Comparaison entre la classification de Horton et la classification ascendante hiérarchique des confluences.
Application au bassin amont des Gardons

Comparison between Horton's classification and confluence hierarchical upward classification
Application in drainage basin of Gardons

Maxime Forriez*, Philippe Martin* et Laurent Nottale**.
* UMR ESPACE, 74, rue Pasteur – Case 17, 84 000 Avignon
** Observatoire de Paris-Meudon – LUTH, 5 place Jules Janssen, 92 195 Meudon
maximeforriez@hotmail.fr, philippemartin@univ-avignon.fr et laurentnottale@obspm.fr

Résumé. L'objectif de cet article est de proposer une caractérisation géométrique des réseaux hydrographiques à partir de l'exemple du bassin versant des Gardons (données CARTHAGE de l'IGN). Une telle caractérisation existe depuis, au moins, 1945, date à laquelle R. E. Horton mit au point sa classification par ordre. Toutefois, celle-ci est loin d'être pratique, car elle n'aboutit pas à des grandeurs caractéristiques claires permettant la différenciation des réseaux. Pour arriver à établir ces grandeurs, une nouvelle classification est proposée dans cet article. Elle permettra, entre autres, de définir quatre grandeurs caractéristiques.

Abstract. The aim of this paper is to propose a geometric characteristic of streams networks from the example the Gardons of drainage basin (data of CARTHAGE – IGN). This characteristic has existed since 1945, date when R. E. Horton found this classification with order. However, this is not pratical, because it does not estabish real characteristic magnitudes allowing the differenciation of networks. To establish these magnitudes, a new classification is proposed in this paper. It will allow to define four characteristic magnitudes.

Mots-clés. Comptage par des boîtes carrées, rapport de confluences, rapport de longueurs, classification hiérarchique ascendantes des confluences, Léonard de Vinci, log-périodicité

Keywords. Box-counting, ratio of confluence, ratio of length, confluence hierarchical upward classification, Léonard de Vinci, log-periodicity

Le réseau hydrographique des Gardons se localise dans le massif des Cévennes au sud-est du Massif Central. La surface collectée est d'environ 1 069 km² en amont du Pont de Ners (au 1 / 50 000). La partie amont draine des formations métamorphiques de socle tandis que la partie aval se déploie sur des terrains sédimentaires majoritairement karstifiables.

L'objectif de cet article est de conduire une analyse spatiale et scalaire du réseau hydrographique de la partie située en amont du Pont de Ners du bassin versant du Gardon (Gardon d'Alès, Gardon de Saint-Jean, Gardon de Sainte-Croix, Salindrenque, Galeizon). Cette structure spatiale est une des morphologies qui concourt à la transformation du signal pluie en débits. L'autre élément étant constitué par des facettes, des surfaces collectrices, envisagées à une échelle aussi grande que l'on veut (kilomètre, hectare, mètre carré, *etc.*) des versants.

A ces aspects surfaciques s'ajoutent évidemment les morphologies déployées dans la troisième dimension ; à savoir celles des agrégats et/ou des constituants des sols et/ou des formations superficielles plus ou moins altérées ici relevant essentiellement du domaine des socles. Ces dernières se déploient sur une gamme d'échelles élevée : de la microfissure au drain décamétrique, voire à la salle hectométrique pour quelques volumes karstifiés situés à l'aval du bassin versant. Ces derniers, en fonction de la limite choisie (Pont de Ners) qui correspond à l'aval des confluences des Gardons, ne jouent ici qu'un rôle limité.

Si notre choix s'appuie bien évidemment sur l'idée de confluence majeure, il véhicule aussi celle d'une différence de dimension entre les drainages sur socle et dans le karst. Ainsi, en tenant compte des variations d'altitude, nous pourrions dire que la dimension du bassin versant amont est égal à 2,5 (soit un « faux » 3D), alors que celle du bassin versant aval, karstique, est pleinement en 3D, dans la mesure où le réseau déployé est dual (aérien et souterrain) – et pas unique – avec des relations entre ses parties que constituent à l'aval les sources et en amont les pertes, en lit vif en particulier, mais pas seulement. Ici apparaît la question de l'entonnement et celle de la capacité de l'endokarst au drainage qui, lorsqu'elle est dépassée (ce qui ne signifie pas que le karst soit totalement plein d'eau), provoque un écoulement, en surface, accru (Martin, 1991 ; 2003a ; 2003b).

Tout réseau hydrographique peut s'étudier en utilisant la théorie des graphes. Celle-ci distingue arbre et arborescence. Un arbre est un graphe non orienté, connexe et sans cycle constitué d'arcs (les branches) et de nœuds. Par contre, une arborescence est un graphe orienté. Autrement dit, tout réseau hydrographique est une arborescence. Que l'on utilise la notion d'arbre ou celle d'arborescence, dans le cas d'un réseau hydrographique externe, les arcs correspondent aux talwegs et les nœuds aux confluences et aux sources, à l'aval des zones de concentration. Intuitivement, il apparaît que cette structure spatiale est ordonnée avec, à l'amont, de petites branches, nombreuses, et vers l'aval des branches en nombre de plus en plus réduit, mais de plus en plus importantes. Cette organisation est celle de l'écoulement actuel et visible des flux. C'est celle de la concentration des débits d'amont en aval et c'est celle que reprend la classification de R. E. Horton qui acquiert une forme définitive avec S. A. Schumm et A. N. Strahler (1954a ; 1954b ; 1957).

Toutefois, si en descendant les pentes l'eau transporte, vers l'aval, une charge (dissoute et/ou solide), il n'en reste pas moins que l'érosion linéaire, la glyptogenèse, lorsqu'il y a accroissement de la hauteur de chute, par exemple, soit en raison d'un mouvement orogénique positif, soit parce que le niveau de la mer s'abaisse, se développe essentiellement de bas en haut (érosion régressive). C'est là où les flux (donc l'énergie) sont maximaux et où l'abaissement du talweg s'initie que débute généralement une reprise de l'érosion linéaire. Ensuite, la partie abaissée gagne, de lieux en lieux au fond des vallées et des vallons, les sources en amont du réseau, mais en un temps dont l'échelle est géologique. Cette dynamique a été établie tant sur des modèles réduits expérimentaux que vérifiée, par exemple, lors de désenglacements par retraits d'inlandsis.

A partir de là, il apparaît que s'il est nécessaire de considérer l'ordre du réseau hydrographique correspondant à l'écoulement, il n'est pas inintéressant de l'envisager en fonction du sens majeur de la dynamique érosive, de la glyptogenèse. On peut alors proposer deux types de classifications pour décrire l'arborescence d'un réseau hydrographique : la classification de Horton-Schumm-Strahler et la Classification Hiérarchique Ascendance des Confluences (CHAC).

1. Construction des classifications

Ces classifications présentent plusieurs intérêts. D'une part, elles permettent d'établir formellement et quantitativement l'idée d'organisation. D'autre part, elles rendent différents réseaux sur cette base quantifiée, comparables. Enfin, elles ouvrent la voie à une théorisation des formes et de la morphogenèse dans la mesure où les concepts, les formalisations auxquels elles font appel, mais aussi les résultats qu'elles fournissent, permettent d'envisager, d'intégrer ces éléments certes spécifiques, mais emblématiques, dans un cadre théorique, dans un espace virtuel contrôlé à partir duquel des spéculations comme des extrapolations ou des tests peuvent être entrepris.

Pour respecter, à la fois l'histoire et faciliter l'approche du propos développé ici, nous débuterons par la classification de Horton-Schumm-Strahler. Cela permettra de préciser certains concepts avant d'aborder la classification hiérarchique ascendante des confluences.

Classification de Horton-Schumm-Strahler

La classification de R. E. Horton (1945) est vraisemblablement la plus célèbre en hydrologie. Elle consiste à envisager le déploiement du réseau de l'amont vers l'aval. La numérotation ici choisie est celle de S. A. Schumm (1956) et de A. N. Strahler (1954a ; 1954b ; 1957) : chacune des sources est numérotée 1, puis chaque fois qu'un drain de même ordre conflue, on passe au numéro supérieur. L'algorithme est le suivant : soient un arc A de rang m et un arc B de rang n confluant au nœud amont d'arc C de rang o. Alors

$$o = \max\left\{m, n, \operatorname{int}\left(\frac{m+n+2}{2}\right)\right\}$$

où $2 = k$ correspond à une bifurcation élémentaire.

Cette classification permet de dégager les drains principaux et de déboucher sur les relations exponentielles bien connues et les rapports (P. Birot, 1981, p. 411) :

$$R_A = \frac{A_n}{A_{n-1}}$$

$$R_L = \frac{L_n}{L_{n-1}}$$

$$R_I = \frac{\langle L_n \rangle}{\langle L_{n-1} \rangle}$$

avec A la surface drainée, L la longueur d'un arc et $\langle L \rangle$ la partie moyenne d'un arc.

P. Birot indique que « les deux premières « lois » sont d'origine aléatoire [souligné par l'auteur] comme l'ont montré les opérations de simulation qui procèdent de mécanismes élémentaires différents. Elles signifient seulement que la probabilité de capture par érosion régressive ou par confluence de deux cours d'eau zigzaguant sur un plan incliné dépend de la superficie de leurs bassins versants respectifs » (1981, p. 411 et 413).

En considérant le premier rapport R_A et le dernier rapport R_I, il est aisé de voir que lorsque la taille de la surface drainée augmente, la pente moyenne locale du talweg diminue. Si l'on considère que, toutes choses étant égales par ailleurs, le débit est proportionnel à la taille de la surface drainée, alors il est possible de mettre en rapport un indicateur de fonctionnement, le débit Q, et un paramètre du système morphologique. Cela débouche sur les relations en partie établies par F. Hirsch (1962) en particulier :

$$Q = hA^g$$

où g et h sont des paramètres dépendant du bassin versant étudié.

Si ces considérations sont essentielles pour la modélisation hydrologique du fonctionnement d'un bassin versant, elles doivent être complétées par d'autres rendant compte de l'érosion régressive qui établit le drainage. Or, cette dynamique se déploie dans le sens qui est formellement celui que met en œuvre la théorie des graphes.

Classification ascendante hiérarchique des confluences

La classification ascendante hiérarchique des confluences (CHAC) suit une orientation d'aval en amont, c'est-à-dire le sens de la dynamique morphogénétique du réseau. Elle étudie l'arbre en fonction de ses branches. Elle correspond exactement à la description d'un arbre par la théorie des graphes. Dans cette démarche, il faut observer qu'en partant de l'exutoire, à chaque bifurcation, on change de niveau. Cela a pour conséquence d'obtenir un arbre plus développé que celui de R. E. Horton. Dans le cas des Gardons, l'arbre de Horton obtenu possède cinq niveaux tandis que celui de la CHAC en possède soixante-trois !

2. Arborescence, log-péridiocité, dimension fractale

L'idée initiale est due à L. de Vinci qui a énoncé une régularité récurrente qui s'est avérée être une loi empirique.

Loi de Léonard de Vinci

« Toutes les branches d'arbres, à quelque degré de leur hauteur qu'on le réunisse, sont égales à la grosseur du tronc. Toutes les ramifications des eaux, douées d'un mouvement égal, à chaque degré de leur longueur égalent la grosseur du fleuve, leur père » (L. Vinci *in* L. Nottale *et alii*, 2000, p. 185).

Pour L. de Vinci, l'organisation intrinsèque d'un arbre idéalisé obéit à la loi suivante :

$$k{r_{n+1}}^2 = {r_n}^2$$

où r est le rayon, k est la bifurcation élémentaire et n le niveau.

On en déduit que :

$$k = \left(\frac{r_n}{r_{n+1}}\right)^2$$

B. Mandelbrot (1977 ; 1982) montra que l'exposant 2 de ces relations était une dimension fractale. Aussi, la relation générale est :

$$k = g^D$$

où l'on constate que :

$$\frac{r_n}{r_{n+1}} = \frac{L_n}{L_{n+1}} = g$$

où L_n est la longueur de la branche.

Loi log-périodique et arbre

Dans le cadre d'une autosimilarité parfaite, ces lois peuvent être complétées par une loi log-périodique. En effet, un arbre possède une structure log-périodique qui, d'ailleurs, avait été mise en évidence par R. E. Horton (1945) et F. Hirsch (1962), correspondant à la loi suivante :

$$L_{TOT} = L_0\left(1 + g + g^2 + ... + g^{p-1}\right) = L_0\left(\frac{g^p - 1}{g - 1}\right)$$

où $p - 1$ est le nombre de niveau, L_{TOT} la longueur totale d'un chemin et L_0 la longueur de la première branche de la série. Dans ce cadre, l'utilisation du classement de la CHAC apparaît plus simple que le classement de Horton.

A partir de cette loi empirique, L. Nottale *et alii* (2000) montrèrent qu'une autre valeur caractérise les arbres et les arborescences : la longueur critique notée L_C qui correspond à la limite d'un chemin. Il s'agit en fait d'un horizon. Cette valeur n'appartient donc pas à la série de longueurs composant le chemin.

$$L_C = L_0\left(1 + g^{-1} + g^{-2} + \ldots\right) = L_0\left(\frac{g}{g-1}\right)$$

Cette longueur permet alors de construire une résolution $\varepsilon = \left|L_C - L_p\right|$ prouvant qu'une structure arborescente est fractale à la limite, mais pas seulement. Cette valeur établit de nouvelles relations qui n'ont pas été perçues dans les approches de R. E. Horton (1945) ou de F. Hirsch (1962). Les plus importantes sont :

$$L_C - L_p = L_0\left(\frac{g^{p-1}}{g-1}\right)$$

et

$$\frac{L_C - L_p}{L_C - L_{p-1}} = g$$

Enfin, on peut également construire une suite évaluant les longueurs des différents niveaux à partir de n'importe quelle branche de l'arbre :

$$L_n = L_C + \left(L_m - L_C\right)g^{m-n}$$

où m est le niveau de référence et n le niveau recherché.

Ainsi, quatre grandeurs permettent de caractériser un réseau hydrographique : la dimension fractale D, la longueur critique L_C, le rapport d'échelle g et l'embranchement élémentaire k. Pour tout réseau hydrographique, l'embranchement élémentaire semble être $k = 2$. Toutefois, l'estimation des autres paramètres paraissent beaucoup plus difficile à établir.

3. Estimation des paramètres

La dimension fractale, par les nombreux travaux existant, est le paramètre le plus facile à établir. Ensuite, l'obtention du rapport d'échelle g est un peu plus subtil, car les formules précédentes ne s'appliquent que pour les fractales strictement autosimilaires, ce qui ne correspond pas au cas d'un réseau hydrographique réel. Enfin, peut-on établir une longueur critique L_C ?

Dimension fractale

La dimension fractale se calcule aisément à partir des rapports de confluences et de longueurs dans le classement de Horton. Une méthode similaire peut être appliquée à la CHAC. Toutefois, rien ne dit que les résultats seront identiques. Aussi, les deux dimensions fractales calculées peuvent être complètement différentes. En conséquence, il faut établir une dimension fractale de référence définie en fonction d'un référentiel externe. La dimension fractale par comptage de boîtes carrées a été retenue pour jouer ce rôle. Celle-ci a été estimée à 1,648 ± 0,008.

Loi de Horton

Une autre dimension fractale du réseau hydrographique des Gardons peut être obtenue en utilisant le rapport de confluence R_C de R. E. Horton (1945) et le rapport des longueurs moyen par ordre R_L de S. A. Schumm (1956). R_C correspond au rapport entre le nombre de confluences d'un ordre donné à celui de l'ordre suivant (ou précédant). R_L correspond au rapport entre la longueur moyenne d'un ordre donné et celle de l'ordre suivant (ou précédant).

Il est ensuite possible d'envisager le rapport de ces rapports, et plus exactement le rapport des logarithmes népériens de ces rapports :

$$\Delta = -\frac{\ln(R_C)}{\ln(R_L)}$$

et de montrer que ce rapport $-\frac{\ln(R_C)}{\ln(R_L)}$ est constant quel que soit le niveau, en tenant compte des barres d'erreur.

B. Mandelbrot (1977 ; 1982) a montré qu'il correspondait à une dimension fractale. Celle-ci, pour le réseau hydrographique des Gardons est égale $1{,}492 \pm 0{,}199$. Elle est donc compatible, aux incertitudes près, avec la dimension obtenue avec la méthode par comptage de boîtes carrées puisque 1,640 et 1,656 sont bien dans l'intervalle 1,293 et 1,691. On notera toutefois que la méthode des rapports introduit une forte barre d'erreur, ce qui n'est pas le cas avec la méthode par comptage de boîtes carrées qui, pour cette raison, semble être préférable.

Loi de la C.H.A.C.

En utilisant des rapports R_C et R_L calculés ici sur soixante-trois niveaux, on peut évaluer la dimension fractale issue de la CHAC comme étant égale à $1{,}584 \pm 0{,}125$. Cette dimension est compatible avec les deux mesures précédentes. Toutefois, la dimension fractale de boîtes carrées correspond une nouvelle fois à la mesure la plus précise.

Bilan

Méthode	Comptage de boîtes carrées	Horton-Schumm-Strahler	CHAC
Dimension fractale	$1{,}648 \pm 0{,}008$	$1{,}492 \pm 0{,}199$	$1{,}584 \pm 0{,}125$
Comptage (sens de l'arborescence)	Sans objet	Sources	Exutoire
Dynamique	Confluencée	Ecoulement	Glyptogenèse

Tableau 1. Dimensions fractales du réseau hydrographique des Gardons
Fractal dimensions of streams network of Gardons

A la vue du Tableau 1, on peut estimer la dimension fractale du réseau hydrographique des Gardons à $\overline{D} = 1{,}6 \pm 0{,}1$.

Tortuosité et rapport g

Le rapport g est incalculable localement. En effet, les calculs effectués ont montré une très grande instabilité pour cette valeur par les calculs exposés précédemment. Il faut donc trouver un moyen de l'estimer globalement, tout comme la dimension fractale. Pour cela, il suffit de remarquer que chaque branche composant le réseau hydrographique dans le classement de la CHAC est tortueuse, c'est-à-dire que l'écoulement, au sens de chaque talweg, est rarement rectiligne. Ainsi, il existe une distance à vol d'oiseau entre deux nœuds notée *VO* et une distance le long du cours d'eau notée *LC*. Le rapport de ces deux valeurs fournit une bonne estimation de *g* :

$$\bar{g} = \frac{LC}{VO}$$

Toutefois, il faut prouver que ce rapport est stable. Aussi, plusieurs méthodes ont montré la convergence de toutes les valeurs de *g* estimées. Deux méthodes seront exposées dans cet article : la méthode de la tortuosité locale et celle de la tortuosité globale.

Tortuosité locale

Dans le classement de la CHAC, on compte 618 branches pour l'ensemble de l'arborescence des Gardons. Il est possible d'établir pour chacune d'elles un rapport $\frac{LC}{VO}$ et d'en dresser une statistique. Grâce à elle, l'estimation du rapport moyen donne une valeur de *g* assez précise : $\bar{g} = 1{,}5 \pm 0{,}1$.

Tortuosité globale

Dans le classement de la CHAC, on compte 311 chemins pour l'ensemble de l'arborescence des Gardons. Il est possible d'établir pour chacun d'eux un autre rapport $\frac{LC}{VO}$ entre la source et l'exutoire et d'en dresser également une statistique. L'estimation du rapport moyen confirme la valeur précédente de *g* avec la même précision : $\bar{g} = 1{,}5 \pm 0{,}1$. Il faut noter qu'il existe d'autres méthodes, non exposées ici, qui aboutissent également à cette valeur.

g, D et k

A partir des valeurs obtenues de la dimension fractale et du rapport d'échelle, on peut vérifier que :

$$\bar{g}^{\bar{D}} = k = 1{,}9 \pm 0{,}1$$

ce qui est compatible avec $k = 2$. La loi empirique de L. de Vinci, généralisée par B. Mandelbrot (1977 ; 1982), est donc bien vérifiée pour le réseau hydrographique des Gardons.

Longueur critique

Pour l'instant, les formules présentées précédemment ne fonctionnent que sur des arborescences parfaitement autosimilaires, ce qui n'est pas le cas des réseaux hydrographiques réels. Toutefois, l'existence d'un rapport d'échelle est un indice tendant à prouver qu'une longueur critique est prégnante dans le réseau hydrographique des Gardons. Elle reste à être estimée…

En conclusion, un réseau hydrographique est caractérisé par trois grandeurs : un rapport d'échelle *g*, une dimension fractale *D* et un embranchement élémentaire *k*. D'après les lois obtenues par L. Nottale *et alii* (2000), il devrait en exister une quatrième : la longueur critique L_C dont les lois empiriques proposées ne permettent pas l'estimation. Reste à trouver les liens caractéristiques entre ces grandeurs et celles qui sont classiques en géomorphologie comme le débit, la surface du bassin versant, *etc*.

Bibliographie

Birot, (P.), 1981 – *Les processus d'érosion à la surface des continents*, Paris, Masson, XVI-608 p.

Hirsch, (F.), 1962 – « Méthode de prévision des débits des cours d'eau par l'analyse morphométrique des réseaux fluviatiles », *Revue de géomorphologie dynamique*, n°7-8-9, p. 97-106

Horton, (R. E.), 1945 – « Erosional developmet of streams and their drainage basins ; hydrophysical approach to quantitative morphology », *Geol. Soc. America Bull.*, 56, p. 275-370.

Mandelbrot, (B.), 1977 – *The fractal geometry of nature*, New York, W. H. Freeman and Compagny, 460 p.

Mandelbrot, (B.), 1982 – *The fractal geometry of nature*, San Francisco, W. H. Freeman and Compagny, 468 p. [réédition augmentée de 1977]

Martin, (P.), 1991 – *Hydromorphologie des géosystèmes karstiques des versants nord et ouest de la Sainte-Baume (Bouche du Rhône, Var ; France). Etude hydrologique, hydrochimique et de vulnérabilité à la pollution*, Marseille, Thèse de l'Université d'Aix-Marseille II, 321 p.

Martin, (P.), 2003a – « Construire un objet géographique. Recherche d'une méthodologie. » *in* Maby, Jacques (s.d.), *Objets et indicateurs géographiques*, Collection Actes Avignon n°5, Université d'Avignon et UMR ESPACE 6012 du CNRS éditeurs, p. 42-88 [En ligne : http://www.umrespace.org et http://www.geo.univ-avignon.fr]

Martin, (P.), 2003b – « Objectivation des formes en géographie et calculs d'indicateurs fractals. Exemples karstiques. » *in Objets et indicateurs géographiques* sous la direction de J. MABY, Collection Actes Avignon n°5, Université d'Avignon et UMR ESPACE 6012 du CNRS éditeurs, p. 153-268 [En ligne : http://www.umrespace.org et http://www.geo.univ-avignon.fr]

Nottale, (L.), Chaline, (J.), Grou, (P.), 2000 – *Les arbres de l'évolution. Univers, vie, sociétés*, Paris, Hachette, 380 p.

Schumm, (S.A.), 1956 – « Evolution of drainage systems and slopes in badlaands at Perth Amboy, New Jersey », *Geol. Soc. America Bull.*, 67, p. 597-646

Strahler, (A. N.), 1954a – « Quantitative geomorphology of erosional landscapes », *C.-R. 19th Intern. Geol. Cong.*, Algiers, 1952, p. 341-354

Strahler, (A. N.), 1954b – « Statistical analysis in geomorphic research », *J. Geol.*, 62, p. 1-25

Strahler, (A. N.), 1957 – « Quantitative analysis of watershed geomorphology », *Am. Geophys. Union Trans.*, 38(6), p. 913-920