

# Fluide incompressible auto-gravitant en rotation.

Loïc Chantry

QUELLE est la forme d'une masse de fluide incompressible auto-gravitante en rotation et comment se transforme cet équilibre à mesure qu'on augmente le moment cinétique ? Ce problème en apparence simple traverse la recherche en Astrophysique de Newton jusqu'à nos jours. De nombreux physiciens et mathématiciens se sont intéressés à ce problème, chacun y apportant sa contribution. Mac Laurin, contemporain de Newton, exhiba des ellipsoïdes de révolution en rotation solide en équilibre jusqu'à une certaine fréquence de rotation. Jacobi, trouva des ellipsoïdes à 3 axes de moment cinétiques supérieure à ceux de Mac Laurin. D'une configuration axi-symétrique nous obtenons des solutions asymétriques, on parle de brisure de symétrie. En fait il existe ce qu'on appelle une bifurcation entre ellipsoïde de Mac Laurin et de Jacobi à partir d'un certain moment cinétique. Dedekind et Riemann généralisèrent pour des rotations non solides. Enfin Poincaré trouva d'autres formes (ressemblant à des menhirs) pour des moments cinétiques plus importants, formes elles mêmes en bifurcation à partir des ellipsoïdes de Jacobi. Des analyses de stabilités seront également effectuées par Riemann et Cartan. Ce fut également un problème exploré par Chandrasekhar au milieu du dernier siècle. Les formes exhibées par Jacobi se retrouvent dans la nature, en particulier pour les planètes naines, mentionnons la planète naine Hauméa.

Nous nous intéresserons ici aux systèmes en rotation solide pouvant se ramener à un problème d'hydrostatique auto-gravitant. Nous commencerons par poser le problème de façon tout à fait général. Avant de commencer à travailler l'équilibre hydrostatique sphérique, que nous perturberons aux faibles rotations afin de commencer à trouver une approximation de la loi d'aplatissement des ellipsoïdes de Mac Laurin, nous aborderons les généralités concernant l'auto-gravitation incompressible. Afin d'aller plus loin nous aurons un travail important à effectuer sur les champs gravitationnelles des ellipsoïdes incompressible. Finalement nous exposerons l'équilibres d'un fluide auto-gravitant incompressibles de Mac Laurin et de Jacobi et la bifurcation entre l'un et l'autre.

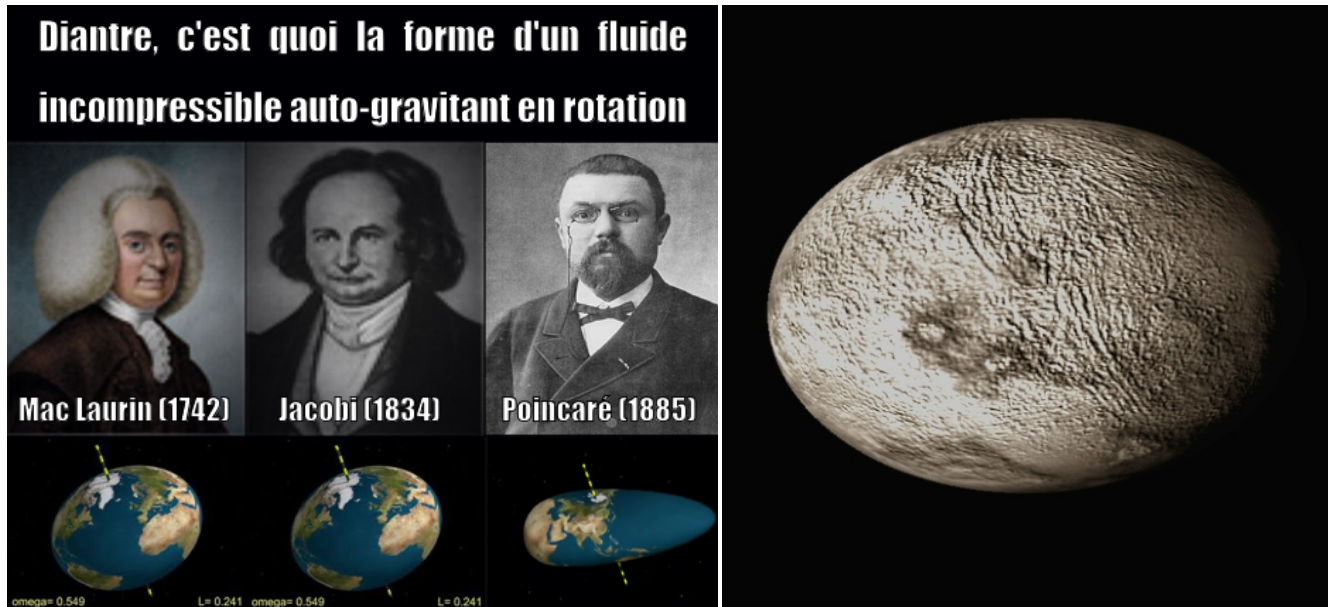


FIGURE 1 – A gauche, les différentes figures d'équilibres exhibées par les physiciens et mathématiciens avant 1900. A droite, une représentation d'artiste de la planète naine Haumèa, dont la forme doit être un ellipsoïde de Jacobi

Nous appellerons  $\mathcal{E}_{a,b,c} = \left\{ M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$  l'ellipsoïde plein de demi-axe  $a, b, c$ . Nous introduisons le référentiel en rotation  $\mathcal{R} = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  le repère dont l'axe  $O\mathbf{k}$  est l'axe de rotation du fluide et les autres axes en rotation avec le système. On posera  $\mathbf{u}(\theta, \varphi) = \cos \theta \mathbf{k} + \sin \theta (\cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j})$ . Nous noterons  $\omega$  la

pulsation de la rotation,  $\mathbf{r} = r\mathbf{u}(\theta, \varphi)$  le vecteur position,  $r$  sa norme,  $\varpi$  le rayon cylindrique, et  $\theta, \varphi$  la colatitude et l'angle azimutal sphérique ordinaire,  $\rho$  la densité de masse,  $\mathcal{U}$  le potentiel gravitationnel,  $P$  la pression,  $\mathcal{G}$  la constante gravitationnel.

## 1 Généralités sur l'auto-gravitation d'un fluide incompressible

ON considère une distribution  $\rho : \mathbf{r} \rightarrow \rho(\mathbf{r})$

1. Quelle équation régit l'évolution spatial du potentiel gravitationnel ? Quelle en est la solution ?
2. Écrire l'équation de l'hydrostatique dans le référentiel tournant  $\mathcal{R}$ . Réécrire le terme centrifuge sous la forme d'un gradient, en déduire, si la densité est constante qu'il existe  $P_0$  tel que,

$$P = (P_0 + \rho_0\mathcal{U}_0) - \rho\mathcal{U} + \rho\frac{\omega^2\varpi^2}{2} \quad (1)$$

3. Que vaut la pression à la surface de la distribution ? Si  $\mathcal{U}$  est une forme quadratique que dire de  $P$  ?

## 2 Aux faibles fréquences de rotations...

ON étudie tout d'abord un fluide sans rotation  $\omega = 0$ . On considère également la distribution comme étant sphérique  $\rho(\mathbf{r}) = \rho(r)$ .

1. Quelle est la symétrie du potentiel gravitationnel. Prouvez le à l'aide d'un changement de variable.

On considère maintenant que la distribution est homogène :

$$\begin{aligned} \rho : \mathcal{E}_3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ M &\longrightarrow \rho_0 \quad (r \leq R) \\ M &\longrightarrow 0 \quad (r > R) \end{aligned} \quad (2)$$

2. Montrer que si le potentiel s'annule à l'infini alors on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{U} : r \leq R &\longrightarrow \frac{\mathcal{G}M}{2R} \left( \frac{r^2}{R^2} - 3 \right) \\ r \geq R &\longrightarrow -\frac{\mathcal{G}M}{r} \end{aligned} \quad (3)$$

3. En déduire l'expression de la pression, que vaut elle au centre de la distribution ?
4. Quelle est l'énergie gravitationnelle du système ?

On considère maintenant une "faible fréquence de rotation". Quand on injecte du moment cinétique à l'intérieur de notre masse au repos celle-ci se met en mouvement. Si le fluide possède une viscosité, même légère il finit par relaxer vers une rotation solide. On se place dans le référentiel tournant. La déviation à la symétrie sphérique de la distribution va perturber le potentiel gravitationnel. Si l'on note  $\mathcal{U}_s$  le potentiel apparaissant dans l'équation Eq.(3), alors on a  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_s + \delta\mathcal{U}$ . On considèrera qu'a "faible fréquence de rotation" on peut négliger  $\delta\mathcal{U}$  devant  $\frac{\varpi^2\omega^2}{2}$ .

5. Injecter le potentiel dans l'équation Eq.(1) comment évolue alors la pression à l'intérieur de la masse ? Montrer que la surface de la formation est un ellipsoïde de révolution d'excentricité donné par l'Eq.(4) ? Quelle est la pression au centre de la formation ?

$$e^2 = \frac{3\omega^2}{4\pi\mathcal{G}\rho} \quad (4)$$

En posant  $R_s(\theta) = R + \delta R(\theta)$  la surface de l'ellipsoïde (ainsi  $\delta R(\theta)$  est une fonction dont la taille typique est celles de la différence d'axe de l'ellipsoïde de révolution), écrire  $\delta\mathcal{U}$  sous la forme d'une intégrale double, dont on estimera la valeurs à l'intérieur de l'ellipsoïde. Sachant que l'excentricité est liée à l'aplatissement  $e^2 \approx \frac{2\delta R}{R} \approx \frac{2(a-c)}{R}$ , l'hypothèse effectuée était-elle raisonnable ? Que vaut  $\delta\mathcal{U}$  qualitativement ? L'aplatissement prenant en compte  $\delta\mathcal{U}$  doit il être supérieur ou inférieur à l'aplatissement dans le cadre de l'hypothèse considérée ?

## 3 Du potentiel à l'intérieur d'un ellipsoïde homogène.

AFIN de calculer le potentiel gravitationnel à l'intérieur des ellipsoïdes nous allons décomposer celui-ci en homéoïde. Le calculs du champ à l'intérieur d'un homéoïde fera apparaître une intégrale typique de l'intégral de surface de l'ellipsoïde. Cette intégrale interviendra naturellement dans l'expression du potentiel à l'intérieur d'un ellipsoïde homogène. On travaillera donc a trouver des propriétés de cette intégrale afin d'expliciter le potentiel à l'intérieur de l'ellipsoïde.

### a Intérieur d'un homéoïde

On notera

$$Q_{a,b,c}(\mathbf{u}) = \left(\frac{u^x}{a}\right)^2 + \left(\frac{u^y}{b}\right)^2 + \left(\frac{u^z}{c}\right)^2 \quad (5)$$

la forme quadratique lié à l'ellipsoïde  $\mathcal{E}_{a,b,c}$ , on attache  $\Psi_{a,b,c}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  la forme bilinéaire associée,

$$\Psi_{a,b,c}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{u^x v^x}{a^2} + \frac{u^y v^y}{b^2} + \frac{u^z v^z}{c^2} \quad (6)$$

**Def : Homéoïde** Deux ellipsoïdes de même axes alignés avec les axes du repère  $\mathcal{E}_{a,b,c}$  et  $\mathcal{E}_{\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}}$  sont homéoïdes si  $\exists m \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $a = m\tilde{a}$ ,  $b = m\tilde{b}$  et  $c = m\tilde{c}$ . Un homéoïde est l'ensemble de points compris entre deux ellipsoïdes homéoïdes. Pour  $m_1 \leq m_2$  réels positifs, on le notera

$$\mathcal{H}_{a,b,c,m_1,m_2} = \{\mathbf{OM} \in \mathbb{R}^3 \mid Q_{a,b,c}(\mathbf{OM}) \in [m_1^2, m_2^2]\} \quad (7)$$

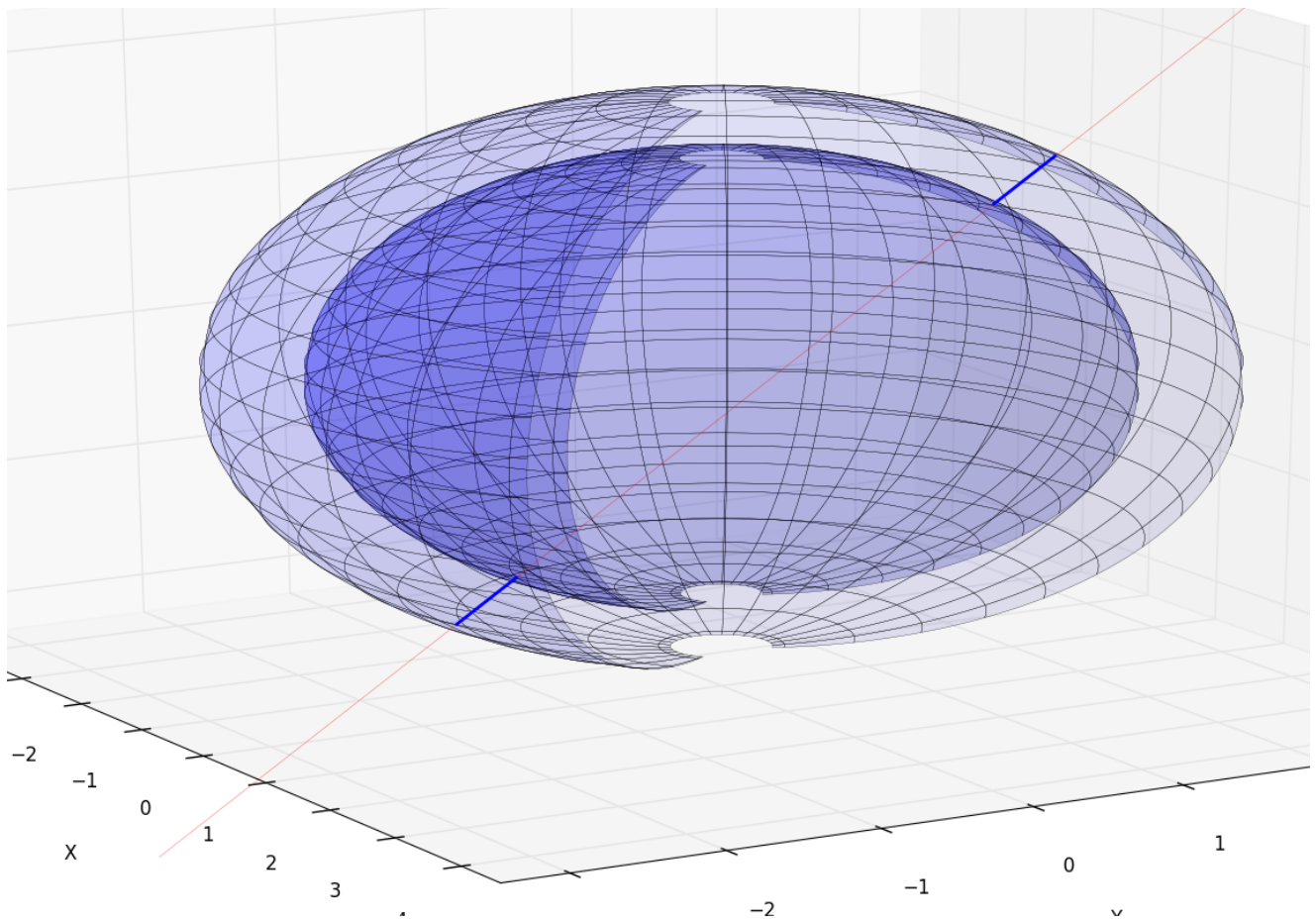


FIGURE 2 – Intersection d'un homéoïde et d'une droite passant par l'intérieur de celui-ci.

1. Montrer que l'intersection d'un homéoïde  $\mathcal{H}_{a,b,c,m_1,m_2}$  avec une droite  $\mathcal{D}$  passant par l'intérieur est constitué de deux segments de même longueur.
2. Quel est le volume d'un ellipsoïde ?
3. Montrer qu'en coordonné sphérique  $r, \theta, \phi$  le rayon de la surface de l'ellipsoïde  $r_{a,b,c}$  vérifie,

$$\frac{1}{r_{a,b,c}^2(\theta, \varphi)} = \sin^2 \theta \left( \frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2} \right) + \frac{\cos^2 \theta}{c^2} = Q_{a,b,c}(\mathbf{u}(\theta, \varphi)) \quad (8)$$

**Théorème (Newton)** Le champ de gravité qu'engendre une répartition matérielle homéoïde incluse dans un homéoïde  $\mathcal{H}_{a,b,c,m_1,m_2}$  est nul à l'intérieur de celui-ci.

Soit  $\mathcal{O} \subset ]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[$ , on introduira le cône  $\mathcal{C}_A[\mathcal{O}]$  de direction  $\mathcal{O}$  issue de  $A$  par

$$\mathcal{C}_A[\mathcal{O}] = \{\mathbf{OA} + s\mathbf{u}(\theta, \varphi) \mid s \in \mathbb{R} \text{ et } (\theta, \varphi) \in \mathcal{O}\} \quad (9)$$

On notera  $\mathcal{O}_{\theta, \varphi, \delta\theta, \delta\varphi} = ]\theta, \theta + \delta\theta[ \times ]\varphi, \varphi + \delta\varphi[$ .

- Montrer le théorème de Newton. (On commencera par montrer que la contribution au champ de pesanteur des masse incluses dans  $\mathcal{C}_A[\mathcal{O}_{\theta, \varphi, \delta\theta, \delta\varphi}] \cup \mathcal{H}_{a, b, c, m_1, m_2}$  s'annulent)
- Montrer que le potentiel gravitationnel qu'engendre une répartition matérielle homogène incluse dans un homéoïde  $\mathcal{H}_{a, b, c, m_1, m_2}$  est égale à :

$$\mathcal{U}_{\mathcal{H}} = -\frac{\mathcal{G}\rho}{2}(m_2^2 - m_1^2) \iint_{\mathcal{E}_{a, b, c}} r_{a, b, c}^2 d\Omega \quad (10)$$

Où  $d\Omega$  est l'angle solide élémentaire. L'expression peut se réécrire en fonction de la masse  $\Delta M$  incluse dans l'homéoïde

$$\mathcal{U}_{\mathcal{H}} = -\frac{3\mathcal{G}\Delta M}{2abc} \frac{m_2^2 - m_1^2}{m_2^3 - m_1^3} \iint_{\mathcal{E}_{a, b, c}} r_{a, b, c}^2 d^2\Omega \quad (11)$$

L'intégrale présente dans l'expression précédente est l'intégrable et c'est elle qu'il sera fondamental de calculer. On la notera  $2\pi I(a, b, c)$

## b L'intégrale $I$

- Montrer que :

$$I(a, b, c) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathcal{E}_{a, b, c}} r^2 d\Omega = abc \int_0^\infty \frac{du}{\Delta_{a, b, c}(u)} \quad \text{ou} \quad \Delta_{a, b, c}(u) = \sqrt{(a^2 + u)(b^2 + u)(c^2 + u)} \quad (12)$$

- Montrer que :

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{E}_{a, b, c}} r^2 (\mathbf{u}(\theta, \varphi) \cdot \mathbf{i})^2 d\Omega &\hat{=} 2\pi a^2 A(a, b, c) & A(a, b, c) &= abc \int_0^\infty \frac{du}{(a^2 + u)\Delta_{a, b, c}(u)} \\ \iint_{\mathcal{E}_{a, b, c}} r^2 (\mathbf{u}(\theta, \varphi) \cdot \mathbf{j})^2 d\Omega &\hat{=} 2\pi b^2 B(a, b, c) & \text{ou} \quad B(a, b, c) &= abc \int_0^\infty \frac{du}{(b^2 + u)\Delta_{a, b, c}(u)} \\ \iint_{\mathcal{E}_{a, b, c}} r^2 (\mathbf{u}(\theta, \varphi) \cdot \mathbf{k})^2 d\Omega &\hat{=} 2\pi c^2 C(a, b, c) & C(a, b, c) &= abc \int_0^\infty \frac{du}{(c^2 + u)\Delta_{a, b, c}(u)} \end{aligned} \quad (13)$$

- On appellera  $A, B$  et  $C$  les axes du potentiel (appellation qui sera justifiée par la suite). Montrer que  $I$  s'écrit en fonction des axes,

$$a^2 A(a, b, c) + b^2 B(a, b, c) + c^2 C(a, b, c) = I(a, b, c) \quad (14)$$

et que les axes s'écrivent en fonction de  $I$

$$\begin{aligned} A(a, b, c) &= \frac{I(a, b, c)}{a^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial I}{\partial a} \\ B(a, b, c) &= \frac{I(a, b, c)}{b^2} - \frac{1}{b} \frac{\partial I}{\partial b} \\ C(a, b, c) &= \frac{I(a, b, c)}{c^2} - \frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial c} \end{aligned} \quad (15)$$

et que la somme des éléments des axes vérifie :

$$A(a, b, c) + B(a, b, c) + C(a, b, c) = 2 \quad (16)$$

- Montrer que les intégrales suivantes peuvent s'écrire en fonction de  $I$ , sous la formes suivante :

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{E}_{a, b, c}} r^4 (\mathbf{u}(\theta, \varphi) \cdot \mathbf{i})^2 d^2\Omega &= \pi a^3 \frac{\partial I}{\partial a} \\ \iint_{\mathcal{E}_{a, b, c}} r^4 (\mathbf{u}(\theta, \varphi) \cdot \mathbf{j})^2 d^2\Omega &= \pi b^3 \frac{\partial I}{\partial b} \\ \iint_{\mathcal{E}_{a, b, c}} r^4 (\mathbf{u}(\theta, \varphi) \cdot \mathbf{k})^2 d^2\Omega &= \pi c^3 \frac{\partial I}{\partial c} \end{aligned} \quad (17)$$

### c Potentiel dans un Ellipsoïde Homogène

Nous sommes maintenant armés pour calculer le potentiel à l'intérieur d'un ellipsoïde. On considère  $M$  un point situé à l'intérieur d'un ellipsoïde  $\mathcal{E}_{a,b,c}$ . On considère le cône  $\mathcal{C}_M[\mathcal{O}_{\theta,\varphi,\delta\theta,\delta\phi}]$  issue de  $M$  et d'un angle solide  $d^2\Omega$  et d'axe  $\mathbf{u}(\theta, \varphi)$ . L'axe du cône traverse la surface de l'ellipsoïde en  $M_1$  et  $M_2$ . On notera  $r_1 = MM_1$  et  $r_2 = MM_2$ .

1. Montrer alors que la contribution du cône  $\mathcal{C}_M[\mathcal{O}_{\theta,\varphi,\delta\theta,\delta\phi}]$  au potentiel en  $M$  est

$$\delta^2\mathcal{U} = -\frac{\mathcal{G}\rho}{2} (r_1^2(\theta, \phi) + r_2^2(\theta, \phi)) \delta^2\Omega \quad (18)$$

En déduire que,

$$\mathcal{U} = -\frac{\mathcal{G}\rho}{4} \iint_{(\theta,\varphi) \in [0,\pi] \times [0,2\pi]} (r_1^2 + r_2^2) \sin\theta d\theta d\varphi \quad (19)$$

2. Considérer le fait que  $\mathbf{OM}_1 = \mathbf{OM} + \mathbf{MM}_1 = \mathbf{OM} + r_1\mathbf{u}(\theta, \varphi)$  et  $\mathbf{OM}_2 = \mathbf{OM} - r_2\mathbf{u}(\theta, \varphi)$  appartiennent à la surface de l'ellipsoïde  $\mathcal{E}_{a,b,c}$  et donc que le polynôme  $Q_{a,b,c}(\mathbf{OM} + t\mathbf{u}(\theta, \varphi)) = 1$  à pour racine  $r_1$  et  $-r_2$ . Montrer que,

$$r_1^2 + r_2^2 = 4r^4(\theta, \varphi)\Psi_{a,b,c}^2(\mathbf{OM}, \mathbf{u}(\theta, \varphi)) + 2r^2(\theta, \varphi)(1 - Q_{a,b,c}(\mathbf{OM})) \quad (20)$$

3. En utilisant les symétries montrer que :

$$\mathcal{U} = -\frac{\mathcal{G}\rho}{2} \iint \left[ 2r_{a,b,c}^4 \left( \frac{x^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi}{a^4} + \frac{y^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi}{b^4} + \frac{z^2 \cos^2\theta}{c^4} \right) + r_{a,b,c}^2 (1 - Q_{a,b,c}(\mathbf{OM})) \right] d^2\Omega \quad (21)$$

4. En utilisant les résultats Eq.(15) sur les axes en fonction de  $I$ , les résultats Eq.(17), montrer que,

$$\boxed{\mathcal{U} = \pi\mathcal{G}\rho (A(a, b, c)x^2 + B(a, b, c)y^2 + C(a, b, c)z^2 - I(a, b, c))} \quad (22)$$

Qu'en dire ?

## 4 Solutions d'équilibres de Mac-Laurin et Jacobi

**M**AINTENANT qu'on a obtenue le potentiel dans l'ellipsoïde on est en mesure de déterminer la pression et donc via la caractérisation  $P = 0$ , la valeurs des axes de l'ellipsoïde.

1. Injecter le résultat Eq.(22) dans l'équation Eq.(1), montrer que.

$$P - P_0 = -\pi\mathcal{G}\rho^2 \left[ \left( A(a, b, c) - \frac{\omega^2}{2\pi\rho\mathcal{G}} \right) x^2 + \left( B(a, b, c) - \frac{\omega^2}{2\pi\rho\mathcal{G}} \right) y^2 + C(a, b, c)z^2 \right] \quad (23)$$

Qu'en dire ? On rappelle que le moment d'inertie de l'ellipsoïde  $\mathcal{E}_{a,b,c}$  autour de l'axe  $O\mathbf{k}$  est égale a  $I_{zz} = \frac{M}{5}(a^2 + b^2)$ , on pose  $\bar{a}^3 = abc$ , montrer que la quantité apparaissant dans l'équation précédente peut s'écrire en fonction du moment angulaire  $L$  est relié à la pulsation via :

$$\frac{\omega^2}{2\pi\rho\mathcal{G}} = \frac{25L^2}{6\mathcal{G}M^3\bar{a}} \left( \frac{2\bar{a}^2}{a^2 + b^2} \right)^2 \triangleq X^2 \left( \frac{2\bar{a}^2}{a^2 + b^2} \right)^2 \quad (24)$$

On rappelle que la surface d'un fluide auto-gravitant vérifie  $P = 0$ . Le fluide est incompressible, que vérifie les axes de l'ellipsoïde si l'on change le moment angulaire de l'objet. A quelle condition le fluide est il en équilibre ? Montrer en particulier que,

$$\boxed{\begin{cases} A(a, b, c) - X^2 \left( \frac{2\bar{a}^2}{a^2 + b^2} \right)^2 - \frac{c^2}{a^2} C(a, b, c) = 0 \\ B(a, b, c) - X^2 \left( \frac{2\bar{a}^2}{a^2 + b^2} \right)^2 - \frac{c^2}{b^2} C(a, b, c) = 0 \\ abc = \bar{a}^3 \end{cases}} \quad (25)$$

En déduire les axes de l'ellipsoïde vérifie l'équation implicite :

$$\boxed{A\left(a, b, \frac{\bar{a}^3}{ab}\right) - B\left(a, b, \frac{\bar{a}^3}{ab}\right) + C\left(a, b, \frac{\bar{a}^3}{ab}\right) \frac{\bar{a}^6}{a^2b^2} \left( \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) = 0} \quad (26)$$

Montrer que la pression au centre de l'ellipsoïde est égale à,

$$P_0 = \pi\mathcal{G}\rho^2 c^2 C(a, b, c) \quad (27)$$

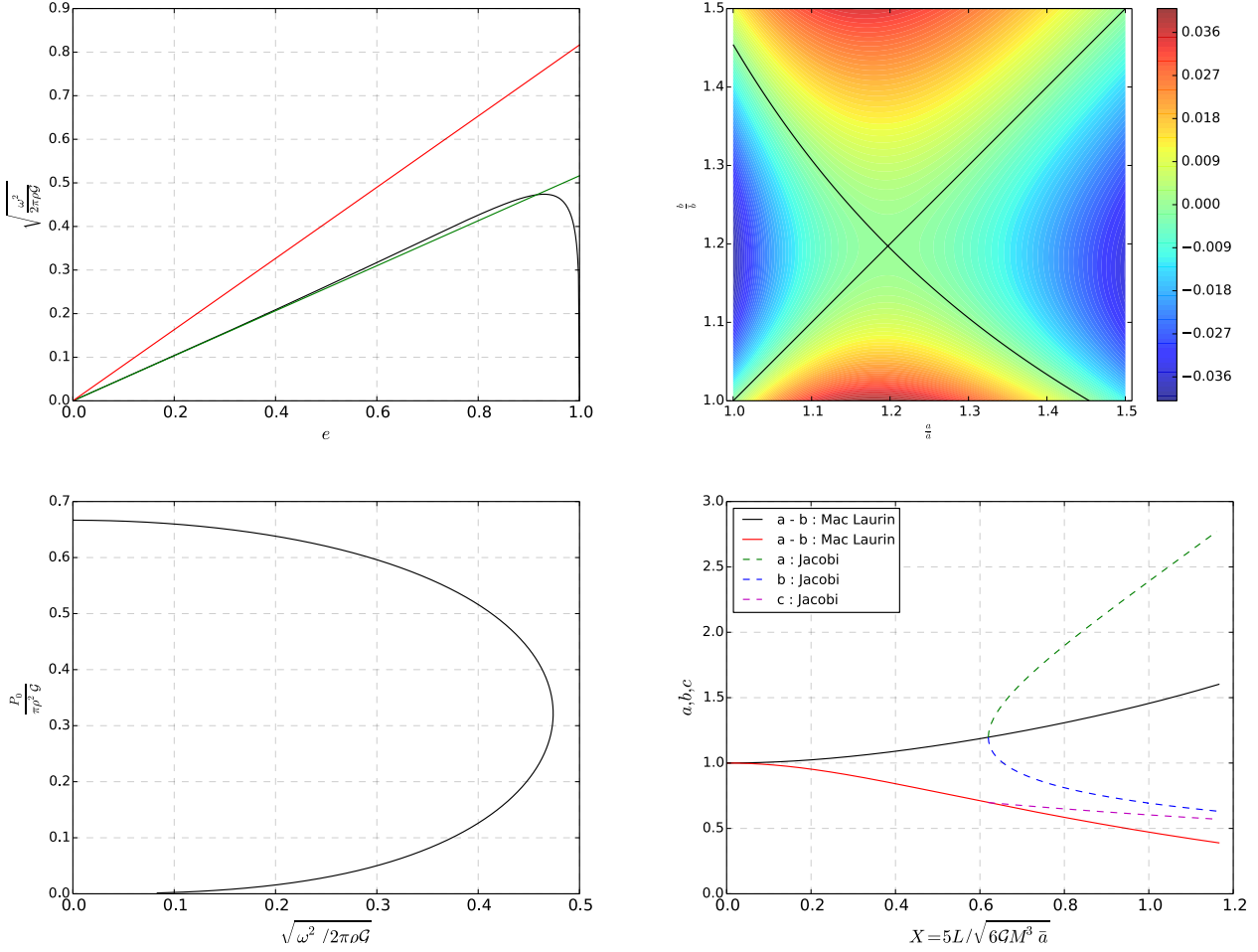


FIGURE 3 – A gauche en haut, pulsation des ellipsoïdes de Mac Laurin en fonction de l'excentricité de l'ellipsoïde. La droite rouge correspond aux résultats obtenus en section 2. La droite verte est la tangente de la courbe à la base. A droite en haut, nous avons tracé la fonction définissant implicitement le liens entre  $a$  et  $b$  apparaissant dans l'équation Eq.(26). En abscisses  $a/\bar{a}$  en ordonné  $b/\bar{a}$ . les lignes noires correspondent aux couples  $(a, b)$  possibles à l'équilibre pour différentes valeurs du moment angulaire. La bifurcation apparaît pour  $a/\bar{a} \approx 1.197$ . En bas à gauche l'évolution de la pression au centre de l'axe en fonction de la fréquence de rotation pour un ellipsoïde de Mac Laurin. En bas à droite, les solutions du système Eq.(25) en fonction du moment cinétique. Les lignes pleines correspondent aux ellipsoïdes de Mac Laurin quand les solutions en tiret correspondent à des solutions de Jacobi.

- Rechercher les solutions ayant une symétrie de révolution. Ce sont les solutions dites de Mac Laurin, c'est-à-dire celles pour lequel  $b = c$ , (on rappelle que l'excentricité de l'ellipsoïde ( $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ ) montrer alors que l'excentricité est liée à la pulsation de rotation  $\omega$  par :

$$\frac{\omega^2}{2\pi G\rho} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3} (3-2e^2) \arcsin(e) - \frac{3}{e^2} (1-e^2) \quad (28)$$

Sachant que  $\arcsin(e)/e \approx 1 + e^2/6 + 3e^4/40$ , que vaut  $\frac{\omega^2}{2\pi G\rho}$  pour des faibles excentricité? L'approximation faite en section 2 était-elle justifiée? Commenter la figure. Les solutions sont données sur le graphique Fig.(6). Quelle est approximativement la pulsation maximum pour laquelle il existe un équilibre de Mac Laurin? Commenter? Combien de solutions existent pour une pulsation comprise entre une absence de rotation et la pulsation maximale.

- La résolution du système Eq.(25) montre qu'il existe un autre ensemble de solution à 3 axes à partir d'une rotation. L'ensemble de solutions de Mac Laurin et de Jacobi est représenté sur la figure Fig.(10). A partir de quelle pulsations ces solutions sont-elles possibles? Montrer que l'énergie cinétique de l'objet peut s'écrire :

$$E_c = \frac{3GM^2}{5\bar{a}} \frac{X^2 \bar{a}^2}{a^2 + b^2} \quad (29)$$

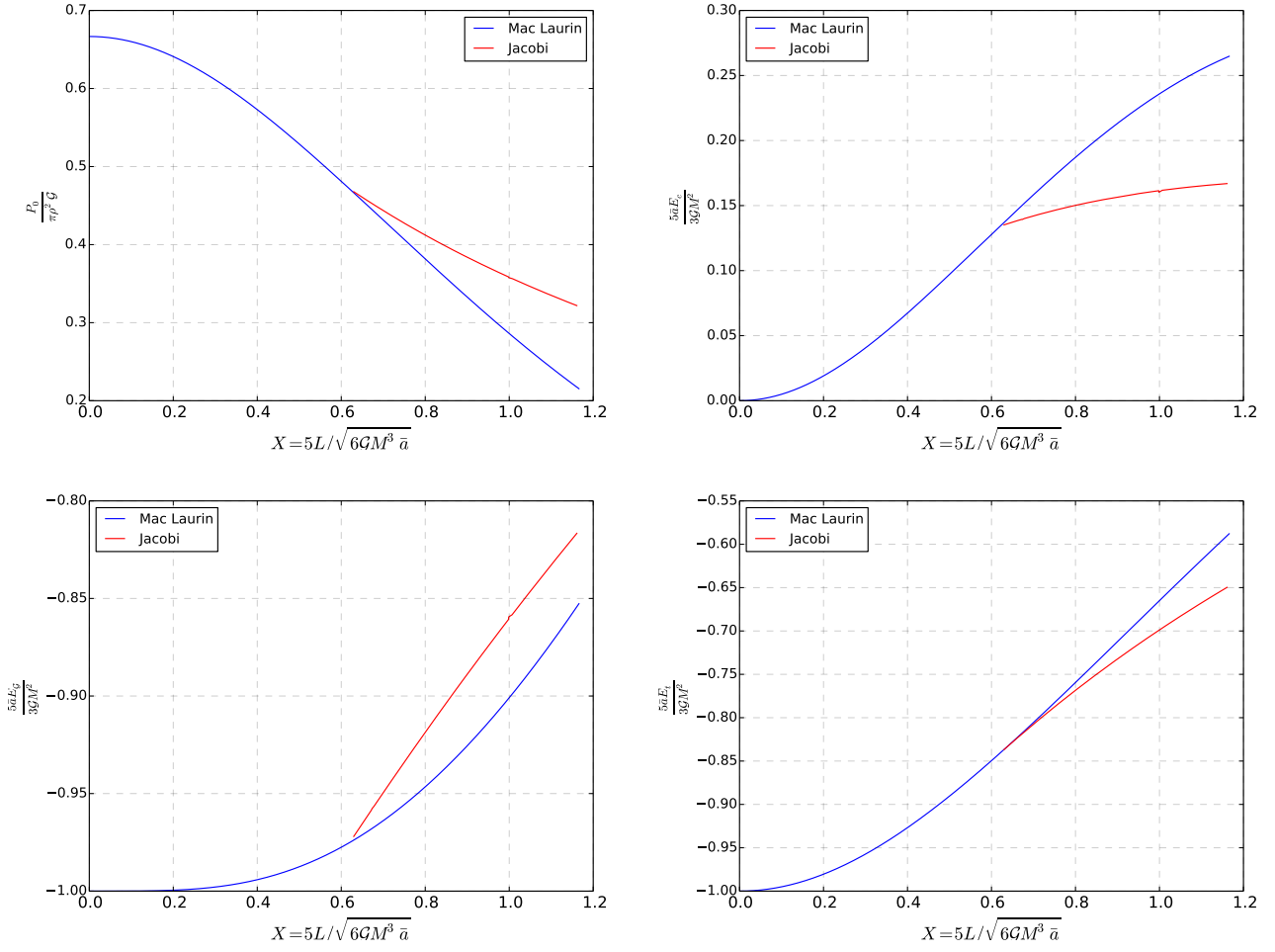


FIGURE 4 – A gauche en haut, évolution de la pression au centre de la formation en fonction du moment angulaire pour les ellipsoïdes de Mac Laurin et de Jacobi. A droite en haut, évolution de l'énergie cinétique des ellipsoïdes de Mac Laurin et de Jacobi en fonction du moment angulaire. En bas à gauche l'évolution de l'énergie gravitationnel de la formation pour ces même ellipsoïdes. On remarque que l'énergie gravitationnel des ellipsoïdes. En bas à droite l'évolution de l'énergie totale pour les ellipsoïde de Mac Laurin et de Jacobi.

Que son énergie gravitationnel est égale à

$$E_g = -\frac{3GM^2}{5\bar{a}} \frac{I(a, b, c)}{2\bar{a}^2} \quad (30)$$

Et donc,

$$E_t = \frac{3GM^2}{5\bar{a}} \left( \frac{X^2 \bar{a}^2}{a^2 + b^2} - \frac{I(a, b, c)}{2\bar{a}^2} \right) \quad (31)$$

On trace sur le graphique en bas à droite Fig.4 l'évolution de l'énergie mécanique total. Quel est l'objet le plus stable ?

# Corrigée

## 1 Généralités sur l'auto-gravitation d'un fluide incompressible

1. Il s'agit de l'équation de Poisson,

$$\Delta \mathcal{U} = 4\pi \mathcal{G} \rho \quad (32)$$

Qui a pour solution (à une fonction harmonique près qu'on choisira nulle),

$$\mathcal{U}(\mathbf{r}, t) = -\mathcal{G} \iiint \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} d^3 \mathbf{r}' \quad (33)$$

2. L'équation de l'hydrostatique s'écrit,

$$\nabla P = -\rho \nabla \mathcal{U} + \rho \omega^2 \varpi \mathbf{e}_\varpi$$

où le terme centrifuge peut se réécrire,

$$\mathbf{f}_c = \rho \omega^2 \varpi \mathbf{e}_\varpi = \rho \omega^2 \varpi \nabla \varpi = \rho \omega^2 \nabla \varpi^2 / 2$$

ce qui permet, réinjecté dans l'équation de l'hydrostatique, de conclure.

3. La pression est nulle à l'extérieur de la distribution, afin d'éviter des singularités dans les forces volumiques de pression, celle-ci doit être continue, on a alors pour tout point  $M$  de la surface de la distribution  $P = 0$ . L'équation précédente assure que si  $\mathcal{U}$  est une forme quadratique alors  $P$  l'est aussi.

## 2 Aux faibles rotations...

1. Le potentiel est à symétrie sphérique. Tout d'abord vu que la distribution ne dépend pas du temps l'Eq.(33) implique que  $\mathcal{U}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{U}(\mathbf{r})$ . Considérons  $R$  une rotation quelconque de  $\mathbb{R}^3$  autour d'un axe quelconque passant par  $O$ . Notons  $\mathbf{u} = R^{-1}\mathbf{r}'$ , les rotations conservant les distance elles conservent également les volumes  $d^3 \mathbf{u} = d^3 \mathbf{r}'$ , de plus  $\rho(R\mathbf{u}) = \rho(\|\mathbf{u}\|) = \rho(\|\mathbf{r}'\|) = \rho(\mathbf{r})$ , on a donc

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(R\mathbf{r}) &= -\mathcal{G} \iiint \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\|R\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} d^3 \mathbf{r}' \\ &= -\mathcal{G} \iiint \frac{\rho(R\mathbf{u})}{\|R(\mathbf{r} - \mathbf{u})\|} d^3 \mathbf{u} \\ &= -\mathcal{G} \iiint \frac{\rho(\mathbf{u})}{\|\mathbf{r} - \mathbf{u}\|} d^3 \mathbf{u} \\ &= \mathcal{U}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (34)$$

Ce qui permet de conclure rapidement. ■

2. En intégrant l'équation de Poisson avec un potentiel à symétrie sphérique, puis en assurant la continuité, on obtient

$$\mathcal{U} : \begin{aligned} r \leq R &\longrightarrow \frac{\mathcal{G}M}{2R} \left( \frac{r^2}{R^2} - 3 \right) \\ r \geq R &\longrightarrow -\frac{\mathcal{G}M}{r} \end{aligned} \quad (35)$$

3. La densité étant constante on peut utiliser l'équation Eq.(1)

$$P = P_0 - \frac{\rho \mathcal{G}M}{2R} \left( \frac{r}{R} \right)^2 \quad (36)$$

l'annulation de la pression à la surface de l'astre permet d'obtenir  $P_0$  qui est également la pression au coeur de l'astre.

$$P_0 = \frac{\rho \mathcal{G}M}{2R} \quad (37)$$

4. L'énergie cinétique est nulle on calcule donc uniquement l'énergie potentielle.

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2} \iiint \rho \mathcal{U} d^3 r \\ &= 2\pi \rho \int_0^R \mathcal{U}(r) r^2 dr \\ &= \frac{3\mathcal{G}M^2}{4R} \int_0^1 (x^2 - 3)x^2 dx \\ &= -\frac{3\mathcal{G}M^2}{5R} \end{aligned} \quad (38)$$



5. Sous l'hypothèse  $\rho\delta\mathcal{U} \ll \rho\frac{\omega^2\varpi^2}{2}$  Un calcul rapide nous conduit à

$$P - P_0 = -\frac{\rho\mathcal{G}M}{2R^3} \left[ \left(1 - \frac{R^3\omega^2}{\mathcal{G}M}\right) \varpi^2 + z^2 \right] \quad (39)$$

Ce qui implique que la surface de la formation à pour équation

$$1 = \frac{\rho\mathcal{G}M}{2P_0R^3} \left[ \left(1 - \frac{R^3\omega^2}{\mathcal{G}M}\right) \varpi^2 + z^2 \right] \quad (40)$$

qui est l'équation de la surface d'un ellipsoïde d'axe  $a, b, c$  valent :

$$\begin{cases} a^2 = b^2 = \frac{2R^3P_0}{\rho\mathcal{G}M} \\ \qquad \qquad \qquad 1 - \frac{3\omega^2}{4\pi\mathcal{G}\rho} \\ c^2 = \frac{2R^3P_0}{\rho\mathcal{G}M} \end{cases} \quad (41)$$

en exprimant la masse en fonction de la densité à l'intérieur de la fraction qui contient  $\omega$ . La pression  $P_0$  s'obtient en se rappelant que le fluide est incompressible, son volume se conserve.

$$P_0 = \frac{\rho\mathcal{G}M}{2R} \left(1 - \frac{3\omega^2}{4\pi\mathcal{G}\rho}\right)^{2/3} \quad (42)$$

En sachant que  $\frac{c^2}{a^2} = 1 - \frac{3\omega^2}{4\pi\mathcal{G}\rho}$  et que  $e^2 = 1 - c^2/a^2$  conduit rapidement au résultat. Le calcul explicite du potentiel s'écrit,

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \iiint_{\mathcal{E}_{a,b,c}} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} d^3r' \\ &= -\mathcal{G} \iint_{\theta,\phi} \int_0^{R(\theta)} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} r'^2 dr' d^2\Omega \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\delta\mathcal{U} = -\mathcal{G}\rho \iint_{\theta,\phi} \left( \int_R^{R(\theta)} \frac{r'^2 dr'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right) d^2\Omega} \\ &= \mathcal{U}_s - \mathcal{G}\rho \iint_{\theta,\phi} \left( \int_R^{R(\theta)} \frac{r'^2 dr'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right) d^2\Omega \end{aligned} \quad (43)$$

Sachant qu'à l'intérieur de la coquille on a  $r' \approx R$  et  $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| \approx R$ , on peut donc estimer  $\delta\mathcal{U}$

$$\delta\mathcal{U} \approx -4\pi\mathcal{G}\rho R\delta R \quad (44)$$

Or d'après le résultat Eq.(4), on a  $\delta R \approx Re/2 \approx 3R\omega^2/8\pi\mathcal{G}\rho$ , et donc

$$\delta\mathcal{U} \approx \frac{3\omega^2 R^2}{2} \quad (45)$$

Ce qui n'est pas négligeable devant  $\frac{\omega^2 R^2}{2}$ .

Considérons l'équation Eq.(43). Dans les zones "polaires" ou  $R(\theta) < R$  l'expression dans l'intégrale est négative on a donc un surplus de potentiel gravitationnel. L'inverse se produit dans les zones équatoriales. Ainsi le champ gravitationnel supplémentaire dû à la déformation est un champ qui "pousse la matière sur l'équateur". Son effet s'ajoute donc à celui des forces centrifuges. Pris en compte, la déviation du potentiel doit conduire à un ellipsoïde "plus aplati" que celui calculé dans le cadre de l'hypothèse ou l'on néglige  $\delta\mathcal{U}$ . Aux "faibles rotations", on doit donc avoir

$$e^2 > \frac{3\omega^2}{4\pi\mathcal{G}\rho} \quad (46)$$

### 3 Du potentiel à l'intérieur d'un ellipsoïde homogène.

#### a Intérieur d'un homéoïde

1. La droite passant à l'intérieur de l'homéoïde, on considère un point  $N$  de la droite à l'intérieur de l'homéoïde. On note  $\mathbf{u}$  un vecteur directeur de la droite, quitte à le renormaliser on le choisira tel que  $Q_{a,b,c}(\mathbf{u}) = 1$ . L'arc  $\mathbf{OM}(t) = \mathbf{ON} + t\mathbf{u}$  décrit la droite, les points de la droite à l'intérieur de l'homéoïde sont ceux qui vérifient

$$m_1^2 \leq Q_{a,b,c}(\mathbf{OM}(t)) \leq m_2^2 \quad (47)$$

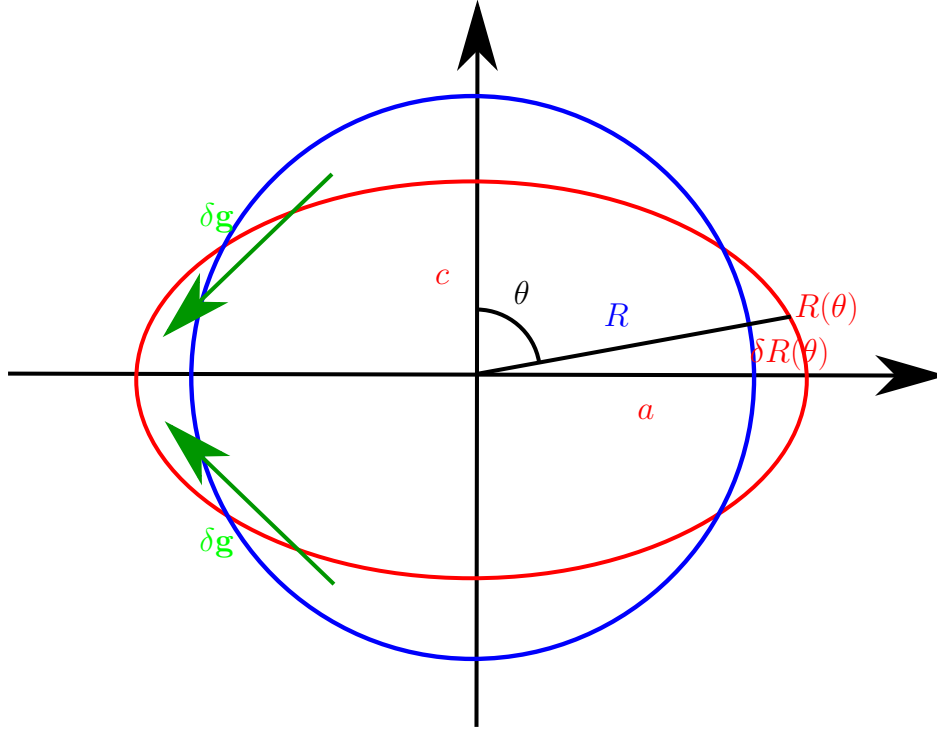


FIGURE 5 – Aplatissement de la masse fluide en rotation

Ce qui se réécrit à l'aide de la forme bilinéaire associée,

$$m_1^2 \leq t^2 + 2t\Psi_{a,b,c}(\mathbf{ON}, \mathbf{u}) + Q_{a,b,c}(\mathbf{ON}) \leq m_2^2 \quad (48)$$

Qui est un polynôme du second degré, l'ensemble des points de l'intersection entre la droite et l'homéoïde est donc

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \cap \mathcal{H}_{a,b,c,m_1,m_2} &= \{\mathbf{OM}(t) \mid t \in [t_{2,-}, t_{1,-}] \cup [t_{1,+}, t_{2,+}]\} = [M_{1,-}M_{2,-}] \cup [M_{1,+}M_{2,+}] \\ \text{ou } t_{i,\pm} &= -\Psi_{a,b,c}(\mathbf{ON}, \mathbf{u}) \pm \sqrt{\Psi_{a,b,c}(\mathbf{ON}, \mathbf{u})^2 + m_i^2 - Q_{a,b,c}(\mathbf{ON})} \\ \text{et } M_{i,\pm} &= \mathbf{OM}(t_{i,\pm}) \end{aligned} \quad (49)$$

On a donc la réunion de 2 segments dont la longueur est,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{M}_{1,-}\mathbf{M}_{2,-}\| &= |t_{1,-} - t_{2,-}| \|\mathbf{u}\| \\ &= \left( \sqrt{\Psi_{a,b,c}(\mathbf{ON}, \mathbf{u})^2 + m_2^2 - Q_{a,b,c}(\mathbf{ON})} - \sqrt{\Psi_{a,b,c}(\mathbf{ON}, \mathbf{u})^2 + m_1^2 - Q_{a,b,c}(\mathbf{ON})} \right) \|\mathbf{u}\| \end{aligned} \quad (50)$$

et de façon similaire,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{M}_{1,+}\mathbf{M}_{2,+}\| &= |t_{2,+} - t_{1,+}| \|\mathbf{u}\| \\ &= \left( \sqrt{\Psi_{a,b,c}(\mathbf{ON}, \mathbf{u})^2 + m_2^2 - Q_{a,b,c}(\mathbf{ON})} - \sqrt{\Psi_{a,b,c}(\mathbf{ON}, \mathbf{u})^2 + m_1^2 - Q_{a,b,c}(\mathbf{ON})} \right) \|\mathbf{u}\| \end{aligned} \quad (51)$$

ce qui achève la réponse. ■

2. Le volume d'un ellipsoïde peut être calculé comme suit. On introduit le système de coordonnées  $m, u, v$ ,

$$\begin{cases} x = am \sin u \cos v \\ y = bm \sin u \sin v \\ z = c \cos u \end{cases} \quad (52)$$

Ce qui aboutit à un élément de volume élémentaire

$$\begin{aligned} \det(\boldsymbol{\partial}_m, \boldsymbol{\partial}_u, \boldsymbol{\partial}_v) &= \begin{vmatrix} a \sin u \cos v & am \cos u \cos v & -am \sin u \sin v \\ b \sin u \sin v & bm \cos u \sin v & bm \sin u \cos v \\ c \cos u & -cm \sin u & 0 \end{vmatrix} \\ &= abc m^2 \begin{vmatrix} \sin u \cos v & \cos u \cos v & -\sin u \sin v \\ \sin u \sin v & \cos u \sin v & \sin u \cos v \\ \cos u & -\sin u & 0 \end{vmatrix} \\ &= abc m^2 \end{aligned}$$

Ce qui permet rapidement d'aboutir à

$$\mathcal{V}_{a,b,c} = \frac{4\pi}{3} abc \quad (53)$$

3. Les coordonnées cartésiennes sont liées aux coordonnées sphériques par les relations :

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (54)$$

L'appartenance de  $\mathbf{OM}$  à l'ellipsoïde  $\mathcal{E}_{a,b,c}$  s'écrit  $Q_{a,b,c}(\mathbf{OM}) = 1$  s'écrit,

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} &= 1 \\ \left( \frac{r \sin \theta \cos \varphi}{a} \right)^2 + \left( \frac{r \sin \theta \sin \varphi}{b} \right)^2 + \left( \frac{r \cos \theta}{c} \right)^2 &= 1 \\ \frac{1}{r_{a,b,c}^2(\theta, \varphi)} &= \sin^2 \theta \left( \frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2} \right) + \frac{\cos^2 \theta}{c^2} \end{aligned} \quad (55)$$

On obtient ainsi la distance au centre d'un point de l'ellipsoïde de latitude  $\theta$  et d'azimut  $\varphi$

4. Considérons un point  $A$  à l'intérieur de l'homéoïde  $\mathcal{H}_{a,b,c,m_1,m_2}$  et le sous ensemble  $\mathcal{O}_{\theta,\varphi,\delta\theta,\delta\varphi} = ]\theta, \theta + \delta\theta[ \times ]\varphi, \varphi + \delta\varphi[$ .

Calculons la contribution au champ de pesanteur en  $A$  des points de l'intersection du cône  $\mathcal{C}_A[\mathcal{O}_{\theta,\varphi,\delta\theta,\delta\varphi}]$  avec l'homéoïde  $\mathcal{H}_{a,b,c,m_1,m_2}$ . Le cône issue de  $A$  introduit un système de coordonnées naturellement adapté  $(s, \theta, \varphi)$  (coordonnées sphériques centrées en  $A$  et d'axe  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ) dont l'élément de volume est  $s^2 ds \sin^2 \Omega$  ( $d^2 \Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$  est l'angle solide du cône considéré). On a donc concernant la contribution

$$\begin{aligned} \delta^2 \mathbf{g} &= \mathcal{G} \rho \iiint_{\mathcal{C}_A[\mathcal{O}_{\theta,\varphi,\delta\theta,\delta\varphi}] \cup \mathcal{H}_{a,b,c,m_1,m_2}} \frac{\mathbf{AM}}{AM^3} d^3 r \\ &= \mathcal{G} \rho \iint_{\mathcal{O}_{\theta,\varphi,\delta\theta,\delta\varphi}} \left( \int_{A+s\mathbf{u}(\theta,\varphi) \in \mathcal{H}_{a,b,c,m_1,m_2}} \pm \mathbf{u}(\theta, \varphi) ds \right) d^2 \Omega \\ &= \mathcal{G} \rho \iint_{\mathcal{O}_{\theta,\varphi,\delta\theta,\delta\varphi}} (\mathbf{M}_{1,+} \mathbf{M}_{2,+} - \mathbf{M}_{1,-} \mathbf{M}_{2,-}) d^2 \Omega \\ &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (56)$$

L'égalité finale provenant du résultat de la question 1 de la même section.

5. Le champ de pesanteur étant nul, le potentiel est constant à l'intérieur de l'homéoïde. Il est donc équivalent de le calculer au centre du référentiel. En coordonnées sphériques on obtient,

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{U} &= -\mathcal{G} \rho \iiint_{\mathcal{H}_{a,b,c,m_1,m_2}} \frac{d^3 r}{r} \\ &= -\frac{\mathcal{G} \rho}{2} \iint_{]0,\pi[ \times ]0,2\pi[} \left( \int_{m_1 r(\theta,\varphi)}^{m_2 r(\theta,\varphi)} dr^2 \right) d^2 \Omega \\ &= -\frac{\mathcal{G} \rho}{2} (m_2^2 - m_1^2) \iint_{]0,\pi[ \times ]0,2\pi[} r^2(\theta, \varphi) d^2 \Omega \\ &= -\pi \mathcal{G} \rho (m_2^2 - m_1^2) I(a, b, c) \end{aligned} \quad (57)$$

Le passage de la seconde à la troisième ligne viens du fait que les axes de l'ellipsoïde intérieur sont  $m_1 a, m_1 b, m_1 c$  (resp.  $m_2 a, m_2 b, m_2 c$  pour l'ellipsoïde extérieur) et donc la distance au centre du point de coordonnées  $\theta, \varphi$  sur l'ellipsoïde intérieur est  $m_1 r(\theta, \varphi)$  (resp.  $m_2 r(\theta, \varphi)$  pour l'ellipsoïde extérieur).

## b L'intégrale $I$

1. Utilisons l'équation Eq.(8), puis les symétries

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\sin^2 \theta \left( \frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{c^2} \right) + \frac{\cos^2 \theta}{c^2}} \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta d\theta d\varphi}{\sin^2 \theta \left( \frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{c^2} \right) + \frac{\cos^2 \theta}{c^2}} \end{aligned} \quad (58)$$

à l'aide du changement de variable  $t = \tan \varphi$ , on obtient

$$\begin{aligned} I &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty \frac{\sin \theta d\theta \cos^2 \varphi dt}{\sin^2 \theta \left( \frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{c^2} \right) + \frac{\cos^2 \theta}{c^2}} \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_0^\infty \frac{dt}{\sin^2 \theta \left( \frac{1}{a^2} + \frac{t^2}{c^2} \right) + \frac{\cos^2 \theta}{c^2} (1 + t^2)} \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_0^\infty \frac{dt}{\frac{\sin^2 \theta}{a^2} + \frac{\cos^2 \theta}{c^2} + t^2 \left( \frac{\sin^2 \theta}{b^2} + \frac{\cos^2 \theta}{c^2} \right)} \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta d\theta}{\frac{\sin^2 \theta}{a^2} + \frac{\cos^2 \theta}{c^2}} \int_0^\infty \frac{dt}{1 + t^2 \left( \frac{\frac{\sin^2 \theta}{b^2} + \frac{\cos^2 \theta}{c^2}}{\frac{\sin^2 \theta}{a^2} + \frac{\cos^2 \theta}{c^2}} \right)} \end{aligned} \quad (59)$$

Puis  $u^2 = t^2 \left( \frac{\frac{\sin^2 \theta}{b^2} + \frac{\cos^2 \theta}{c^2}}{\frac{\sin^2 \theta}{a^2} + \frac{\cos^2 \theta}{c^2}} \right)$

$$\begin{aligned} I &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{a^2} + \frac{\cos^2 \theta}{c^2}} \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{b^2} + \frac{\cos^2 \theta}{c^2}}} \int_0^\infty \frac{du}{1 + u^2} \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{a^2} + \frac{\cos^2 \theta}{c^2}} \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{b^2} + \frac{\cos^2 \theta}{c^2}}} \\ &= 2abc^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\tan \theta d\theta}{\cos \theta \sqrt{a^2 + c^2 \tan^2 \theta} \sqrt{b^2 + c^2 \tan^2 \theta}} \\ &= ab \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \theta \frac{2c^2 \tan \theta}{\cos^2 \theta} d\theta}{(a^2 + c^2 \tan^2 \theta)^{1/2} (b^2 + c^2 \tan^2 \theta)} \\ &= abc \int_0^{\pi/2} \frac{\frac{2c^2 \tan \theta}{\cos^2 \theta} d\theta}{(a^2 + c^2 \tan^2 \theta)^{1/2} (b^2 + c^2 \tan^2 \theta) (c^2 + c^2 \tan^2 \theta)^{1/2}} \end{aligned} \quad (60)$$

Puis  $u = c^2 \tan^2 \theta$ , sachant que  $du = \frac{2c^2 \tan \theta}{\cos^2 \theta} d\theta$

$$I = abc \int_0^\infty \frac{du}{(a^2 + u)^{1/2} (b^2 + u) (c^2 + u)^{1/2}} \quad (61)$$

Ce qui achève la démonstration. ■

2. Considérons la troisième intégrale

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{\mathcal{E}_{a,b,c}} r^2(\theta, \varphi) \cos^2 \theta d^2\Omega \quad (62)$$

En suivant les mêmes étapes d'intégration que pour  $I$  on obtient,

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{\mathcal{E}_{a,b,c}} r^2(\theta, \varphi) \cos^2 \theta d^2\Omega = abc \int_0^\infty \frac{\cos^2 \theta du}{\Delta_{a,b,c}(u)} = abc^3 C(a, b, c) \quad (63)$$

Or  $\cos^2 \theta = \frac{c^2}{c^2 + u}$ . Ce qui achève le résultat pour  $C(a, b, c)$ . Pour les autres il est utile de remarquer que :

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{\mathcal{E}_{a,b,c}} r^2(\theta, \varphi) (\mathbf{u}(\theta, \varphi) \cdot \mathbf{i})^2 d^2\Omega = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathcal{E}_{a,b,c}} (r(\theta, \varphi) \mathbf{u}(\theta, \varphi) \cdot \mathbf{i})^2 d^2\Omega \quad (64)$$

Ainsi en permutant les axes  $\mathbf{ik} \longleftrightarrow \mathbf{ki}$  on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathcal{E}_{a,b,c}} (\mathbf{r}_{a,b,c}(\theta, \varphi) \cdot \mathbf{i})^2 d^2\Omega &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathcal{E}_{c,b,a}} (\mathbf{r}_{c,b,a}(\theta, \varphi) \cdot \mathbf{k})^2 d^2\Omega \\ &= a^3 bc C(c, b, a) \end{aligned} \quad (65)$$

Ce qui permet d'aboutir au résultat pour  $A(a, b, c)$  de même pour  $B(a, b, c)$ .

3. La première égalité tient du fait que  $r^2(\theta, \varphi) = r^2(\theta, \varphi) (\mathbf{u}(\theta, \varphi) \cdot \mathbf{i})^2 + r^2(\theta, \varphi) (\mathbf{u}(\theta, \varphi) \cdot \mathbf{j})^2 + r^2(\theta, \varphi) (\mathbf{u}(\theta, \varphi) \cdot \mathbf{k})^2$ .  
Pour la seconde, dérivons directement l'intégrale  $I$  par rapport à  $a$ . En permutant dérivée et intégrale :

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \frac{\partial I}{\partial a} &= \frac{I}{a^2} + \frac{abc}{a} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial a} \frac{1}{\Delta_{a,b,c}(u)} du \\ &= \frac{I}{a^2} + \frac{abc}{a} \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{(b^2+u)(c^2+u)}} \frac{-1}{2} \frac{2a}{(a^2+u)^{3/2}} \end{aligned} \quad (66)$$

Ce qui permet de conclure. La symétrie permettra de démontrer le reste des égalités sur les dérivées de  $I$ .  
Pour la dernière égalité remarquons que,

$$\frac{1}{\Delta_{a,b,c}} \frac{d\Delta_{a,b,c}}{du} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a^2+u} + \frac{1}{b^2+u} + \frac{1}{c^2+u} \right) \quad (67)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} A(a, b, c) + B(a, b, c) + C(a, b, c) &= abc \int_0^\infty \frac{du}{\Delta_{a,b,c}(u)} \left( \frac{1}{a^2+u} + \frac{1}{b^2+u} + \frac{1}{c^2+u} \right) \\ &= abc \int_0^\infty \frac{du}{\Delta_{a,b,c}(u)} \frac{2}{\Delta_{a,b,c}} \frac{d\Delta_{a,b,c}}{du} \\ &= -2abc \int_0^\infty \frac{d}{du} \left( \frac{1}{\Delta_{a,b,c}(u)} \right) du = 2 \end{aligned} \quad (68)$$

4. Dérivons l'équation qui définit  $I$

$$\iint_{\mathcal{E}_{a,b,c}} r_{a,b,c} \frac{\partial r_{a,b,c}}{\partial a} d^2\Omega = \pi \frac{\partial I}{\partial a} \quad (69)$$

En utilisant Eq.(8), on obtient

$$\frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{1}{r_{a,b,c}^2} \right) = -2 \frac{\cos^2 \varphi \sin^2 \theta}{a^3} \implies r_{a,b,c} \frac{\partial r_{a,b,c}}{\partial a} = \frac{r_{a,b,c}^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta}{a^3} \quad (70)$$

Ce qui permet d'aboutir au résultat. Les autres égalités se déduisent par symétries.

### c Potentiel dans un ellipsoïde homogène

1. Le système de coordonnées implicitement défini dans la définition du cône  $\mathcal{C}_M[\mathcal{O}]$  en Eq.(9) est un système de coordonnées sphériques centré en  $M$ . Ainsi l'élément de volume s'écrit  $d^3r = s^2 ds \sin \theta d\theta d\varphi = s^2 ds d^2\Omega$ .  
La contribution du cône  $\mathcal{C}_M[\mathcal{O}_{\theta,\varphi,\delta\theta,\delta\varphi}]$  au potentiel en  $M$  est donc,

$$\begin{aligned} \delta^2 \mathcal{U} &= -\mathcal{G} \iiint_{\mathcal{E}_{a,b,c} \cap \mathcal{C}_M[\mathcal{O}_{\theta,\varphi,\delta\theta,\delta\varphi}]} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{MM'} d^3r' \\ &= -\mathcal{G}\rho \iint_{\mathcal{O}_{\theta,\varphi,\delta\theta,\delta\varphi}} \left( \int_{-r_2}^{r_1} \frac{s^2 ds}{|s|} \right) d^2\Omega \\ &= -\frac{\mathcal{G}\rho}{2} \iint_{\mathcal{O}_{\theta,\varphi,\delta\theta,\delta\varphi}} (r_1^2(\theta, \varphi) + r_2^2(\theta, \varphi)) d^2\Omega \\ &= -\frac{\mathcal{G}\rho}{2} (r_1^2(\theta, \varphi) + r_2^2(\theta, \varphi)) \delta\Omega \end{aligned} \quad (71)$$

Qui est donc la contribution des masses contenues dans le cône  $\mathcal{C}_M[\mathcal{O}_{\theta,\varphi,\delta\theta,\delta\varphi}]$ . Si l'on ajoute la contribution de tous les cônes quelque soit leurs axes alors on balaie 2 fois l'ellipsoïde on calcule alors 2 fois le potentiel en  $M$ . Ce qui justifie le nombre 4 présent au dénominateur de l'Eq.(19).

2. Le polynôme  $Q_{a,b,c}(\mathbf{OM} + t\mathbf{u}(\theta, \varphi)) = 1$  se réécrit,

$$t^2 + 2t\Psi_{a,b,c}(\mathbf{OM}, \mathbf{u})r_{a,b,c}^2 - r_{a,b,c}^2(1 - Q_{a,b,c}(\mathbf{OM})) \quad (72)$$

Si on note  $t_1 = r_1$  et  $t_2 = -r_2$  les racines de ce polynôme alors  $t_1 + t_2 = -2\Psi_{a,b,c}(\mathbf{OM}, \mathbf{u})r_{a,b,c}^2$ . Ainsi on a

$$\begin{aligned} t_1^2 + t_2^2 &= -2(t_1 + t_2)\Psi_{a,b,c}(\mathbf{OM}, \mathbf{u})r_{a,b,c}^2 + 2r_{a,b,c}^2(1 - Q_{a,b,c}(\mathbf{OM})) \\ &= 4\Psi_{a,b,c}^2(\mathbf{OM}, \mathbf{u})r_{a,b,c}^4 + 2r_{a,b,c}^2(1 - Q_{a,b,c}(\mathbf{OM})) \end{aligned} \quad (73)$$

Ce qui en remplaçant par les rayons  $r_1$  et  $-r_2$  donne le résultat demandé.

3. En injectant le résultat de la question précédente dans le résultat de l'antépénultième, on obtient :

$$\mathcal{U} = -\frac{\mathcal{G}\rho}{4} \int_{\theta \in ]0, \pi[} \int_{\varphi \in ]0, 2\pi[} [4r_{a,b,c}^4(\theta, \varphi)\Psi_{a,b,c}^2(\mathbf{OM}, \mathbf{u}(\theta, \varphi)) + 2(1 - Q_{a,b,c}(\mathbf{OM}))r_{a,b,c}^2(\theta, \varphi)] \sin \theta d\theta d\varphi \quad (74)$$

La difficulté consiste à traiter les termes croisés de  $\Psi_{a,b,c}^2(\mathbf{OM}, \mathbf{u})$ , cette quantité s'exprime en fonction des angles  $(\theta, \varphi)$ ,

$$\begin{aligned} \Psi_{a,b,c}^2(\mathbf{OM}, \mathbf{u}(\theta, \varphi)) &= \left( \frac{x \sin \theta \cos \varphi}{a^2} + \frac{y \sin \theta \sin \varphi}{b^2} + \frac{z \cos \theta}{c^2} \right)^2 \\ &= \frac{x^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{a^4} + \frac{y^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{b^4} + \frac{z^2 \cos^2 \theta}{c^4} \\ &\quad + 2 \left( \frac{xy \sin^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi}{a^2 b^2} + \frac{xz \sin \theta \cos \theta \cos^2 \varphi}{a^2 c^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{yz \sin \theta \cos \theta \sin^2 \varphi}{b^2 c^2} \right) \end{aligned} \quad (75)$$

Les termes croisés ont une contribution nulle dans l'intégrale Eq.(74). En effet  $r_{a,b,c}^2(\theta, \varphi)$  étant invariant par  $\theta \longleftrightarrow \pi - \theta$  et  $\varphi \longleftrightarrow 2\pi - \varphi$  le premier terme proportionnel à  $xy$  change de signe quand  $\varphi \longleftrightarrow 2\pi - \varphi$ , les deux autres changent de signe pour  $\theta \longleftrightarrow \pi - \theta$ . On aboutit au résultat souhaité, une fois injecté les termes diagonaux (les termes croisés s'annulant) de l'équation précédente et l'expression de  $Q_{a,b,c}(\mathbf{OM})$  en fonction de  $x, y, z$  dans Eq.(74).

4. On fait rapidement apparaître  $I$  en utilisant sa définition Eq.(12),

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= -\frac{\mathcal{G}\rho}{2} \left[ 2\pi I(a, b, c) \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + 2 \left\{ \left( \iint \frac{r_{a,b,c}^4(\mathbf{u} \cdot \mathbf{i})^2}{a^4} d^2\Omega \right) x^2 + \left( \iint \frac{r_{a,b,c}^4(\mathbf{u} \cdot \mathbf{j})^2}{b^4} d^2\Omega \right) y^2 + \left( \iint \frac{r_{a,b,c}^4(\mathbf{u} \cdot \mathbf{k})^2}{c^4} d^2\Omega \right) z^2 \right\} \right] \end{aligned} \quad (76)$$

Les intégrales restantes étant simplement celles apparaissant dans Eq.(17). Il nous reste donc un peu d'algèbre à faire.

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= -\mathcal{G}\rho\pi \left[ I(a, b, c) \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \right) + \left\{ \frac{1}{a} \frac{\partial I}{\partial a} x^2 + \frac{1}{b} \frac{\partial I}{\partial b} y^2 + \frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial c} z^2 \right\} \right] \\ &= -\mathcal{G}\rho\pi \left[ I(a, b, c) - \left( \frac{I(a, b, c)}{a^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial I}{\partial a} \right) x^2 - \left( \frac{I(a, b, c)}{b^2} - \frac{1}{b} \frac{\partial I}{\partial b} \right) y^2 - \left( \frac{I(a, b, c)}{c^2} - \frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial c} \right) z^2 \right] \end{aligned} \quad (77)$$

Ou on identifie facilement les expressions Eqs.(15). Ainsi le potentiel gravitationnel d'un ellipsoïde plein et homogène est également une forme quadratique.

## 4 Solution d'équilibre de Mac-Laurin et de Jacobi

1. L'équation sur la pression se déduit très simplement. On remarque que la pression est à nouveau une forme quadratique sans termes diagonaux. Par définition du moment d'inertie on a  $L = J\omega$ . Un peu d'arithmétique permet d'arriver sans difficulté au résultat demandé. Le volume de l'ellipsoïde se conserve quand la pulsation ou le moment d'inertie varie ainsi  $\bar{a}$  est constant. Le fluide est en équilibre si la surface donnée par  $P = 0$  correspond à la surface de l'ellipsoïde c'est à dire si  $P(M) = 0 \iff Q_{a,b,c}(\mathbf{OM})$ . Puisque  $Q_{a,b,c}$  et  $P - P_0$  sont des formes quadratiques il faut et il suffit que  $P - P_0 \propto Q_{a,b,c}(\mathbf{OM})$ . L'égalité des axes de ces formes

conduit au système :

$$\begin{cases} A(a, b, c) - X^2 \left( \frac{2\bar{a}^2}{a^2 + b^2} \right)^2 - \frac{\kappa}{a^2} = 0 \\ B(a, b, c) - X^2 \left( \frac{2\bar{a}^2}{a^2 + b^2} \right)^2 - \frac{\kappa}{b^2} = 0 \\ C(a, b, c) = \frac{\kappa}{c^2} \end{cases} \quad (78)$$

En utilisant la dernière équation pour faire disparaître  $\kappa$ , et en ajoutant l'équation qui définit  $\bar{a}$ , on obtient le système souhaité. Puis en réinjectant l'équation du volume afin de faire disparaître  $c$ , puis en soustrayant les équations pour faire disparaître  $X$  et en réarrangeant les termes on obtient l'équation souhaitée. A  $X$  fixé, il existe donc a priori un ensemble discret de solutions du système, c'est-à-dire qu'on peut considérer  $a, b, c$  comme des fonctions de  $X$ . En réinjectant le système précédent dans l'expression de la pression on obtient,

$$P_0 - P = \pi \mathcal{G} \rho^2 c^2 C(a, b, c) Q_{a,b,c}(\mathbf{OM}) \quad (79)$$

Ainsi puisque à la surface  $P = 0$  et  $Q_{a,b,c}(\mathbf{OM}) = 1$  on obtient le résultat.

2. Calculons  $A(a, a, c)$ , on a

$$\begin{aligned} A(a, a, c) &= a^2 c \int_0^\infty \frac{du}{(c^2 + u)^{1/2} (a^2 + u)^2} \\ &= 2a^2 c^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\tan \theta (1 + \tan^2 \theta) d\theta}{(a^2 + c^2 \tan^2 \theta)^2} \\ &= 2a^2 c^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta \cos^2 \theta d\theta}{\cos^4 \theta (a^2 + c^2 \tan^2 \theta)^2} \\ &= -2 \frac{a^2}{c^2} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \theta d \cos \theta}{\left(1 + \frac{a^2 - c^2}{c^2} \cos^2 \theta\right)^2} \\ &= 2 \frac{a^2/c^2}{(a^2/c^2 - 1)^{3/2}} \int_0^{(a^2/c^2 - 1)^{1/2}} \frac{X^2 dX}{(1 + X^2)^2} \end{aligned} \quad (80)$$

Où l'on a posé successivement les changements de variable  $u = c^2 \tan^2 \theta$  et  $(a^2/c^2 - 1) \cos^2 \theta = X^2$ . Pour trouver les primitives de la fraction dans l'intégrale effectuons une intégration par partie.

$$\begin{aligned} \int \frac{X^2 dX}{(1 + X^2)^2} &= \frac{1}{2} \int \frac{X dX^2}{(1 + X^2)^2} \\ &= \frac{1}{2} \int X d \left( \frac{1}{1 + X^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{-X}{1 + X^2} + \int \frac{dX}{1 + X^2} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{-X}{1 + X^2} + \arctan X \right] \end{aligned} \quad (81)$$

Introduisons l'excentricité de l'ellipsoïde de révolution  $e^2 = 1 - c^2/a^2$ . A l'aide d'un peu d'algèbre on aboutit à,

$$A(a, a, c) = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e^2} \left[ \frac{1}{e} \arcsin e - \sqrt{1 - e^2} \right] \quad (82)$$

Où l'on a utilisé le fait que  $\arctan \left( \frac{e}{\sqrt{1 - e^2}} \right) = \arcsin e$ . Les définitions Eqs.(13) nous permettent d'aboutir à  $A(a, a, c) = B(a, a, c)$ . C'est maintenant au tour de  $C(a, a, c)$  d'être calculé.

$$\begin{aligned} C(a, a, c) &= a^2 c \int_0^\infty \frac{du}{(a^2 + u)(c^2 + u)^{3/2}} \\ &= 2a^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\tan \theta (1 + \tan^2 \theta) d\theta}{(a^2 + c^2 \tan^2 \theta) (1 + \tan^2 \theta)^{3/2}} \\ &= 2a^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta d\theta}{(a^2 + c^2 \tan^2 \theta)} \\ &= -2 \frac{a^2}{c^2} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \theta d \cos \theta}{\left(1 + \frac{a^2 - c^2}{c^2} \cos^2 \theta\right)} \\ &= \frac{2a^2/c^2}{(a^2/c^2 - 1)^{3/2}} \int_0^{(a^2/c^2 - 1)^{1/2}} \frac{X^2 dX}{1 + X^2} \end{aligned} \quad (83)$$

Un petit théorème belge et le tour est joué,

$$\int \frac{X^2 dX}{1+X^2} = \int \frac{X^2+1-1dX}{1+X^2} = \int \left(1 - \frac{1}{1+X^2}\right) dX = X - \arctan X \quad (84)$$

En utilisant l'excentricité et la relation  $\arctan\left(\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\right) = \arcsin e$  on obtient,

$$C(a, a, c) = 2 \frac{\sqrt{1-e^2}}{e^2} \left[ \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} - \frac{\arcsin e}{e} \right] \quad (85)$$

En réinjectant ces valeurs dans le système Eq.(25), dont les deux première équations n'en sont plus qu'une dans la cas de la symétrie de révolution, on aboutit à,

$$\begin{aligned} X^2 \left( \frac{2\bar{a}^2}{a^2+b^2} \right)^2 &= \frac{\omega^2}{2\pi G\rho} = A(a, a, c) - \frac{c^2}{a^2} C(a, a, c) \\ &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3} (3-2e^2) \arcsin(e) - \frac{3}{e^2} (1-e^2) \end{aligned} \quad (86)$$

Commençons par le DL de  $\arcsin(e)\sqrt{1-e^2}/e$

$$\begin{aligned} \arcsin(e)\sqrt{1-e^2}/e &= \left(1 + \frac{e^2}{6} + \frac{3e^4}{40}\right) \left(1 - \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{8}\right) \\ &= 1 + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right)e^2 + \left(\frac{3}{40} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\right)e^4 \\ &= 1 - \frac{e^2}{3} - \frac{2e^4}{15} \end{aligned} \quad (87)$$

Le premier morceau

$$(3-2e^2) \arcsin(e)\sqrt{1-e^2}/e = 3 - e^2 - \frac{2}{5}e^4 - 2e^2 + \frac{2}{3}e^4 = 3 - 3e^2 + \frac{4}{15}e^4 \quad (88)$$

Ainsi,

$$\left[ (3-2e^2) \arcsin(e)\sqrt{1-e^2}/e - 3(1-e^2) \right] / e^2 = \frac{4}{15}e^2 \quad (89)$$

Soit à l'ordre le plus bas en  $e^2$

$$e^2 = \frac{15}{4} \frac{\omega^2}{2\pi\rho\mathcal{G}} > \frac{3}{2} \frac{\omega^2}{2\pi\rho\mathcal{G}} \quad (90)$$

Qui est bien supérieur au résultat Eq.(4) comme prédit lors de la même question. Le graphique nous montre que la pulsation maximale pour un ellipsoïde de Mac Laurin atteint  $\sqrt{\frac{\omega^2}{2\pi\rho\mathcal{G}}} \approx 0.4739$ . A une pulsation dans le domaine autorisé correspond 2 ellipsoïdes de Mac Laurin en équilibre.

3. Le moment cinétique de bifurcation est approximativement égal à  $\frac{L}{\sqrt{(abc)^{1/3}GM^3}} \approx 0.305$ . L'énergie est composée de l'énergie gravitationnelle et de l'énergie cinétique de rotation. L'énergie cinétique se calcule à l'aide du moment d'inertie.

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{M}{10} (a^2 + b^2) \omega^2 \\ &= \frac{4\pi\mathcal{G}M\bar{a}^4}{5} \frac{X^2}{a^2 + b^2} \\ &= \frac{3\mathcal{G}M^2\bar{a}^4}{5abc} \frac{X^2}{a^2 + b^2} \end{aligned} \quad (91)$$

Où on a utilisé la définition de  $X$  et remplacé  $\rho$  par son expression en fonction de la masse et des axes. Les calculs de l'énergie potentielle s'effectue dans les coordonnées adaptées à l'ellipsoïde.

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{\pi\rho^2\mathcal{G}}{2} \iiint_{\mathcal{E}_{a,b,c}} (A(a, b, c)x^2 + B(a, b, c)y^2 + C(a, b, c)z^2 - I(a, b, c)) \\ &= \frac{\pi\rho^2\mathcal{G}}{2} \left( abc \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (a^2 Am^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + b^2 Bm^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + c^2 Cm^2 \cos^2 \theta) m^2 dm \sin \theta d\theta d\varphi \right. \\ &\quad \left. - \frac{4\pi}{3} I(a, b, c) abc \right) \\ &= \frac{\pi\rho^2\mathcal{G}}{2} \left( \frac{4\pi}{15} (a^2 A + b^2 B + c^2 C) - \frac{4\pi}{3} I(a, b, c) abc \right) \end{aligned} \quad (92)$$



Ce qui une fois utilisé le résultat Eq.(14) et remplacé  $\rho$  par son expression en fonction de la masse et des axes conduit au résultat. Pour un moment cinétique suffisamment élevé l'ellipsoïde de Jacobi possède une énergie plus faible que celui de Mac Laurin alors celui ci est plus stable.