [0, \pi/2[$ tel que $\mathcal{C}$ soit isométrique à $\mathcal{C}_{n,\theta_0}$. *Indication : On introduira, pour $\phi_0 \in [-\pi, \pi[$, une nappe paramétrée équivalente à $\boldsymbol{\Psi}_{\phi_0}$ bien choisie. Puis on utilisera le fait que toute courbe géométrique fermée simple de longueur ℓ est isométrique au cercle de rayon $\ell/2\pi$.* Montrer en particulier que si la longueur de $\boldsymbol{\beta}$ est inférieure à 2π alors il existe un unique θ_0 dans $[0, \pi/2[$ tel que $\mathcal{C}$ soit isométrique à $\mathcal{C}_{0,\theta_0}$. Quelle est la valeur de la courbure de Gauss sur le cône $\mathcal{C}$?