

# Isométrie infinitésimal - Rigidité de la sphère

Loïc CHANTRY

29 mars 2022



## Table des matières

<b>1</b>	<b>La base des directions principales</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Équation de la rigidité infinitésimal</b>	<b>4</b>
2.1	De la déformabilité à la déformabilité infinitésimale . . . . .	5
2.2	Equation de la rigidité. . . . .	5
2.3	Interpretation, de l'existence de $\omega$ a $h$ . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Déformation infinitésimal de la sphère</b>	<b>6</b>
3.1	La sphère... . . . . .	7
3.2	Les solutions trivials . . . . .	7
3.3	Solutions non-trivials . . . . .	8

## Introduction au problèmes.

L'objet ce problème concernera l'existence ou l'inexistence de déformations isométriques "continues" des surfaces régulières. On s'intéressera en particulier a l'existence de difféotopie isométrique de surface :  $a \in ]\varepsilon, \varepsilon[ \mapsto \vec{\varphi}_a$ . Où  $\forall a$ ,  $\vec{\varphi}_a$  est une *nappe paramétré* définie sur un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^2$  indépendant de  $a$  et dont les coefficient de la forme fondamentale sont indépendant de  $a$ . L'exemple le plus connue de ce genre de difféotopie isométrique de surface est celles transformant la [caténoïde en hélicoïde droit](#).

On commencera par établir la forme des équations de Gauss-Mainardi-Coddazzi (GCM) dans la base des directions principales.

Puis on s'intéressera a l'existence ou non pour une nappes paramétrés d'existence ou non d'une difféotopie isométrique et en particulier de l'existence ou non de difféotopie isométrique infinitésimal. Cette partie doit beaucoup à la thèse [Elasticité et Géométrie : de la rigidité des surfaces à la délamination de fil de téléphone](#) de Basile Audoly.

Enfin on traitera du cas particulier de la sphère. Nous retrouverons ainsi les résultats de Cohn-Vossen (Mathématicien Polonais réfugié en URSS à cause des lois raciales nazi) obtenue en 1929, c'est-à-dire la rigidité de la sphère entière et de la non-rigidité d'une sphère auquel on a retranché une coquille de taille suffisante, nous verrons également que la demi-sphère admet tout les  $\phi$ -modes de déformations  $q > 1$ .



FIGURE 1 – Portrait du mathématicien Cohn-Vossen

## Convention et notation

On notera  $\mathcal{N}(\mathcal{U}, \mathbb{R}^3)$  l'ensemble des nappes paramétrés définie sur une ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^2$ , alors pour  $\vec{\varphi} \in \mathcal{N}(\mathcal{U}, \mathbb{R}^3)$ , sauf mention contraire on notera  $S$  son support,  $\mathcal{T}_P(S)$  le plan tangent en  $P \in S$ .

Un champs scalaire lisses sur la nappes paramétrés  $\vec{\varphi}$  est une application  $f : P \mapsto f(P) \in \mathbb{R}$  tel que  $f \circ \vec{\varphi}$  soit lisses dans  $\mathcal{U}$ . De façon plus général, pour  $d$  entier, une application  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^d$  est dites lisses si et seulement si  $f \circ \vec{\varphi}$  l'est. On aura tendance a confondre, sauf precision nécessaire  $f$  et  $f \circ \vec{\varphi}$ .

Sachant que tout champs de vecteur tangent  $\vec{v}$  évalué en  $P \in S$  est le vecteur vitesse d'une courbe incluse  $\vec{\Gamma}$  passant par  $S$  ( : on a  $\vec{\Gamma}(0) = P$  et  $\vec{v}(P) = \dot{\vec{\Gamma}}(0)$ ), on rappel que la dérivation covariante de  $f$  le long de  $\vec{v}$  en un point  $P$  peut être définie par :

$$\nabla_{\vec{v}} f = \left. \frac{df \circ \vec{\Gamma}}{dt} \right|_{t=0} \quad (1)$$

On notera  $I_p$  et  $II_p$  la première et la seconde forme fondamentale en  $P$ ,  $k_1, k_2$  les courbures principaux et  $K$  la courbure de Gauss.

## 1 La base des directions principales

### Théorème et Définition 1 (Existence et définition du flots).

Soit  $\vec{\varphi} \in \mathcal{N}(\mathcal{U}, \mathbb{R}^3)$  et  $\vec{v}$  un champs de vecteurs tangent lisse sur  $\vec{\varphi}$ . Alors  $\forall P \in S, \exists I_P$  un intervalle réels contenant 0 et une courbe tracé  $t \mapsto \vec{\phi}_t^{\vec{v}}(P)$  sur  $S$  et vérifiant :

$$\begin{cases} \vec{\phi}_0^{\vec{v}}(P) &= P \\ \frac{d}{dt} \vec{\phi}_t^{\vec{v}}(P) &= \vec{v}(\vec{\phi}_t^{\vec{v}}(P)) \end{cases}$$

alors la courbe tracé  $t \mapsto \vec{\phi}_t^{\vec{v}}(P)$  est appelé flot local de  $\vec{u}$  en  $P$ . Proche de 0 ce flots vérifie :

$$\vec{\phi}_t^{\vec{v}}(P) = P + t\vec{v}(P) + \frac{t^2}{2} \nabla_{\vec{v}} \vec{v} + t^3 b(t)$$

(où  $b$  est borné au voisinage de 0)

Nous travaillerons ici sur une nappes paramétré  $\vec{\varphi} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$  de support  $S$  sans point parabolique ou planaire.

1. Montrer qu'il existe une base orthonormé de l'espace tangent  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  constitué des directions principales (de courbure principales  $k_1, k_2$ ), tel que  $\forall P \in S$   $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{n})$  est direct et l'application  $P \mapsto (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  soit lisses. On notera alors  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{n}) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  la *base principal*.
2. Écrire les composantes de l'endomorphisme de Weingarten dans la base principal. En déduire qu'on a :

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{e}_1} \vec{e}_1 &= \Gamma_1 \vec{e}_2 + k_1 \vec{e}_3 & \nabla_{\vec{e}_1} \vec{e}_2 &= -\Gamma_1 \vec{e}_1 \\ \nabla_{\vec{e}_2} \vec{e}_1 &= \Gamma_2 \vec{e}_2 & \nabla_{\vec{e}_2} \vec{e}_2 &= -\Gamma_2 \vec{e}_1 + k_2 \vec{e}_3 \end{aligned} \quad (2)$$

où  $\Gamma_i = \vec{e}_2 \cdot (\nabla_{\vec{e}_i} \vec{e}_1)$ .

3. Prouver le théorème (1).
4. Montrer qu'on a :

$$\vec{\phi}_t^{\vec{e}_1} \left( \vec{\phi}_t^{\vec{e}_2}(P) \right) - \vec{\phi}_t^{\vec{e}_2} \left( \vec{\phi}_t^{\vec{e}_1}(P) \right) = -t^2 (\Gamma_1 \vec{e}_1 + \Gamma_2 \vec{e}_2) + t^3 m(t)$$

(où  $m$  est bornée au voisinage de 0)

5. En déduire que pour toute application lisse  $f$  définie sur  $S$  on a :

$$\boxed{(\nabla_{\vec{e}_2} \nabla_{\vec{e}_1} - \nabla_{\vec{e}_1} \nabla_{\vec{e}_2}) f = \Gamma_1 \nabla_{\vec{e}_1} f + \Gamma_2 \nabla_{\vec{e}_2} f} \quad (3)$$

6. Appliquer ce résultats pour  $f = \vec{e}_1$  et puis  $f = \vec{e}_2$  en déduire l'expression des équations de Gauss-Coddazzi-Mainardi en base principal :

$k_1 k_2$	$= \nabla_{\vec{e}_2} \Gamma_1 - \nabla_{\vec{e}_1} \Gamma_2 - \Gamma_1^2 - \Gamma_2^2$	(Gauss)	(4)
$\nabla_{\vec{e}_2} k_1$	$= \Gamma_1 (k_1 - k_2)$	(Coddazzi-Mainardi-1)	
$\nabla_{\vec{e}_1} k_2$	$= \Gamma_2 (k_1 - k_2)$	(Coddazzi-Mainardi-2)	

## 2 Équation de la rigidité infinitésimal

On se place dans le cadre de la section précédentes, et on définit :  
Commençons par quelques définition formel de la rigidité des surface.

**Définition 1 (Difféotopie isométrique et rigidité).** Soit  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .  
Une difféotopie isométrique de nappes paramétrés sur  $\mathcal{U}$  est une application,

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &: I \rightarrow \mathcal{N}(\mathcal{U}, \mathbb{R}^3) \\ a &\mapsto \vec{\varphi}_a \end{aligned}$$

(où  $I$  est un intervalles réels) tel que l'application,

$$\begin{aligned} \vec{\Lambda} &: I \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (a, x) &\mapsto \vec{\varphi}_a(x) \end{aligned}$$

vérifie :

1.  $\vec{\Lambda}$  est lisse.
2. Toujours en mouvement :  $\forall a \in I, \vec{h} : x \in \mathcal{U} \mapsto \partial_a \vec{\Lambda}(a, x)$  est elle même une nappes paramétrés, bornée non identiquement nul sur  $\mathcal{U}$ .
3. Isométrie :  $\forall x \in \mathcal{U}, \forall u, v \in \mathbb{R}^2$  l'application  $a \mapsto (d\vec{\varphi}_a)_x(u) \cdot (d\vec{\varphi}_a)_x(v)$  est constante sur  $I$ .

$a$  est alors appelé paramètre de la difféotopie.

On dis alors qu'une nappes paramétré  $\vec{\varphi} \in \mathcal{N}(\mathcal{U}, \mathbb{R}^3)$  est déformable si et seulement si il existe une difféotopie isométrique de nappes paramétrés sur  $\mathcal{U}$  qu'on appellera  $\mathcal{H} : I \rightarrow \mathcal{N}(\mathcal{U}, \mathbb{R}^3); a \mapsto \vec{\varphi}_a$  tel qu'il existe  $a \in I$  tel que  $\vec{\varphi}_a = \vec{\varphi}$ . Dans le cas contraire on dira que cette surface est rigide.

Une nappes paramétré  $\vec{\varphi} \in \mathcal{N}(\mathcal{U}, \mathbb{R}^3)$  est infinitésimalement déformable si et seulement si il existe une application lisse  $\vec{h} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$  bornée et non identiquement nulle tel que  $\forall x \in \mathcal{U}, \forall u, v \in \mathbb{R}^2$  :

$$(d\vec{\varphi})_x(u) \cdot (d\vec{h})_x(v) + (d\vec{h})_x(u) \cdot (d\vec{\varphi})_x(v) = 0 \quad \text{Équation de la rigidité} \quad (5)$$

et  $(d\vec{h})_x$  est injective.

Dans ce qui suivra, on commencera par montrer que le caractère déformable implique le caractère infinitésimalement déformable. Puis nous verrons (dans le cadre ou il existe

sur la nappe un bases principal lisse) que l'équation de la rigidité Eq.(5) est équivalentes à une équations au dérivée partiels scalaire. Enfin on montrera que la sphère est rigide.

## 2.1 De la déformabilité à la déformabilité infinitésimale

Soit  $\vec{\varphi} \in \mathcal{N}(\mathcal{U}, \mathbb{R}^3)$  une nappe paramétré déformable et  $\mathcal{H} : I \rightarrow \mathcal{N}(\mathcal{U}, \mathbb{R}^3)$ ;  $a \mapsto \vec{\varphi}_a$  une difféotopie isométrique de nappes paramétré sur  $\mathcal{U}$  associé. Quitte a translaté l'indice  $a$  sur  $I$  on peut supposer que  $0 \in I$  et  $\vec{\varphi}_0 = \vec{\varphi}$ . On notera comme dans la définition  $\vec{\Lambda} : I \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $(a, x) \mapsto \vec{\varphi}_a(x)$ .

1.  $\forall x \in \mathcal{U}$  effectuer un développement de Taylor à l'ordre 1 de l'application  $a \mapsto \partial_1 \vec{\Lambda}(a, x)$  et  $a \mapsto \partial_2 \vec{\Lambda}(a, x)$  (où on  $\partial_1, \partial_2$  sont les dérivées partielles dans l'espace des coordonnées  $\mathcal{U}$  de la nappe, on notera  $\partial_a$  la dérivée partiel par rapport a  $a$  le paramètre de la difféotopie). Traduire la condition d'isométrie de la difféotopie en terme de  $\partial_i \vec{\Lambda}$  ?
2. On pose  $\vec{h} : x \in \mathcal{U} \mapsto \partial_a \vec{\Lambda}(0, x)$ , montrer que  $\vec{\varphi}$  est *infinitésimalement déformable*

## 2.2 Equation de la rigidité.

Soit  $\vec{\varphi} \in \mathcal{N}(\mathcal{U}, \mathbb{R}^3)$  une nappe paramétré infinitésimalement déformable et  $\vec{h}$  l'application associé.

Enfin on se placera dans le cadre d'une nappes paramétrée qui admette une base orthonormée  $x \in \mathcal{U} \mapsto (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  lisse composée des directions principales et de la normal comme dans la section (1).

$\forall x \in \mathcal{U}$ ,  $\mathcal{T}_{\vec{\varphi}(x)}S = \text{im } d\vec{\varphi}_x$  et donc, il existe  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  tel que  $d\vec{\varphi}_x(\varepsilon_k) = \vec{e}_k$  (avec  $k = 1, 2$ )

1. Montrer alors qu'il existe un champs de vecteurs  $\vec{\Omega} : x \in \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$  lisse tel que  $\forall x \in \mathcal{U} \forall v \in \mathbb{R}^2$  on a  $dh_x(v) = \vec{\Omega} \wedge d\vec{\varphi}_x(v)$ <sup>1</sup>
2. Soit  $x \in \mathcal{U}$ , on pose  $\vec{h} = h^1 \vec{e}_1 + h^2 \vec{e}_2 + h^3 \vec{e}_3$ , montrer alors que<sup>2</sup>,

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{e}_1} \vec{h} &= (h^1_{,1} - \Gamma_1 h^2 - k_1 h^3) \vec{e}_1 + (h^2_{,1} + \Gamma_1 h^1) \vec{e}_2 + (h^3_{,1} + k_1 h^1) \vec{e}_3 \\ \nabla_{\vec{e}_2} \vec{h} &= (h^1_{,2} - \Gamma_2 h^2) \vec{e}_1 + (h^2_{,2} + \Gamma_2 h^1 - k_2 h^3) \vec{e}_1 + (h^3_{,2} + k_2 h^2) \vec{e}_1 + \end{aligned}$$

où pour tout champs scalaire  $f$ , on note  $df_x(\vec{e}_k) = f_{,k}$ .

3. On pose alors  $\Omega = \Omega^1 \vec{e}_1 + \Omega^2 \vec{e}_2 + \omega \vec{e}_3$ . En déduire,

$$\begin{cases} h^1_{,1} = \Gamma_1 h^2 + k_1 h^3 \\ h^1_{,2} = \Gamma_2 h^2 - \omega \end{cases} \quad \begin{cases} h^2_{,1} = -\Gamma_1 h^1 + \omega \\ h^2_{,2} = -\Gamma_2 h^1 + k_2 h^3 \end{cases} \quad \begin{cases} \Omega^1 = h^3_{,2} + k_2 h^2 \\ \Omega^2 = -h^3_{,1} - k_1 h^1 \end{cases}$$

4. En appliquant l'équivalent du théorème de Schwarz Eq.(3) à  $h^1$  puis à  $h^2$ , en se servant des précédentes équations, en utilisant Eq.(4) pour faire apparaître une

1. Indication : on posera  $\vec{v}_k = d\vec{h}_x(\varepsilon_k)$

2. indication : utiliser soigneusement la règle de Leibniz et les relations Eq.(2)

courbure de Gauss ou pour évacuer les dérivées directionnel des courbures principales, montrer que,

$$\begin{cases} \omega_{,1} + k_1 (k_2 h^2 + h^3_{,2}) = 0 \\ \omega_{,2} + k_2 (k_1 h^1 + h^3_{,1}) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \omega_{,1} = -k_1 \Omega^1 \\ \omega_{,2} = -k_2 \Omega^2 \end{cases} \quad (6)$$

On en déduit que  $\Omega^1$  et  $\Omega^2$  se déduisent de  $\omega$ . La suite consistera à trouver une équation régissant  $\omega$  uniquement par des quantités relatives à la surface (courbure principal, Christoffel...).

5. Nous rappelons que notre surface ne comporte pas de point parabolique ou planaire. Montrer, en utilisant à nouveau Eq.(3) cette fois ci sur  $h^3$ , que

$$\left(\frac{\omega_{,1}}{k_1}\right)_{,1} + \left(\frac{\omega_{,2}}{k_2}\right)_{,2} + \Gamma_2 \frac{\omega_{,1}}{k_1} - \Gamma_1 \frac{\omega_{,2}}{k_2} + (k_1 + k_2)\omega = 0$$

Équation de la rigidité scalaire

(7)

Commenter.

### 2.3 Interpretation, de l'existence de $\omega$ a $h$

Nous avons obtenue lors de la section précédentes une équation aux dérivée partiel linéaire et du second ordre, sur la fonction  $\omega$ .

On admettra<sup>3</sup> que si  $\vec{\Omega}$  existe sur  $\mathcal{U}$  le développement suit dans la partie précédentes assure l'existence de la déformation infinitésimal  $\vec{h}$  sur  $\mathcal{U}$ . Nous attendons ici, une discussion qualitative, pas un raisonnement aboutit.

1. Admettons que nous ayons trouver une solution  $\omega$  sur  $\mathcal{U}$  tout entière satisfaisant à Eq.(7), comment retrouveriez vous le vecteur  $\vec{\Omega}$  ?
2. Admettons que nous ayons trouver une solution  $\omega$  sur  $\mathcal{U}$  tout entière, mais  $\omega$  diverge en certains points isolé, la surface possède-elle des déformations infinitésimal? Si on travaille avec la surface obtenue en retirant des ouverts relatifs aux voisinages de ces points?
3. Déduire une méthode permettant de montrer qu'une surface est rigide.

## 3 Déformation infinitésimal de la sphère

Nous allons appliquer les résultats précédents à la sphère. Pour travailler sur l'équation de la rigidité nous exprimerons les valeurs des courbures principales de la sphère, des Christoffels de la base principal, mais aussi des dérivée directionnelle le long de ces directions.

On pourrait ici objecter que l'existence d'une base principal lisse n'est pas assurer vue que tout les points de la sphère sont ombilics. Cette argument est rapidement invalidé par le fait que l'orthonormalisation immédiate de la base naturel est une base principal qui convient.

---

3. c'est l'application du Lemme de Poincaré, il faut donc pour cela assurer que  $\mathcal{U}$  soit étoilé.

### 3.1 La sphère...

On considère  $\mathcal{S}_1$  la sphère de rayon 1, on travaillera avec,

$$\begin{aligned} \varphi : ]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[ &\rightarrow \mathcal{S}_1 \\ (\theta, \phi) &\mapsto \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1. Montrer que  $(\varphi, ]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[)$  est une nappes paramétrée,
2. Calculer  $\vec{\partial}_\theta, \vec{\partial}_\phi$  la base naturel de cette paramétrisation,
3. Calculer les éléments de lignes de la première forme fondamental dans cette paramétrisation,
4. Calculer l'application de Gauss, en déduire que les éléments de lignes de la seconde forme fondamental dans cette paramétrisation sont égaux a,

$$\begin{cases} P(\theta, \phi) &= & -1 \\ Q(\theta, \phi) &= & 0 \\ R(\theta, \phi) &= & -\sin^2 \theta \end{cases}$$

En déduire que la matrice de l'endomorphisme de Weingarten vaut  $-I_2$  dans la base naturel en déduire la valeurs des courbures principales  $k_1$  et  $k_2$ , quel est la nature des points de la sphère? Toutes les bases orthonormal orienté directement avec l'application de Gauss sont donc des bases principal. Néanmoins, nous choisisons,

$$\vec{e}_1(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

pour base principal.

5. Exprimer  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  en fonction de  $\text{vec} \partial_\theta, \vec{\partial}_\phi$ , calculer  $\nabla_{\vec{e}_2} \vec{e}_1$ , en déduire que  $\Gamma_2(\theta, \phi) = \cot \theta$ . Calculer  $(\nabla_{\vec{e}_1} \vec{e}_1)$ , en déduire que  $\Gamma_1 = 0$ .
6. Montrer que pour une fonction scalaire  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  définie sur la sphère, on a,

$$\begin{cases} f_{,1}(\theta, \phi) &= & \nabla_{\vec{e}_1} f &= & \partial_\theta f(\theta, \phi) \\ f_{,2}(\theta, \phi) &= & \nabla_{\vec{e}_2} f &= & \frac{1}{\sin \theta} \partial_\phi f(\theta, \phi) \end{cases}$$

7. Montrer que l'équation de la rigidité deviens donc,

$$\partial_\theta^2 \omega + \frac{\partial_\phi^2 \omega}{\sin^2 \theta} + \cot \theta \partial_\theta \omega + 2\omega = 0 \quad (8)$$

### 3.2 Les solutions trivials

Les rotations solides sont bien évidemment solutions de l'équations de la rigidité. On note  $M(\epsilon, u)$  la matrice  $3 \times 3$  de rotation d'un angle  $\epsilon$  autour de  $u$ . Le vecteur  $h$  infinitésimal correspondant à cette rotation est donc,

$$\vec{h}(\theta, \phi) = \lim_{\epsilon} \frac{1}{\epsilon} [M(\epsilon, u) \vec{\varphi}(\theta, \phi) - \vec{\varphi}(\theta, \phi)]$$

1. A quel vecteur  $\vec{h}(\theta, \phi)$  de déformation infinitésimale correspond la rotation d'un angle  $\epsilon$  autour de  $u_z$ ? Quelles de la valeurs de  $\nabla \vec{h}$ , de  $\vec{\Omega}$ . Montrer que  $\omega = \cos \theta$ , vérifier que  $\theta, \phi \mapsto \cos \theta$  est solutions de l'équation de la rigidité.
2. Montrer que  $\theta, \phi \mapsto \sin \theta \cos \phi$  et  $\theta, \phi \mapsto \sin \theta \sin \phi$  sont également solutions de l'équation de la rigidité on admettra qu'il s'agit des rotations autour de l'axe  $0_x$  et  $0_y$

### 3.3 Solutions non-triviaux

Puisque on travaille sur une sphère, on veut que  $\omega$  soit lisse, en particulier  $\forall \theta \in ]0, \pi[$ , l'application  $\phi \mapsto \omega(\theta, \phi)$  est  $2\pi$ -périodique, on peut donc en faire une décompositions de Fourier.

$$\omega(\theta, \phi) = \sum_{q=0}^{\infty} \omega_q(\theta) \exp(iq\phi)$$

on appellera q-mode la fonction  $\omega_q$ .

1. Montrer que le q-mode  $\omega_q$  est soumis à l'équation différentiel ordinaire :

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[ \sin \theta \frac{d\omega_q}{d\theta} \right] = \left( \frac{q^2}{\sin^2 \theta} - 2 \right) \omega_q$$

La mettre sous la forme,

$$\frac{d}{d\theta} Y = F_q(Y, \theta) = M_q(\theta)Y$$

Où  $Y = \left( \omega_q, \frac{d\omega_q}{d\theta} \right)$ , que vaut  $F_q, M_q$ ?

Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence d'une solution pour une conditions initiales que nous prendrons en  $\theta = \pi/2$ . On prendra  $Y_{1,\lambda}(\theta)$  la famille de solutions de conditions initiales  $(\lambda, -1)$  et  $Y_{2,\lambda}(\theta)$  la famille de solution de conditions initiales  $(\lambda, 0)$ . La linéarité implique que toute solutions  $\theta \rightarrow Y(\theta)$  de conditions initiales  $(\alpha, \beta)$  est soit proportionnel a  $Y_{1,\lambda}$  ( $\beta \neq 0$ ) soit proportionnel a  $Y_{2,\lambda}$ . On a conçu un fichier python RK4-Sturm-Liouville.py qui calcules ces familles de solutions, le module TraceSerieSol-t-1 calcules à l'aide d'un algorithmme de type Runge-Kutta d'ordre 4, la famille  $Y_{1,\lambda}(\theta)$  pour différentes valeurs du mode  $q$  et trace la première composante, tandis que le module TraceSerieSol-t-0 s'occupe de la famille  $Y_{2,\lambda}(\theta)$ . On va discuter qualitativement des solutions.

2. Exécuter RK4-Sturm-Liouville.py pour  $q = 0$  (les paramètres modifiables se situe en lignes 163-171), qu'observe t'on pour la famille  $Y_1$ ? A quoi correspond la solution en rouge? Y a t'ils d'autre solution satisfaisante dans la famille  $Y_1$  sur la sphère toute entière? Soit  $0 < \delta < \pi/4$  on enlève les points de la sphère de colatitude  $\theta < \delta$ ? On enlève les points de colatitude  $\theta < \delta$  et ceux de latitude  $\theta > \pi - \delta$ ? Même question pour la famille  $Y_2$
3. Même question pour  $q = 1$ ?



4. Même question pour  $q \geq 2$  ?
5. Conclure à propos de la sphère entière ? D'un hémisphère ?

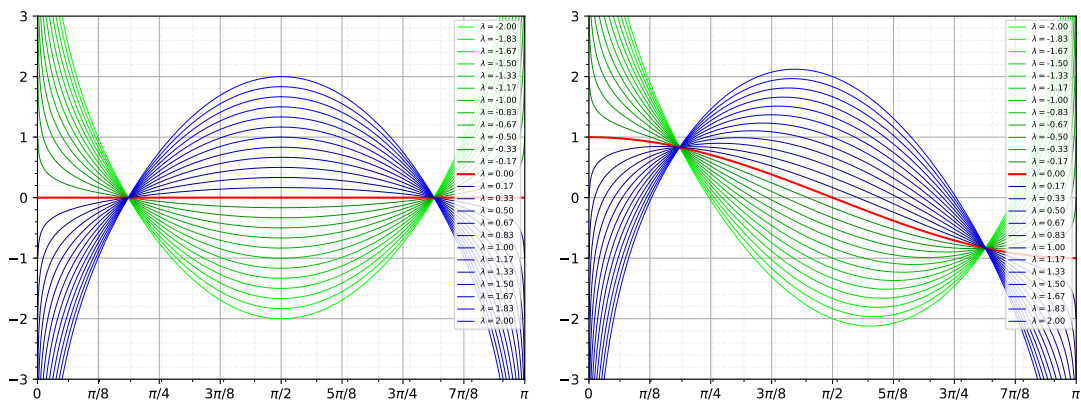


FIGURE 2 – Représentation des solutions de mode  $q = 0$  la première composantes de la famille  $Y_1$  (a gauche) et  $Y_2$  (a droite).

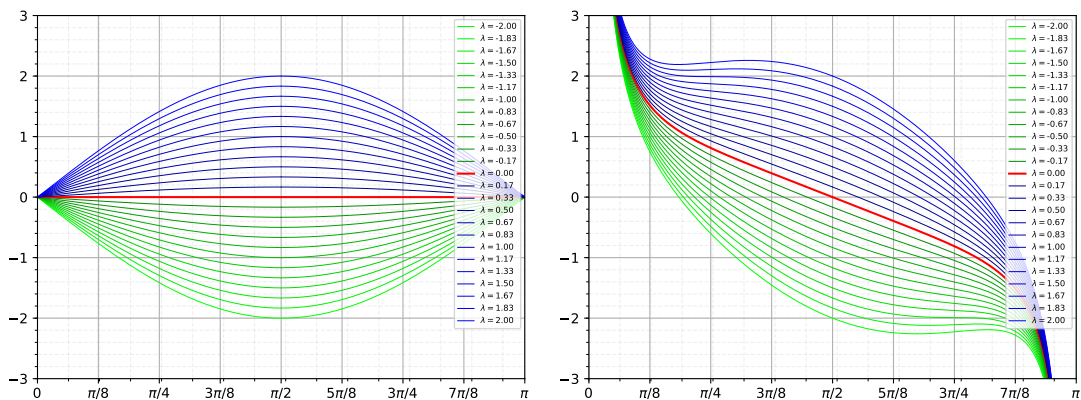


FIGURE 3 – Représentation des solutions de mode  $q = 1$  la première composantes de la famille  $Y_1$  (a gauche) et  $Y_2$  (a droite).

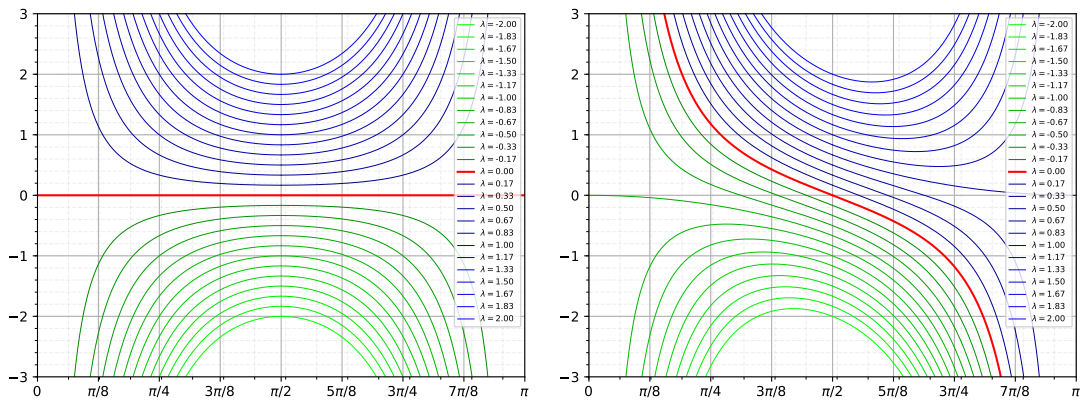


FIGURE 4 – Représentation des solutions de mode  $q = 2$  la première composantes de la famille  $Y_1$  (a gauche) et  $Y_2$  (a droite).